брано. Положим $\delta \leqslant \rho_{m-1-\bar{n}}$. Тогда из (32) получим $u(t', x') \leqslant \leqslant \exp\left[-\frac{\eta_1}{2}\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\right]$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Следствие. *Условия регулярности граничных точек для уравнения (1) и уравнения теплопроводности $\Delta u = u_t$ совпадают.*

Замечание. Рассмотрим в ограниченной области $D \subset R_{n+1}$ следующее уравнение:

$$L_1 u = \varphi_1(t, x)\left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t, x) u_{x_i x_k} - u_t\right] + \varphi_2(t, x)\tilde{L}u +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} d_i(t, x) u_{x_i} + c(t, x) u = 0,$$

где $\tilde{L}$ — эллиптический оператор размерности $(n+1)$ с ограниченными коэффициентами. Пусть выполнены условия (3)—(7), кроме того, $\varphi_2(t, x) \leqslant b_2(r_p)^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 2$. Тогда теоремы 1 и 2 для эллиптико-параболического оператора L_1 сохраняют силу. Они могут быть доказаны по приведенной выше схеме.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Новрузову за постоянное внимание к данной работе.

Литература

1. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М.: Наука, 1971.
2. Петровский И. Г.— Compos. Math., 1935, vol. 1, p. 383—419.
3. Тихонов А. Н.— Бюлл. МГУ, 1938, секция А 1, вып. 9.
4. Михайлов В. П.— Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 2.
5. Кондратьев В. А.— Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 2.
6. Ландис Е. М.— Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 3.
7. Мамедов И. Т.— Уч. зап. АзИНЕФТЕХИМ, 1975, № 6, с. 87—92.
8. Новрузов А. А.— Мат. заметки, 1976, т. 19, № 4, с. 587—593.
9. Мамедов И. Т.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3.
10. Мамедов И. Т.— Мат. заметки, 1976, т. 20, № 5, с. 717—723.
11. Новрузов А. А.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 4.
12. Ибрагимов А. И.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 3.
13. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой.— В сб.: Итоги науки / Мат. анализ. ВИНИТИ, 1970.
14. Мамедов И. Т.— Уч. зап. АзИНЕФТЕХИМ, 1974, № 6, с. 63—71.

Азербайджанский институт нефти и химии им. М. Азизбекова

Поступила в редакцию 27 апреля 1979 г.

УДК 517.956.227

П. А. МИШНАЕВСКИЙ

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ. I

В настоящей работе показывается, что исследование основных краевых задач для эллиптического оператора второго порядка в областях с бесконечной границей сводится к исследованию соответствующих задач для операторного уравнения Штурма — Лиувилля в нецилиндрических областях, рассмотренных ранее в [1, 2].

Результаты, полученные здесь, позволяют, например, во второй части этой работы легко получить для соответствующих краевых задач принцип предельной амплитуды и теорему о спектральном разложении по

собственным функциям, которые являются решениями задачи рассеяния, для более широкого класса областей, чем это было сделано до сих пор.

§ 1. СВЕДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА К АБСТРАКТНОМУ ОПЕРАТОРУ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Пусть l — эллиптическое дифференциальное выражение второго порядка:

$$lu=-\sum_{i,\,j=1}^{N}\mathscr{D}_i(a_{ij}\mathscr{D}_j u)+Q(x)u,\quad \mathscr{D}_j=\frac{\partial}{\partial x_j}-\sqrt{-1}\,b_j,$$

$x\in\Omega$, Ω — область с бесконечной границей в R^N, $N\geqslant 2$. Наложим основные ограничения на коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $Q(x)$ и область Ω:

1) функции $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$ вещественны, $a_{ij}(x)\in\mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$, $b_j(x)\in\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, $a_{ij}=a_{ji}$ для всех $x\in\Omega$ и любых комплексных чисел $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$: $d_1|\xi|^2\leqslant\sum\limits_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j\leqslant d_2|\xi|^2$, где d_i — положительные постоянные, $|\xi|^2=\sum\limits_{1}^{N}|\xi_i|^2$;

2) $a_{ij}(x)-\delta_{ij}=O(|x|^{-\sigma-h_{ij}})$, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_s}=O(|x|^{-1-\sigma-h_{ij}})$, $\sigma>0$, $h_{ij}\geqslant 0$, $1\leqslant i,\,j,\,s\leqslant N$, $|x|\gg 1$;

3) $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_s\partial x_t}=O(|x|^{-2-\sigma-h_{ij}})$, $1\leqslant i,\ j,\,s,\,t\leqslant N$, $|x|\gg 1$;

4) $Q(x)=Q_1(x)+Q_2(x)$, $Q_i(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i=1,2$, $\exists\,\dfrac{\partial Q(x)}{\partial x_j}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1\leqslant j\leqslant N$;

5) существует m, $2\leqslant m\leqslant N+1$, такое, что область Ω удовлетворяет при достаточно большом R, $R>0$, одному из условий:

а) $\Omega_1(R)=\Omega\cap\{(x_1,\ldots,x_N)\in R^N|\sum\limits_{1}^{m-1}x_i^2\geqslant R^2\}\subseteq\{(x_1,\ldots,x_N)\in R^N|(\sum\limits_{m}^{N}x_i^2)\leqslant d(\sum\limits_{1}^{m-1}x_i^2)^{l_0}\}$, $0<l_0\leqslant 1$;

б) $\Omega_1(R)\subseteq\left\{(x_1,\ldots,x_N)\in R^N|(\sum\limits_{m}^{N}x_i^2)\leqslant d\left(\ln_k\left(\sqrt{\sum\limits_{1}^{m-1}x_i^2}\right)\right)^{2p_0}\right\}$, $p_0>0$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\geqslant 1$, $\Omega\subseteq\Omega_1(c_k)$, $\ln_k(c_k)=0$, где для любого целого k, $k\geqslant 1$, $\ln_k(r)=\ln(\ln_{k-1}(r))$, $\ln_0(r)\equiv r$, а в условиях 2), 3): $h_{ij}\geqslant 0$, $1\leqslant i,\,j\leqslant m-1$, $m\leqslant i,\,j\leqslant N$; $h_{ij}\geqslant\begin{cases}1-l_0, & \text{а)},\\ 1, & \text{б)},\end{cases}$ $1\leqslant i\leqslant m-1$, $m\leqslant j\leqslant N$; $h_{ij}=h_{ji}$.

Теорема 1. *При выполнении условий 1), 2), 5) существует* $\mathbf{C}^1$-*диффеоморфизм* T^{-1}, *переводящий* R^N_+ *в себя, и связанный с ним унитарный оператор* U, $UL_2(\Omega)=L_2(H(r),(a_0,\infty),dr)$, *такой, что* UlU^{-1} *имеет вид, изученный в* [1, 2], *а именно*

$$UlU^{-1}\equiv\tilde{l}=-\partial(\rho^{-1}(r)\partial)+2C_0(r)\partial+A(r),\quad \partial=\partial_\varphi-\sqrt{-1}\,b(r).$$

Если выполнено, кроме того, условие 3), то T будет $\mathbf{C}^2$-диффеоморфизмом. Здесь $R^N_+=R^N-\{0\}$ в случае а), $R^N_+=R^N-S^{m-2}(c_k)\times R^{N-m+1}$, если выполнено условие б), где $S^{m-2}(R)$ — $(m-1)$-мерный шар радиуса

R с центром в начале координат, т. е. для $x \in R^N_+$ $\sum_1^{m-1} x_i^2 \geqslant c_k^2$ в случае б);

$$a_0 = \begin{cases} 0, & \text{а)} \\ c_k, & \text{б)} \end{cases}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a_{ij} \in C^2(R^N)$, а условия 1)—3) выполняются для $x \in R^N$.

