А. Н. Лезнов, Обобщенные потенциалы Баргмана и солитонные решения уравнений периодической цепочки Тода серии A_k, *Функц. анализ и его прил.*, 1984, том 18, выпуск 4, 83–85

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 4, 83—85.

УДК 519.4

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАННА И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДА СЕРИИ A_k

А. Н. Лезнов

1. В дальнейшем нам потребуется следующая теорема Фробениуса [1]: обыкновенное дифференциальное уравнение $(k+1)$-го порядка

$$\overset{[\cdot k+1]}{\Psi} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \overset{[\cdot i]}{\Psi} = 0 \tag{1}$$

представимо в виде

$$(V_k^2 V_{k-1}^{-1}(V_k^{-1}V_{k-1}^2 V_{k-2}^{-1}(\ldots .(V_1^2 V_2^{-1}\underbrace{(V_1^{-1}\Psi)^{\cdot})^{\cdot}\ldots)^{\cdot}}_{k+1} = 0, \tag{2}$$

где главные миноры матрицы определителя Вронского $V_\beta^\alpha = \overset{[\cdot\alpha-1]}{\Psi_\beta}$, Ψ_β — набор фундаментальных решений (1) $(1 \leqslant \alpha;\ \beta \leqslant k+1)$.

2. Задача об обобщенных потенциалах Баргманна [2—4] решается теоремой: *Решение обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\overset{[\cdot k+1]}{\Psi} + \sum_{i=0}^{k-1} u_i \overset{[\cdot i]}{\Psi} = \lambda^{k+1}\Psi \tag{3}$$

имеет аналитическую зависимость от параметра λ *вида* $e^{\lambda z}\prod_{c=1}^{n}(a_c - \lambda)$, *если* a_c *определяется из условия обращения в* 0 *функции*

$$\widetilde{\Psi} = \sum_{\alpha=1}^{k+1} c(\lambda_\alpha)\exp\lambda_\alpha z \prod_{c=1}^{n}(a_c - \lambda_\alpha) \equiv \sum c_\alpha \Psi_\alpha, \qquad \lambda_\alpha^{k+1} = \lambda^{k+1} \tag{4}$$

в n *различных точках* λ^{k+1} *плоскости* λ_b^{k+1} $(1 \leqslant b \leqslant n)$. *При этом коэффициенты* u_i *— обобщенные потенциалы Баргманна — выражаются через симметричные комбинации* a_c *и их производных посредством величин* B_s^i, *определяемых из выражения для производной произвольного порядка от функции* Ψ

$$\overset{[\cdot s]}{\Psi} = \left(\lambda^s + \sum_{i=0}^{s-2} B_s^i \lambda^i + \sum_{c=1}^{n}\frac{A_c^s}{a_c - \lambda}\right)\Psi \tag{5}$$

следующими соотношениями:

$$u_i = -\bar{B}_{k+1}^i \equiv -\left(B_{k+1}^i - \sum_{l=0}^{i-2} B_{k+1}^l \bar{B}_c^i\right), \qquad B_j^i = 0,\ \ j < i+2. \tag{6}$$

Уравнение (3) представимо в виде

$$(e^{2\rho_k - \rho_{k-1}}(e^{-\rho_k + 2\rho_{k-1} - \rho_{k-2}}(\ldots(e^{2\rho_1 - \rho_2}\underbrace{(e^{-\rho_1}\Psi)^{\cdot})^{\cdot}\ldots)^{\cdot})^{\cdot})^{\cdot}}_{k+1\ \text{раз}} = \lambda^{k+1}e^{\rho_k}\Psi, \tag{7}$$

$e^{\rho_s} = \prod_{c=1}^{n} a_c^s \times J_{s-1}^0$, J_{s-1}^0 $(J_0^0 \equiv 1)$ — главные миноры матрицы «сохраняющихся интегралов» $J_{ij} = \delta_{ij} + B_i^j + \sum_{c=1}^{n}\frac{A_c^i \times a_c^{k-j}}{a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k)$ при нулевом значении параметра $\lambda^{k+1} = 0$.

Подставляя (5) в уравнение (3) и приравнивая члены при различных степенях λ, приходим к выражениям (6) для потенциалов Баргманна. Зануляя вычеты при $(a_c - \lambda)^{-1}$, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции a_c

$$\bar{A}_c^{k+1} \equiv A_c^{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{B}_{k+1}^i A_c^i = A_c^{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} B_{k+1}^i \bar{A}_c^i = 0. \tag{8}$$

Покажем, что a_c, определяемые условиями теоремы, уравнениям (8) удовлетворяют. С этой целью рассмотрим вронскиниан из функций Ψ_β, определяемых (4). Имеем в очевидных обозначениях

$$\det(V) = (\Psi\dot{\Psi}\ldots\overset{[\cdot k]}{\Psi}) = \prod_{c=1}^{n} (a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}) \times \left(1, \lambda + \sum_{c=1}^{n} \frac{A_c^1}{a_c - \lambda}, \ldots, \lambda^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-2} B_k^i \lambda^i + \right.$$
$$\left. + \sum_{c=0}^{k-2} \frac{A_c^k}{a_c - \lambda}\right) = \prod_{c=1}^{n} (a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}) W(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}) \det_k J, \tag{9}$$