Введем теперь ортогональную систему криволинейных координат $(r, \eta_2, \ldots, \eta_N) = (r, \eta)$, связанную с декартовыми прямоугольными следующим образом:

$$y_1 = r_1 \cos \eta_2, \ldots, y_i = r_1 \sin \eta_2 \ldots \cos \eta_{i+1}, \ldots, y_{m-1} =$$
$$= r_1 \sin \eta_2, \ldots, \sin \eta_{m-1} \quad (m \geqslant 3),$$
$$y_m = r_2 \cos \eta_{m+1} \ (y_m = r_2, \ m = N), \ldots, y_N = r_2 \sin \eta_{m+1} \ldots \sin \eta_N;$$
$$0 \leqslant \eta_i \leqslant 2\pi, \quad i = m-1, N; \quad 0 \leqslant \eta_i \leqslant \pi, \quad 2 \leqslant i \leqslant m-2,$$
$$m+1 \leqslant i \leqslant N-1; \quad r_1^2 = r_1^2(y) = \sum_1^{m-1} y_i^2, \quad r_2^2 = r_2^2(y) = \sum_m^N y_i^2,$$

причем в случае а) $r_2 = r_1^{l_0} \operatorname{tg} \eta_m$, $r_1^2 + l_0 r_2^2 = r^2$, $r \geqslant 0$, т. е. $r_i = \varphi_i(r, \operatorname{tg} \eta_m)$, $i = 1, 2$; а в случае б) $r_2 = (\ln_k(r_1))^{p_0} \operatorname{tg} \eta_m$, $r_1 \geqslant c_k$,

$$2 \int_{c_k}^{r_1} \prod_0^k \ln_i(\tau)\, d\tau + p_0 r_2^2 = 2K(r_1) + p_0 r_2^2 = \tilde{r}^2 = r^2 \beta(r),$$

$\beta(r) = \prod_1^k \ln_i(r)$, $\tilde{r} \geqslant 0$, $r \geqslant c_k$, $r_i = \varphi_i(\tilde{r}, \operatorname{tg} \eta_m) = \tilde{\varphi}_i(r, \operatorname{tg} \eta_m)$; $0 \leqslant \eta_m \leqslant \frac{\pi}{2}$, если $m = N$, то $|\eta_m| \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\frac{dy}{d(r, \eta)} = \lambda(\eta)\, g_0^{-2}(r, \eta_m)$, где $\lambda(\eta)$ от r не зависит, а $g_0^{-2}(r, \eta_m) = \frac{r r_1^{m-1+l_0(N-m+1)}}{(r_1^2 + l_0^2 r_2^2)}$ в случае а),

$$g_0^{-2}(r, \eta_m) = \sqrt{\beta(r)}\,(1 + \psi(r))\, g_1^{-2}(\tilde{r}, \eta_m) =$$
$$= \frac{r\beta(r)\,\beta(r_1)\,(1 + \psi(r)) r_1^{m-1} (\ln_k(r_1))^{p_0(N-m+1)}}{(r_1^2 (\beta(r_1))^2 + p_0^2 r_2^2)}$$

в случае б), $\psi(r) = \frac{r}{2\beta(r)} \frac{d\beta(r)}{dr}$.

Обозначим через S_0^{N-1} следующее множество: $S_0^{N-1} = R_0^1 \times S^{m-2}(1) \times S^{N-m}(1)$, где $R_0^1 = (0, \infty)$, если $m \neq N$, $R_0^1 = (-\infty, \infty)$, $m = N$. Тогда $(\eta_2, \ldots, \eta_N)$ задают систему криволинейных ортогональных координат на S_0^{N-1}. Для $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_N) \in S_0^{N-1}$; $\xi_0 = \operatorname{tg} \eta_m$, $\xi_1 = \cos \eta_2, \ldots, \xi_{m-1} = \sin \eta_2 \ldots \sin \eta_{m-1}, \ldots, \xi_N = \sin \eta_{m+1} \ldots \sin \eta_N$.

Определим дважды дифференцируемое отображение S R^N_+ в себя следующим образом: а) $Sy = x(r(y), \xi(y))$; б) $Sy = x(\tilde{r}(y), \xi(y))$, где $\xi(y) \in S_0^{N-1}$, $\xi_i(y) = y_i / r_1(y)$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $\xi_i(y) = y_i / r_2(y)$, $m \leqslant i \leqslant N$, $\xi_0(y) = r_2(y) / r_1^{l_0}(y)$ в случае а), $\xi_0(y) = r_2(y) / (\ln_k(r_1(y)))^{p_0}$ в случае б), а $x(r, \xi)$ и $x(\tilde{r}, \xi)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dr} = \frac{\left(\sum_1^{m-1} a_{ij} x_j + l_0 \sum_m^N a_{ij} x_j\right) r}{\left(\sum_1^{m-1} a_{ij} x_i x_j + l_0^2 \sum_m^N a_{ij} x_i x_j + 2 l_0 \sum_1^{m-1} \sum_m^N a_{ij} x_i x_j\right)}, \tag{1}$$
$$1 \leqslant i \leqslant N;$$

$$\frac{dx_i}{d\tilde{r}}=\frac{\left(\sum\limits_1^{m-1} a_{ij}x_j\beta(r_1)+p_0\sum\limits_m^N a_{ij}x_j\right)\tilde{r}}{\left(\sum\limits_1^{m-1} a_{ij}x_ix_j(\beta(r_1))^2+p_0^2\sum\limits_m^N a_{ij}x_ix_j+2p_0\beta(r_1)\sum\limits_1^{m-1}\sum\limits_m^N a_{ij}x_ix_j\right)}, \quad (1')$$

$$1\leqslant i\leqslant N,\quad \tilde{r}=r\sqrt{\beta(r)},\quad r_1^2=\sum_1^{m-1}x_1^2;$$

с начальными условиями: $x_i(1,\xi)=\varphi_1(1,\xi_0)\xi_i$, $1\leqslant i\leqslant m-1$, $x_i(1,\xi)=\varphi_2(1,\xi_0)\xi_i$, $m\leqslant i\leqslant N$, $\xi\in S_0^{N-1}$. Отсюда получаем:

а) $r^2(x(r,\xi))=\sum\limits_1^{m-1}x_i^2+l_0\sum\limits_m^N x_i^2=r^2(y)$;

б) $\tilde{r}^2(x(\tilde{r},\xi))=2K(r_1(x))+p_0r_2^2(x)=\tilde{r}^2(y)$.

Лемма 1. *Пусть (r,η) — координаты точки $y\in R_+^N$, $x=Sy$. Тогда*

$$\frac{a(r,\eta)}{r^2}\frac{dx(r,\eta)}{dy}=\frac{a(\tau,\eta)}{\tau^2}\frac{dx(\tau,\eta)}{dy}\exp\left\{\int_\tau^r f(s,\eta)\,ds\right\},$$

$f(s,\eta)\in L(0,\infty)$, *где* $a(r,\eta)=\sum\limits_1^{m-1}a_{ij}x_ix_j+l_0^2\sum\limits_m^N a_{ij}x_ix_j+2l_0\sum\limits_1^{m-1}\sum\limits_m^N a_{ij}x_ix_j$ *в случае а),* $a(r,\eta)=a_0(r,\eta)/[\beta(r)(1+\psi(r))]^2$, $a_0(r,\eta)=\sum\limits_1^{m-1}a_{ij}x_ix_j(\beta(r_1))^2+p_0^2\sum\limits_m^N a_{ij}x_ix_j+2p_0\beta(r_1)\sum\limits_1^{m-1}\sum\limits_m^N a_{ij}x_ix_j$ *в случае б).*

Доказательство. Из системы (1) дифференцированием по η_i, $1\leqslant i\leqslant N$, $\eta_1\equiv r$, получаем в случае а):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\eta_n}\right)=\sum_1^N\frac{\partial x_t}{\partial\eta_n}\left\{\sum_1^N x_s\tilde{d}_s\frac{\partial a_{is}}{\partial x_t}ra^{-1}(r,\eta)+\tilde{d}_ta_{it}ra^{-1}(r,\eta)+\right.$$
$$\left.+\sum_1^N a_{is}x_sx_t\tilde{d}_t\tilde{d}_sr^{-1}a^{-1}(r,\eta)-\sum_1^N\tilde{d}_sa_{is}x_sra^{-2}(r,\eta)\frac{\partial a(r,\eta)}{\partial x_t}\right\},$$

$$1\leqslant i,\ n\leqslant N,\quad d_i=\begin{cases}1, & 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ l_0, & m\leqslant i\leqslant N;\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a(r,\eta)}{r^2}\right)=\frac{a(r,\eta)}{r^2}\left(-\frac{2}{r}+\sum_{t,s=1}^N\tilde{d}_sa_{is}x_sra^{-2}(r,\eta)\frac{\partial a(r,\eta)}{\partial x_t}\right).$$

Отсюда $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a(r,\eta)}{r^2}\frac{dx(r,\eta)}{dy}\right)=f(r,\eta)\left(\frac{a(r,\eta)}{r^2}\frac{dx(r,\eta)}{dy}\right)$, где

$$f(r,\eta)=\left[a^{-1}(r,\eta)\,r\left\{\left(\sum_1^{m-1}a_{tt}+l_0\sum_m^N a_{tt}\right)+\sum_{t=1}^N\left(\sum_1^{m-1}\frac{\partial a_{ts}}{\partial x_t}x_s+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+l_0\sum_m^N\frac{\partial a_{ts}}{\partial x_t}x_s\right)\right\}-\frac{1}{r}-g_0^2(r,\eta_m)\frac{\partial g_0^{-2}(r,\eta_m)}{\partial r}\right]=O(r^{-1-\sigma})+$$
$$+O(r^{-1-(1-l_0)}(1-l_0))\in L(0,\infty),$$

т. е. в случае а) лемма доказана. В случае б) аналогично из системы (1′) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{a_0(r,\eta)}{\tilde{r}^2\beta(r_1)}\frac{dx(r,\eta)}{dy}\right)=f_0(r,\eta)\left(\frac{a_0(r,\eta)}{\tilde{r}^2\beta(r_1)}\frac{dx(r,\eta)}{dy}\right),$$

$$f_0(r,\ \eta)=\left[a_0^{-1}(r,\ \eta)\,\tilde r\left\{\left(\sum_1^{m-1} a_{tt}\beta(r_1)+p_0\sum_m^N a_{tt}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{t=1}^N\left(\sum_1^{m-1}\beta(r_1)\frac{\partial a_{ts}}{\partial x_t}x_s+p_0\sum_m^N\frac{\partial a_{ts}}{\partial x_t}x_s\right)\right\}-\frac{1}{\tilde r}-$$

$$\left.-g_1^2(\tilde r,\ \eta_m)\frac{\partial g_1^{-2}(\tilde r,\ \eta_m)}{\partial\tilde r}\right]=O\left(\frac{1}{\tilde r(\ln(\tilde r))^{3/2}}\right).$$

Так как $\frac{\partial}{\partial r}=\sqrt{\beta(r)}(1+\psi(r))\frac{\partial}{\partial\tilde r}$, $\tilde r=r\sqrt{\beta(r)}$, то $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a(r,\ \eta)}{r^2}\times\right.$ $\left.\times\frac{dx(r,\ \eta)}{dy}\right)=f(r,\ \eta)\left(\frac{a(r,\ \eta)}{r^2}\frac{dx(r,\ \eta)}{dy}\right)$, где $f(r,\ \eta)=f_0(r,\ \eta)-$ $-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\beta(r)}{\beta(r_1)}(1+\psi(r))^2\right)\right]\frac{\beta(r_1)}{\beta(r)(1+\psi(r))^2}=O\left(\frac{1}{r(\ln(r))^{3/2}}\right)\in$ $\in L(0,\ \infty)$. Лемма доказана.

Отображение S имеет обратное, определяемое следующим образом в случае а): берем решение x^* системы (1) с начальными условиями $x^*(r(x))=x=(x_1,\ \ldots,\ x_N)$, тогда

$$(S^{-1}x)_i=\begin{cases}\xi_i(x^*(1))\varphi_1(r(x),\ \xi_0(x^*(1))), & 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ \xi_i(x^*(1))\varphi_2(r(x),\ \xi_0(x^*(1))), & m\leqslant i\leqslant N.\end{cases}$$

Аналогично S^{-1} определяется в случае б). Отсюда следует, что S — $\mathbf{C}^2$-диффеоморфизм.

Пусть $Z(r,\ \tilde\xi)=\xi(x(r,\ \tilde\xi))\in S_0^{N-1}$. (Через $x(r,\ \xi)$ в случае б) обозначим $x(r\sqrt{\beta(r)},\ \tilde\xi)=x(\tilde r,\ \tilde\xi)$.) Тогда из определения $x(r,\ \tilde\xi)$ следует, что

$$\frac{\partial Z_i(r,\ \tilde\xi)}{\partial r}=\sum_1^N B_{ij}Z_j(r,\ \tilde\xi),\quad 1\leqslant i\leqslant N,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}Z_0(r,\ \tilde\xi)=B_{00}Z_0(r,\ \tilde\xi),\quad \sum_1^{m-1}Z_i^2=\sum_m^N Z_i^2=1;$$

$$B_{00}=\frac{l_0r}{a(r,\ Z)}\left\{\sum_m^N a_{ij}Z_iZ_j-\sum_1^{m-1}a_{ij}Z_iZ_j+\frac{(r_1^2-l_0^2r_2^2)}{l_0r_2r_1}\sum_1^{m-1}\sum_m^N a_{ij}Z_iZ_j\right\},$$

$$B_{ij}=\frac{r}{a(r,\ Z)}\left\{-\delta_{ij}\left(\sum_{s,\ t=1}^N\mathscr{E}_{is}a_{st}Z_sZ_t\theta_{it}\right)+a_{ij}\theta_{ij}\right\},$$

$$a(r,\ Z)\equiv a(r,\ \eta);\quad \theta_{ij}=1,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant m-1;\quad \theta_{ij}=\frac{l_0r_2}{r_1},\quad 1\leqslant i\leqslant m-1,$$

$$m\leqslant j\leqslant N;\quad \theta_{ij}=l_0,\quad m\leqslant i,\ j\leqslant N;\quad \theta_{ij}=r_1/r_2,\quad m\leqslant i\leqslant N,\ 1\leqslant j\leqslant m-1;$$

$$\mathscr{E}_{is}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m-1,\quad m\leqslant s\leqslant N;\quad \mathscr{E}_{is}=1,\quad 1\leqslant i,\ s\leqslant m-1;\quad m\leqslant i,$$

$$s\leqslant N,\ \mathscr{E}_{is}=\mathscr{E}_{si},\quad r_i=\varphi_i(r,\ Z_0)\ \text{в случае а);}$$

$$B_{00}=p_0r\left\{\sum_m^N a_{ij}Z_iZ_j-\sum_1^{m-1}a_{ij}Z_iZ_j+\frac{((r_1\beta(r_1))^2-p_0^2r_2^2)}{p_0r_2r_1\beta(r_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_1^{m-1}\sum_m^N a_{ij}Z_iZ_j\right\}\Big/a(r,\ Z)\beta(r)(1+\psi(r)),$$

$$B_{ij}=r\left\{-\delta_{ij}\left(\sum_{s,t=1}^N\mathscr{E}_{is}a_{st}Z_sZ_t\theta_{it}\right)+a_{ij}\theta_{ij}\right\}/a(r,\ Z)\beta(r)(1+\psi(r)),$$

$$a(r, Z) \equiv a(r, \eta); \quad \theta_{ij} = \beta(r_1), \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant m-1; \quad \theta_{ij} = p_0 r_2 / r_1,$$
$$1 \leqslant i \leqslant m-1, \quad m \leqslant j \leqslant N;$$
$$\theta_{ij} = p_0, \quad m \leqslant i, \quad j \leqslant N; \quad \theta_{ij} = \beta(r_1) r_1 / r_2, \quad m \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1;$$
$$\mathscr{E}_{is} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1, \quad m \leqslant s \leqslant N;$$

$\mathscr{E}_{is} = 1$, $1 \leqslant i$, $s \leqslant m-1$, $m \leqslant i$, $s \leqslant N$; $\mathscr{E}_{is} = \mathscr{E}_{si}$; $r_i = \tilde{\varphi}_i(r, Z_0)$ в случае б).