W — определитель Вандермонда. Вычисление определителя (9) проведено стандартной процедурой: вычитанием первого столбца из остальных с вынесением множителя $\prod\limits_{\alpha=1} (\lambda_2 - \lambda_1)$ и т. д. Из (9) вытекает, что с точностью до W, $\det_k V$ — полином порядка n аргумента λ^{k+1}, зануляющийся в силу линейной зависимости по условиям теоремы в n точках λ_b^{k+1}, т. е. $\det_k (V) = W \times \prod\limits_{b=1}^{n} (\lambda_b^{k+1} - \lambda^{k+1})$. Следовательно $(\Psi, \dot{\Psi}, \ldots, \overset{[\cdot k-1]}{\Psi}, \overset{[\cdot k+1]}{\Psi}) = 0$. Раскрывая последний детерминант так же, как и (9), убеждаемся, что уравнения (8) выполняются.

Для доказательства (7) удобно воспользоваться тем обстоятельством, что левая часть (3) вообще от параметра λ не зависит и вычислить ее исходя из полной системы решений (4) при нулевом значении λ. Обращаясь к теореме п. 1, имеем последовательно

$$V_1 = \Psi_1|_{\lambda=0} = \prod_{c=1}^{n} a_c, \quad \Psi_2|_{\lambda=0} = \Psi_1|_{\lambda=0} \widetilde{\Psi}_2 = \left.\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right|_{\lambda_2, \lambda_1 \to 0};$$

$$V_2 = \lim_{\lambda \to 0} \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \dfrac{\psi_1 - \psi_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \dot{\psi}_1 & \dfrac{\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} (\Psi\dot{\Psi}) = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \prod_{c=1}^{n} (a_c - \lambda_1)(a_c - \lambda_2) \times$$
$$\times \left(1, \lambda + \sum \frac{A_c^1}{a_c - \lambda}\right) = \lim_{\lambda \to 0} \prod_{c=1}^{n} (a_c - \lambda_1)(a_c - \lambda_2) \times \left(1 + \sum_{c=1}^{n} \frac{A_c^1}{(a_c - \lambda_1)(a_c - \lambda_2)}\right) =$$
$$= \prod_{c=1}^{n} a_c^2 \times J_1^0.$$

Продолжая процесс редукции, находим $V_s = \lim\limits_{\lambda \to 0} W_s^{-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \times (\Psi\dot{\Psi}\ldots\overset{[\cdot s-1]}{\Psi}) = \prod\limits_{c=1}^{n} a_c^s \times J_{s-1}^0$, заканчивая таким образом доказательство теоремы.

3. Форма (7) уравнения (3), имеющего своими коэффициентами обобщенные потенциалы Баргманна, теснейшим образом связана с задачей построения решений солитонного типа уравнений периодической цепочки Тода серии A_k [5]. При традиционном подходе [6] уравнения цепочки Тода возникают как условие совместности линейной системы (первого порядка)

$$\dot{g} = ug, \quad g' = vg, \tag{10}$$

где g — элемент полупростой группы, u, v — элементы ее алгебры, определенным образом зависящие от неизвестных функций, удовлетворяющих системе уравнений периодической цепочки Тода [6]. (10) может быть переписано как условие совместности системы уравнений высших порядков на одну единственную скалярную функцию (элементы «первой строки» матрицы g) — систему уравнений скалярной $L - A$ пары. При этом два основных (спектральных) уравнения скалярной $L - A$ пары совпадают с (3) в форме (7), что и позволяет в конечном счете получить решение обсуждаемой задачи, причем ответ выражается формулами настоящей работы $\exp \rho_s = \prod_{c=1}^{n} a_c^s \times J_{s-1}^0$ с заменой функций Ψ_α (см. 4) на $\Psi_\alpha \to \exp(\lambda_\alpha z + \lambda_\alpha^{-1}\bar{z}) \times \prod_{c=1}^{n} (a_c - \lambda_\alpha)$.

Автор благодарен Б. А. Арбузову, А. А. Кириллову, Ю. И. Манину, М. А. Мествиришвили, М. В. Савельеву, О. А. Хрусталеву за обсуждение результатов работы.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 2. *Bargmann V.*— Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 488—521. 3. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.*— УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55—136. 4. *Matveev V. B.*— Lett. Math. Phys., 1979, v. 3, p. 213—216, 217—222, 503—512. 5. *Лезнов А. Н.* Препринт ИФВЭ. 83—170, Серпухов: ИФВЭ, 1983. 6. *Mikhailov A. V.* — Physica, 1981, 3D, № 1— 2, p. 73—117.

Институт физики высоких энергий

Поступило в редакцию 19 сентября 1983 г.