Из условия 2) следует, что $B_{ij} = O(r^{-1-\sigma}) \in L(0, \infty)$. Следовательно, существует $\lim\limits_{r \to \infty} Z(r, \tilde{\xi}) = v(\tilde{\xi})$. Покажем, что v — $\mathbf{C}^1$-диффеоморфизм S_0^{N-1} в себя, а если выполнено условие 3) — $\mathbf{C}^2$-диффеоморфизм. Воспользовавшись тем, что

$$\sum_1^{m-1} Z_i \frac{\partial Z_i}{\partial r} = \sum_m^N Z_i \frac{\partial Z_i}{\partial r} = 0, \quad \sum_{1(m)}^{m-1(N)} Z_s \frac{\partial^2 Z_s}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = - \sum_{1(m)}^{m-1(N)} \frac{\partial Z_s}{\partial \eta_i} \frac{\partial Z_s}{\partial \eta_j},$$

получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial \eta_n} \right) = \sum_0^N \left(B_{is} + \sum_0^N \frac{\partial}{\partial Z_s} B_{it} Z_t \right) \frac{\partial Z_s}{\partial \eta_n} = \sum_0^N B_{is}^{\cdot} \frac{\partial Z_s}{\partial \eta_n},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 Z_i}{\partial \eta_j \partial \eta_\alpha} \right) = \sum_0^N \left(B_{is} + \sum_0^N \frac{\partial}{\partial Z_s} B_{it} Z_t \right) \frac{\partial^2 Z_s}{\partial \eta_j \partial \eta_\alpha} +$$

$$+ \sum_0^N \left(\frac{\partial B_{is}}{\partial Z_t} + \frac{\partial B_{it}}{\partial Z_s} + \sum_0^N \frac{\partial^2 B_{in} Z_n}{\partial Z_s \partial Z_t} \right) \frac{\partial Z_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial Z_t}{\partial \eta_\alpha} = \sum_0^N B_{is}^{\cdot} \frac{\partial^2 Z_s}{\partial \eta_j \partial \eta_\alpha} +$$

$$+ \sum_0^N B_{st}^1 \frac{\partial Z_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial Z_t}{\partial \eta_\alpha}, \quad B_{0i} = B_{i0} = 0, \ i \geqslant 1,$$

$$B_{is}^{\cdot} = O(r^{-1-\sigma}) \in L(0, \infty),$$

а $B_{st}^1 = O(r^{-1-\sigma}) \in L(0, \infty)$, если выполнено условие 3). Пусть $\eta^{\cdot} = \eta(\tilde{Z})$ — координаты точки $\tilde{Z} \in S_0^{N-1}$, лежащей в окрестности $v(\tilde{\xi})$, а $\eta = \eta(\tilde{\xi})$. Тогда

$$\frac{dx(r, \eta)}{dy} = \frac{\lambda(\eta^{\cdot}(Z(r, \tilde{\xi}))) \lambda^{-1}(\eta) g_0^2(r, \xi_0)}{g_0^2(r, Z_0(r, \tilde{\xi}))} \frac{d\eta^{\cdot}(Z(r, \tilde{\xi}))}{d\eta}.$$

Так как $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\partial Z(r, \tilde{\xi})}{\partial \eta_\alpha} = \dfrac{\partial v(\tilde{\xi})}{\partial \eta_\alpha}$, то $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{d\eta^{\cdot}(Z(r, \tilde{\xi}))}{d\eta} = \dfrac{d\eta^{\cdot}(v(\tilde{\xi}))}{d\eta}$.

Применяя лемму 1, получим $\dfrac{d\eta^{\cdot}(v(\tilde{\xi}))}{d\eta} \neq 0$. Отсюда уже легко следует наше утверждение.

Определим отображение T следующим образом: $Ty = x(r(y), v^{-1}(\xi(y)))$. Очевидно, что T — $\mathbf{C}^1$-диффеоморфизм, а в случае выполнения условия 3) T — $\mathbf{C}^2$-диффеоморфизм. Заменяя в лемме 1 S на T, получаем: $\dfrac{a(r, \eta)}{r^2} \dfrac{dx(r, \eta)}{dy} = \exp\left\{ -\int\limits_r^\infty f(t, \eta)\, dt \right\}$.

В самом деле, пусть $Z(r, \xi(y)) = \xi(Ty)$. Из определения T и v следует, что $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\partial Z(r, \xi(y))}{\partial \eta_\alpha} = \dfrac{\partial \xi(y)}{\partial \eta_\alpha}$. Пусть $\eta^{\cdot}(r, \eta)$ — координаты точки $Z(r, \xi)$, тогда

$$\frac{dx}{dy} = \lambda(\eta^*(Z(r, \xi))) \lambda^{-1}(\eta, \xi) g_0^{-2}(r, Z_0(r, \xi)) g_0^2(r, \xi_0) \frac{d\eta^*(r, \eta)}{d\eta}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{dx(r,\eta)}{dy}=1$ и наше утверждение получается из леммы 1, если в ней устремить τ к ∞.

Обозначим через $H_0(r)$ гильбертово пространство функций $w(\eta)$, где

$$\eta\in S_1^{N-1}=(\prod_1^{m-3}(0,\pi))\times(0,2\pi)\times\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)\times(\prod_1^{N-m-1}(0,\pi))\times(0,2\pi),$$

$$(\theta=0,\ m\neq N,\ \theta=-\pi/2,\ m=N)$$

со скалярным произведением:

$$(u,w)_{H_0(r)}=\int\limits_{\eta\in S_1^{N-1}}\cdots\int u(\eta)\,\overline{w}(\eta)\,\lambda(\eta)\,\mathcal{G}^2(r,\eta)\,d\eta_N\ldots d\eta_2,$$

$$\mathcal{G}^2(r,\eta)=\frac{dx(r,\eta)}{dy}\quad g_0^{-2}(r,\eta_m)\,g^2(r),\ \lim_{r\to\infty}\mathcal{G}^2(r,\eta)=1,$$

$$g^{-2}(r)=g_0^{-2}(r,0)=\begin{cases}r^{m-2+l_0(N-m+1)}, & \text{а),}\\ r^{m-2}(\ln_k(r))^{p_0(N-m+1)}, & \text{б).}\end{cases}$$

Очевидно, что $H_0(r)=H_0(\infty)\equiv H_0$. Через $\mathcal{P}_0(r)$ обозначим унитарный оператор, отображающий H_0 в $H_0(r)$, $\mathcal{P}_0(r)w=\mathcal{G}^{-1}(r,\eta)w$, $w\in H_0$. Оператор $\mathcal{P}_0(r)$, рассматриваемый в пространстве H_0, сильно непрерывно дифференцируем, кроме того,

$$|\mathcal{P}_0(r)|\leqslant N_1,\quad |\mathcal{P}_0^{-1}(r)|\leqslant N_2,\quad \left|\frac{d\mathcal{P}_0(r)}{dr}\right|\leqslant N_3 f_1(r),\quad r\geqslant a_0,\qquad (2)$$

здесь N_i — положительные постоянные, $f_1(r)\in C(a_0,\infty)$,

$$f_1(r)=\begin{cases}O(r^{-1-\sigma})+O((1-l_0)\,r^{-1-(1-l_0)}), & \text{а),}\\ O\left(\dfrac{1}{r(\ln r)^{3/2}}\right), & \text{б).}\end{cases}$$

Определим теперь унитарный оператор U из $L_2(\bar{R}_+^N)$* в $L_2(H_0(r),(a_0,\infty),dr)$ следующим образом: $(U\varphi(x))(r,\eta)=g^{-1}(r)\varphi(T^{-1}x)$, (r,η) — координаты $y=T^{-1}x$. Будем считать в дальнейшем, что область $T^{-1}\Omega$ в координатах (r,η) можно задать неравенствами:

$$\varphi_i^0(r,\eta_2,\ldots,\eta_{i-1})\leqslant\eta_i\leqslant\varphi_i^1(r,\eta_2,\ldots,\eta_{i-1}),\quad i=2,\ldots,N,\qquad (3)$$

$$S_{1r}^{N-1}=\prod_2^N(\varphi_i^0,\varphi_i^1)\in S_1^{N-1},\quad r\in(\tau_0,\infty),\quad \tau_0\geqslant a_0,\quad \exists\lim_{r\to\infty}\varphi_j^i(r,\eta)=\varphi_{0j}^i(\eta).$$

Аналогично рассматривается случай, когда $T^{-1}\Omega$ представима в виде конечной суммы областей такого вида, без общих точек. Из условия 5) следует, что $|\varphi_m^i(r,\eta_2,\ldots,\eta_{m-1})|\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{d}<\pi/2$ при достаточно большом r.

Через $H(r)$ обозначим гильбертово пространство $P(r)H_0(r)$, где ортопроектор $P(r)$ определяется следующим образом:

$$P(r)\,w(\eta)=\begin{cases}w(\eta), & \eta\in S_{1r}^N,\\ 0, & \eta\notin S_{1r}^N.\end{cases}$$

Очевидно, что $P(r)\mathcal{P}_0(s)=\mathcal{P}_0(s)P(r)$, $P(r)P(s)=P(s)P(r)$, $r,s\in(a_0,\infty)$. Оператор U отображает $L_2(\Omega)$ в $L_2(H(r),(a_0,\infty),dr)$.

---

* $\bar{B}$ — замыкание множества B.

Из определения оператора U и отображения T следует, что:

$$\tilde{l}=UlU^{-1}=-\partial(\rho^{-1}(r)\partial)+2C_0\partial+A(r),$$

$$\partial=\frac{\partial}{\partial r}-\sqrt{-1}\,b(r),\quad b=\left(\sum_1^N b_j\frac{\partial x_j}{\partial r}\right)(r,\eta),$$

$$\rho^{-1}(r)=\frac{a(r,\eta)}{r^2}=\begin{cases}1+O(r^{-\sigma})+O((1-l_0)\,r^{-2(1-l_0)}), & \text{а)},\\ 1+O((\ln r)^{-1}), & \text{б)};\end{cases}$$

$$C(r)=-\frac{1}{2}\frac{d\rho^{-1}}{dr}+C_0(r)=-\frac{a(r,\eta)}{2r^2}f(r,\eta)+$$

$$+\frac{a(r,\eta)}{2r^2}\left(g^2(r)\frac{dg^{-2}(r)}{dr}-g_0^2(r,\eta_m)\frac{\partial g_0^{-2}(r,\eta_m)}{\partial r}\right),$$

$$C(r)\,(C_0(r))=\begin{cases}O(r^{-1-\sigma})+O((1-l_0)\,r^{-1-2(1-l_0)}), & \text{а)},\\ O(r^{-1}(\ln r)^{-2}), & \text{б)};\end{cases}$$

$$A(r)=-\frac{d(r,\eta)}{dx}\left(\sum_2^N\partial_s\left(b_{st}\frac{dx}{d(r,\eta)}\partial_t\right)+Q(r,\eta)+\sum_1^2 Q_{0i}(r,\eta),\right.$$

$$\partial_s=\frac{\partial}{\partial\eta_s}-\sqrt{-1}\,\tilde{b}_s,\ \tilde{b}_s=\sum_1^N b_j\frac{\partial x_j}{\partial\eta_s},\quad 2\leqslant s\leqslant N,$$

$$Q_{01}(r,\eta)=\frac{a(r,\eta)}{r^2}\left[-g^{-1}\frac{d^2g}{dr^2}+\left(g\frac{dg^{-1}}{dr}\right)\left(g_0^2\frac{\partial g_0^{-2}}{\partial r}\right)\right]=O(r^{-2}),$$

$$Q_{02}(r,\eta)=f(r,\eta)\,g\,\frac{dg^{-1}(r)}{dr}=\begin{cases}O(r^{-2-\sigma})+O((1-l_0)\,r^{-2-2(1-l_0)}), & \text{а)},\\ O(r^{-2}(\ln r)^{-3/2}), & \text{б)};\end{cases}$$

$$b_{st}=\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_t}{\partial x_j},\quad 2\leqslant s,\ t\leqslant N,\quad b_{11}=\frac{a(r,\eta)}{r^2},\quad b_{1i}=b_{i1}=0,$$
$$i\geqslant 2.$$

Из систем (1), (1′), воспользовавшись тем, что $\sum_1^N\frac{\partial x_i}{\partial r}\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x_i}=\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial r}=0$, получаем:

$$\text{а)}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\tilde{d}_i}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}\right)=\sum_1^N\left(\delta_{ij}\tilde{d}_i-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial r}\right)r\frac{\partial\eta_s}{\partial x_j}=\sum_1^{m-1}c_{ij}\left(r\frac{\partial\eta_s}{\partial x_j}\right)+$$

$$+\sum_m^N c_{ij}\left(r^{l_0}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_j}\right),\ \tilde{d}_i=1,\ 1\leqslant i\leqslant m-1,\ \tilde{d}_i=l_0,\quad m\leqslant i\leqslant N;\quad c_{ij}=$$

$=\{O(r^{-1-\sigma})+O((1-l_0)\,r^{-1-(1-l_0)})\}\in L(0,\infty)$. Отсюда следует ограниченность $r^{\tilde{d}_i}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}$ и $r^{l_0}b_{st}$.

Аналогично в случае б) получаем ограниченность $r\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}$, $1\leqslant i\leqslant$ $\leqslant m-1$, $(\ln_k(r))^{p_0}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}$, $m\leqslant i\leqslant N$, а следовательно, и $(\ln_k(r))^{p_0}b_{st}$. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial r}b_{st}=-\frac{2}{r}\sum_1^{m-1}a_{ij}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_t}{\partial x_j}-\frac{2h(r)}{r}\sum_m^N a_{ij}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_t}{\partial x_j}+$$

$$+\sum_1^N \tilde{c}_{ij}\frac{\partial\eta_s}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_t}{\partial x_j},$$

$$h(r)=\begin{cases} l_0, & \text{а)},\\ p_0/\beta(r), & \text{б)},\end{cases}\qquad \tilde{c}_{ij}=\begin{cases} O((1-l_0)\,r^{-1-(1-l_0)})+O(r^{-1-\sigma}), & \text{а)},\\ O(1/r(\ln r)^{3/2}), & \text{б)},\end{cases}$$

т. е. $\tilde{c}_{ij}\in L(0,\infty)$.

В [1, 2] в отличие от нашего случая $H(r)=P(r)H_0$, но легко видеть, что если в [1, 2] взять $H(r)=\mathscr{P}_0(r)P(r)H_0$, $W_i(r)=\mathscr{P}_0(r)P(r)W_i$, где оператор $\mathscr{P}_0(r)$ обладает доказанными выше свойствами, то результаты этих работ останутся справедливыми, а определения, условия и доказательства теорем не изменятся, так как в них не будет использоваться оператор $\mathscr{P}_0(r)$, за исключением доказательства леммы 2.4 из [1], где теперь нужно использовать оценки (2).

Из определения ф-производной следует, что $\partial_\Phi w=\partial w/\partial r$ для $w\in C^1(\Omega)$. Поэтому в операторе $\bar{l}$ можно заменить $\partial^i/\partial r^i$ на ∂^i_Φ, $i=1, 2$.

Введем теперь пространство $H_1(r)$, операторы $\mathfrak{M}(r)$, $\mathfrak{N}(r)$, $\mathscr{F}(r)$, $\mathscr{K}(r)$ формы $q(\cdot,\cdot)_r$ и $\theta_i(\cdot,\cdot)_r$ для краевых условий $u|_{\partial\Omega}=0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma_0 u\right)\Big|_{\partial\Omega}=0$, а также покажем, какие ограничения на коэффициенты оператора l и границу области Ω нужно наложить, чтобы эти формы и операторы удовлетворяли условиям теорем из [1]

$$H_1(r)=\oplus\sum_2^N\sum_0^1 L_2((\eta_2,\ldots,\eta_{j-1},\eta_{j+1},\ldots,\eta_N)\in S^{N-2}_{j1r}=$$

$$=(\prod_2^{j-1}(\varphi^0_t,\varphi^1_t))\times(\prod_{j+1}^N(\varphi^0_t,\varphi^1_t)),$$

$$\lambda(\ldots,\varphi^i_j,\ldots)\,\mathscr{G}^2(r,\eta_2,\ldots,\varphi^i_j,\ldots,\eta_N)\,d\eta_N\ldots d\eta_{j-1}d\eta_{j+1}\ldots d\eta_2=$$

$$=\oplus\sum_2^N\sum_0^1 L^i_{jr};$$

$$\mathfrak{M}(r)\,u(\eta)=(u^0_2,u^1_2,\ldots,u^0_j,u^1_j,\ldots),\ u^i_j=u(\eta)|_{\eta_j=\varphi^i_j},$$

$$\mathscr{F}(r)\,w(\eta)=(\ldots,(-1)^{i+1}\left(\frac{a(r,\eta)}{r^2}\Big|_{\eta_j=\varphi^i_j}\right)\frac{\partial\varphi^i_j}{\partial r}\,w^i_j,\ldots),$$

$$w=(\ldots,w^i_j,\ldots)\in H_1(r);\quad (\cdot,\cdot)_{H(r)}\equiv(\cdot,\cdot)_r,\ (\cdot,\cdot)_{H_1(r)}=(\cdot,\cdot)_{1r}.$$

Из определения $H_1(r)$, $\mathscr{F}(r)$, $\mathfrak{M}(r)$, $\rho(r)$ и $C(r)$ получаем:

$$\frac{d}{dr}(\rho^{-1}(r)u,w)_r=(\mathscr{F}(r)\mathfrak{M}(r)u,\mathfrak{M}(r)w)_{1r}-2(C(r)u,w)_r.$$

Прежде чем дать определение $\mathfrak{N}(r)$, найдем нормаль ν к $\partial\Omega$. Граница $\partial\Omega$ нашей области состоит из поверхностей $\mathscr{T}^i_j$, задаваемых уравнениями $\eta_j=\varphi^i_j(r,\eta_2,\ldots,\eta_{j-1})$ или $\bar{r}=(\ldots,x_t(r,\eta),\ldots)=\bar{r}(r,\eta_2,\ldots,\varphi^i_j,\ldots,\eta_N)$, $t=1,\ldots,N$; $i=0,1$; $j=2,\ldots,N$. Внешняя нормаль ν к $\mathscr{T}^i_j$ равна векторному произведению векторов

$$\bar{r}_s=\frac{\partial\bar{r}}{\partial\eta_\alpha}+\frac{\partial\bar{r}}{\partial\eta_j}\frac{\partial\varphi^i_j}{\partial\eta_s}=\bar{l}_s+\bar{l}_j\frac{\partial\varphi^i_j}{\partial\eta_s},\quad s=2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,N.$$

Здесь $\bar{l}_1$ — векторы, направленные по касательным к η_s. Через $\bar{l}^*_s$ обозначим векторы, взаимные $\bar{l}_s$, $\bar{l}^*_s=\operatorname{grad}\eta_s$, $(\bar{l}_t,\bar{l}^*_s)=\delta_{st}$. Следовательно,

$$\nu = (-1)^{i+j}\,\frac{dx}{d(r,\ \eta)}\left\|\begin{matrix} \bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_j & \cdots & \bar{e}_N \\ & & \dfrac{\partial\varphi_j^i}{\partial r} & & \\ E & & \vdots & & 0 \\ & & \dfrac{\partial\varphi_j^i}{\partial\eta_{j-1}} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 0 & & \\ 0 & & \vdots & & E \\ & & 0 & & \end{matrix}\right\|$$

или

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{|\nu|} = \frac{\sum\limits_1^j \mathscr{E}_t^{ij}\,\bar{l}_t}{\sqrt{\sum\limits_1^j \bar{g}^{st}\,\mathscr{E}_s^{ij}\,\mathscr{E}_t^{ij}}} = \frac{\sum\limits_1^j \mathscr{E}_t^{ij}\,\bar{l}_t}{\psi_{ij}^0},$$

$$\mathscr{E}_t^{ij} = \begin{cases} (-1)^i\,\dfrac{\partial\varphi_j^i}{\partial\eta_s}, & 1 \leqslant t \leqslant j-1, \\ (-1)^{i+1}, & t = j; \end{cases}$$

$$\eta_1 \equiv r,\quad \tilde{g}^{st} = (\bar{l}_s,\ \bar{l}_t) = \sum_1^N \frac{\partial\eta_s}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial\eta_t}{\partial x_\alpha}.$$

Из систем (1), (1′), условия 2) и определения отображения T следует, что $\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_s} = \delta_{\alpha s} + O(r^{-\sigma})$. Отсюда легко получить, что $\tilde{g}^{st} = \delta_{st} g^{st} + O(r^{-\sigma}\sqrt{g^{ss}g^{tt}})$, где $g^{ss} = \sum\limits_1^N \left|\dfrac{\partial\eta_s}{\partial y_\alpha}\right|^2 = \dfrac{1}{g_{ss}} = \left(\sum\limits_1^N \left|\dfrac{\partial y_\alpha}{\partial\eta_s}\right|^2\right)^{-1}$.

Аналогично $b_{st} = \tilde{g}^{st} + O(r^{-\sigma}\sqrt{\tilde{g}^{ss}\tilde{g}^{tt}}) = \delta_{st} g^{ss} + O(r^{-\sigma}\sqrt{g^{ss}g^{tt}})$.

Лемма 2. *Условие $\mathscr{F} \gtreqless 0$ эквивалентно неравенству $(\tilde{A}y_x,\ \bar{\nu}_x) \gtreqless 0$, где $\tilde{A} = ((a_{ij}(x)))$, $x \in \partial\Omega$, $y_x = (\ldots, x_i\tilde{d}_i, \ldots)$,*

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{а}), \\ \beta(r_1), & \text{б}), \end{cases} \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1; \quad \tilde{d}_i = \begin{cases} l_0, & \text{а}) \\ p_0, & \text{б}) \end{cases}, \quad m \leqslant i \leqslant N;$$

$\bar{\nu}_x$ — внешняя нармаль к $\partial\Omega$ в точке x, $|\bar{\nu}_x| = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что условие $\mathscr{F} \gtreqless 0$ равносильно $(-1)^{i+1}\dfrac{\partial\varphi_j^i}{\partial r} \gtreqless 0$. Но

$$(\bar{\nu}_x,\ \bar{l}_1) = (-1)^i\,\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial r}\,\frac{1}{\psi_{ij}^0} = \frac{(\tilde{A}y_x,\ \bar{\nu}_x)\,r}{d_0(r)\,a(r,\ \eta)}, \qquad d_0(r) = \begin{cases} 1, & \text{а}), \\ \beta(r)\,(1+\psi(r)), & \text{б}). \end{cases}$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Предположим теперь, что $\sigma_{ij} = \sigma_0(r,\ \eta_2,\ \ldots,\ \varphi_j^i,\ \ldots,\ \eta_N)\,\psi_{ij}^0 + (-1)^i\,\dfrac{\partial\varphi_j^i}{\partial r}\left(g^{-1}\,\dfrac{dg}{dr}\right) \geqslant 0$, $i = 0,\ 1$, $j = 2,\ \ldots,\ N$; это эквивалентно

условию $\sigma_0(x) - \left(g^{-1}\frac{dg}{dr}\right)\frac{(\tilde{A}y_x, \bar{\nu}_x)\, r}{d_0(r)\, a(r, \eta)} \geqslant 0$ для $x \in \partial\Omega$, $r(x) = r$. Тогда $\mathfrak{N}(r)\, w = (\tilde{w}_2^0, \tilde{w}_2^1, \ldots, \tilde{w}_j^i, \ldots)$,

$$\tilde{w}_j^i = \sum_2^N (-1)^i \left(b_{js}\frac{\partial w}{\partial \eta_s}\right)\Bigg|_{\eta_i=\varphi_j^i} + \sum_{k=2}^{j-1}\sum_{s=2}^{N} (-1)^{i+1}\frac{\partial \varphi_j^i}{\partial \eta_k}\left(b_{ks}\frac{\partial w}{\partial \eta_s}\right)\Bigg|_{\eta_j=\varphi_j^i} - \sigma_{ij}\, w_j^i,$$

при этом краевое условие $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_0 u\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0$ для оператора l переходит в условие $\mathcal{F}(r)\mathfrak{M}(r)\partial_\Phi u + \mathfrak{N}(r)\, u = 0$ для l. Если же вместо $\sigma_{ij} \geqslant 0$ выполняется неравенство $|\sigma_0(x)| \leqslant \frac{c}{r}\frac{(\tilde{A}y_x, \bar{\nu}_x)}{d_0(r)}$, c — положительная постоянная, то, положив в определении $\mathfrak{N}(r)$ $\sigma_{ij} = 0$, получим для $\tilde{l}$ граничное условие

$$\mathcal{F}(r)\mathfrak{M}(r)\partial_\Phi u + \mathfrak{N}(r)\, u = \mathcal{F}_0(r)\mathfrak{M}(r)\, u, \tag{4}$$

где $\mathcal{F}_0(r)\, w = (\ldots, \sigma_{ij} w_j^i, \ldots)$, $w \in H_1(r)$, $|(\mathcal{F}_0(r)\, w, w)_{H_1(r)}| \leqslant c(-\mathcal{F}(r)\, w, w)_{H_1(r)}$.

Легко проверяется, что все результаты из [1, 2] для граничного условия $\mathcal{F}(r)\mathfrak{M}(r)\partial_\Phi u + \mathfrak{N}(r)\, u = 0$ остаются справедливыми и в случае условия (4).

В случае условия $u|_{\partial\Omega} = 0$, эквивалентного $\mathfrak{M}(r)\, u = 0$, $\tilde{w}_j^i = (-1)^i \psi_{ij} \times \frac{\partial w}{\partial \eta_j}\Big|_{\eta_j=\varphi_j^i}$, если $\mathfrak{M}(r)\, w = 0$, где

$$\psi_{ij} = \sum_{t,s=2}^{j} (b_{ts})_j^i\, \mathscr{E}_t^{ij}\, \mathscr{E}_s^{ij} = \sum_2^j g^{ss}\, (\mathscr{E}_s^{ij})^2\, (1 + O(r^{-\sigma}));$$

$$\mathscr{K}(r)\, w = \left(\ldots, \frac{(-1)^{i+1}}{\psi_{ij}}\frac{\partial \varphi_j^i}{\partial r}\, w_j^i, \ldots\right), \quad w \in H_1(r).$$

Если $\sigma_{ij} \geqslant 0$, то

$$q(u, w)_r = \sum_{i,j=2}^{N} (b_{ij}\partial_j u, \partial_i w)_{H(r)} + (\sigma\mathfrak{M}(r)\, u, \mathfrak{M}(r)\, w)_{H_1(r)},$$

$$\sigma w = (\ldots, \sigma_{ij} w_j^i, \ldots), \quad w \in H_1(r),$$

в противном случае в определении $q(\cdot, \cdot)_r$ $\sigma = 0$, $\theta_i(u, w)_r = ((Q_i + Q_{0i})\, u, w)_{H(r)}$, $i = 1, 2$. Из определения $q(\cdot, \cdot)_r$ следует, что

$$2\operatorname{Im} q(u, bu)_r + q'(u, u)_r = \sum_1^N \left\{\left(\left(\frac{\partial b_{st}}{\partial r} + \mathscr{G}^{-2}\frac{\partial \mathscr{G}^2}{\partial r}\, b_{st}\right)\partial_t u, \partial_s u\right)_{H(r)} + (\mathcal{F}(r)\, \mathfrak{M}(r)\, \rho(r)\, b_{st}\partial_t u, \mathfrak{M}(r)\, \partial_s u)_{H_1(r)}\right\} + \left(\left(\frac{d\sigma}{dr} + \mathscr{G}_0^{-2}\frac{d\mathscr{G}_0^2\sigma}{dr}\right)\mathfrak{M}(r)\, u, \mathfrak{M}(r)\, u\right)_{H_1(r)} + \sum_{j,t=2}^{N}\sum_{i,s=0}^{1}\left((-1)^{s+1}\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_{jt}^{is}}{\partial r}\right)(\sigma_{ij} u_j^i)_t^s, (u_j^i)_t^s\right)_{L_{jtr}^{is}} - \sum_2^N 2\operatorname{Im}\left(b_{st}\partial_t u, \left(\frac{\partial \tilde{b}_s}{\partial r} - \frac{\partial b}{\partial \eta_s}\right)u\right)_{H(r)};$$

здесь $\tilde{\varphi}_{jt}^{is} = \varphi_t^s(r, \eta_2, \ldots, \varphi_j^i, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_{t-1})$, $(w_j^i)_t^s = u(\eta)|_{\eta_j=\varphi_j^i, \eta_t=\varphi_t^s}$,

L^{is}_{jtr} — гильбертово пространство функций $w(\eta_2, \ldots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_{t-1}, \eta_{t+1}, \ldots, \eta_N)$ со скалярным произведением:

$$(u, w)_{L^{is}_{jtr}} = \int\limits_{\varphi_2^0}^{\varphi_2^1} \cdots \int\limits_{\varphi_N^0}^{\varphi_N^1} u\bar{w}(\lambda\mathcal{G}^2)(r, \eta_2, \ldots, \varphi_j^i, \ldots, \varphi_t^s, \ldots, \eta_N)\, d\eta_N \ldots d\eta_2,$$

$$\mathcal{G}_0^2(r)\, w = (\ldots, (\lambda\mathcal{G}^2)(r, \eta_2, \ldots, \varphi_j^i, \ldots, \eta_N)\, w_j^i, \ldots), \quad w \in H_1(r);$$

$$\mathcal{G}^{-2}\frac{\partial\mathcal{G}^2(r, \eta)}{\partial r} = \rho^{-1}(r)\frac{d\rho(r)}{dr} - 2C(r) =$$

$$= \begin{cases} O(r^{-1-\sigma}) + O((1-l_0)\, r^{-1-2(1-l_0)}), & \text{а)} \\ O(r^{-1}(\ln r)^{-2}), & \text{б).} \end{cases}$$

Из определения $\mathcal{F}(r)$ и леммы 2 следует, что предположения Iд) 4) и IIIб) из [1] эквивалентны условиям:

$$\left|\frac{\partial\varphi_j^1}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_j^0}{\partial r}\right| \leqslant (\varphi_j^1 - \varphi_j^0)(r)\frac{\gamma_0(r)\gamma_2(r)}{r^\alpha}, \quad j = 2, \ldots, N;$$

$$\psi_{ij}(r)\,|\varphi_{0j}^i(\eta) - \varphi_j^i(r, \eta)| \leqslant \frac{N(-1)^{i+1}}{r^t}\frac{\partial\varphi_j^i}{\partial r}, \quad t > 0, \ i = 0, 1,$$

$$j = 2, \ldots, N;$$

$$\psi_{ij} = \sum_{t,s=2}^{j} (b_{ts})_j^i\, \mathscr{E}_t^{ij}\, \mathscr{E}_s^{ij}, \quad r > R_0,$$

соответственно. Последнее условие можно заменить следующим неравенством для $\forall x \in \mathcal{T}_j^i : \rho_0(x, \mathcal{T}_{0j}^i) \leqslant N_1(\tilde{A}y_x, \bar{\nabla}_x)\, b_0(r)$, где $b_0(r) = \begin{cases} r^{-(1-l_0)-t}, & \text{а)}, \\ r^{-1-t}, & \text{б)}; \end{cases}$ $\mathcal{T}_{0j}^i$ — часть границы области Ω^∞, задаваемая равенством $\eta_j = \varphi_{0j}^i(\eta)$, Ω^∞ — область, определяемая неравенствами:

$$\varphi_{0j}^0(\eta) = \lim_{r\to\infty}\varphi_j^0(r, \eta) \leqslant \eta_j \leqslant \lim_{r\to\infty}\varphi_j^1(r, \eta) = \varphi_{0j}^1(\eta), \quad r \geqslant \tau_0,$$

$j = 2, \ldots, N$, $\rho_0(x, \mathcal{T}_{0j}^i)$ — расстояние от x до $\mathcal{T}_{0j}^i$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отображение T в случае $m = N+1$, $\Omega = R^N$ было впервые построено В. Егером [3].

Следствие 1. *Теорема 1 остается справедливой для значительно более широкого класса областей, удовлетворяющих следующему условию.*

5′) *Существуют* m_i, $1 \leqslant i \leqslant n < N$, $2 \leqslant m_1 < \ldots < m_n < m_{n+1} = N+1$, *такие, что при достаточно большом* R

$$\Omega_1(R) = \Omega \cap \{(x_1, \ldots, x_N) \in R^N \mid \sum_1^{m_1-1} x_i^2 \geqslant R^2\} \subseteq$$

$$\subseteq \{(x_1, \ldots, x_N) \in R^N \mid \sum_{m_i}^{m_{i+1}-1} x_i^2 \leqslant \varphi_i(\sum_1^{m_i-1} x_i^2), \ i = 1, \ldots, n\},$$

где $\varphi_i(\cdot)$ *обладает следующими свойствами:*

а) $\varphi_i(r) \in C^4(c_0, \infty)$, $c_0 \geqslant 0$; *б)* $\dfrac{d\varphi_i}{dr} = \dfrac{a_i\varphi_i(r)}{\beta_0(r)\, r}$, $\dfrac{d\beta_0(r)}{dr} = \dfrac{2\psi_0(r)\beta_0(r)}{r}$, $\dfrac{d\psi_i}{dr} = -\dfrac{2\psi_{i+1}}{r}$, $i = 0, 1$; a_i — *положительные*

постоянные; в) $\beta_0(r)\in\mathbf{C}^3(c_0, \infty)$, $\psi_i(r)\in\mathbf{C}^{2-i}(c_0, \infty)$, $i=0, 1, 2$; $\beta_0(r)>0$, $\psi_i(r)>0$, $r>c_0$, $i=0, 1, 2$; $\beta_0(c_0)=\varphi_j(c_0)=0$, $j=1, \ldots, n$; $\psi_i(r)=O\left(\frac{1}{(\ln r)^{i+1}}\right)$, $r\gg R_0>c_0$, $i=0, 1, 2$; *а в условиях* 2), 3) $h_{ij}\geqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant m_1-1$, $m_1\leqslant j\leqslant N$; $h_{ij}=h_{ji}$; *например,* $\varphi_i(r)=r^{l_i}$, $0<l_i<1$, *или* $\varphi_i(r)=(\ln_k(r))^{2p_i}$, $p_i>0$.

Следствие 1 доказывается аналогично теореме 1.

Литература

1. Мишнаевский П. А.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, № 1, с. 152—189.
2. Мишнаевский П. А.— Успехи матем. наук, 1978, т. 33, № 1, с. 223—224.
3. Jager W. Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen Koeffizienten in Außengebieten.— Math. Zeitshr., 1967, vol. 102, N 1, p. 62—88.

Центральный научно-исследовательский институт связи, г. Москва

Поступила в редакцию 3 мая 1979 г.

УДК 517.95

А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$-DRu(x)=f(x) \quad (x\in Q) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(x)=0 \quad (x\in R^n\setminus Q). \tag{2}$$

Здесь $Q\subset R^n$ — открытое, связное, ограниченное множество, а граница ∂Q состоит из конечного числа поверхностей $\Gamma_k\in C^1$, $k=1, \ldots, k_0$; $f(x)\in L_2(Q)$ — комплекснозначная функция; $D=\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$ — эллиптический оператор с постоянными вещественными коэффициентами ($\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j>0$ для любого $\xi\neq 0$ из R^n); $R: L_2(R^n)\to L_2(R^n)$ — разностный оператор; $Ru(x)=\sum\limits_{h\in\mathscr{M}} a_h[u(x+h)+u(x-h)]$, где $\mathscr{M}\subset R^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами; a_h — вещественные числа.

Определим операторы I_Q, P_Q, R_Q. $I_Q: L_2(Q)\to L_2(R^n)$; $I_Qu(x)=u(x)$ при $x\in Q$, $I_Qu(x)=0$ при $x\in R^n\setminus Q$ для любой $u\in L_2(Q)$; $P_Q: L_2(R^n)\to L_2(Q)$; $P_Qu(x)=u(x)$ при $x\in Q$ для любой $u\in L_2(R^n)$; $R_Q: L_2(Q)\to L_2(Q)$; $R_Q=P_QRI_Q$.

Рассмотрим дифференциально-разностный оператор $A=-DR_Q$ с областью определения $D(A)=\dot{C}^\infty(Q)$. При этом будем предполагать, что оператор $R_Q\geqslant 0$ вырожденный, т. е. $0\in\sigma(R_Q)\subset[0, \infty)$. Очевидно, оператор A в пространстве $L_2(Q)$ симметрический.

Введем в $\dot{C}^\infty(Q)$ скалярное произведение $(u, v)_A=((A+E)u, v)_{L_2(Q)}$. Обозначим через H_A множество элементов $u\in L_2(Q)$, для которых найдется последовательность $\{u_n\}\subset\dot{C}^\infty(Q)$ такая, что $\lim\limits_{h\to\infty}\|u_n-u\|_{L_2(Q)}=0$, $\lim\limits_{n, m\to\infty}\|u_n-u_m\|_A=0$.