

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. В. Шурман, В. С. Серов, О существовании определенных эллиптических решений уравнения Шредингера с кубической нелинейностью,
ТМФ, 2024, том 219, номер 1, 32–43

<https://www.mathnet.ru/tmf10635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

24 июня 2025 г., 15:53:32



© 2024 г.

Х. В. Шурман*, В. С. Серов†

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассматриваются решения уравнения Шредингера с кубической нелинейностью. Для определенного класса решений вида $\Psi(t, z) = (f(t, z) + id(z))e^{i\phi(z)}$ с $f, \phi, d \in \mathbb{R}$ доказано, что в общем случае $f_z \neq 0, f_t \neq 0, d_z \neq 0$ таких решений не существует. В трех частных случаях (когда $f_z \neq 0, f_t \neq 0, d_z = 0$; когда $f_t = 0$ и когда $f_z = 0, f_t \neq 0$) найдено двухпараметрическое семейство решений, для которых выписаны условия, задающие частные вещественные ограниченные и неограниченные решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, эллиптические функции Вейерштрасса, бегущая волна.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10635>

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, для неинтегрируемого комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау (см., например, [1])

$$i\Psi_z(t, z) + \Psi_{tt}(t, z) + a\Psi(t, z)|\Psi(t, z)|^2 - i\lambda\Psi(t, z) = 0, \quad \Psi \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где a – комплексная константа и λ – вещественная константа, отличная от нуля, не существует эллиптических решений (типа бегущей волны) [2], [3]. Когда $\lambda = 0$, уравнение (1) интегрируемо и совпадает с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью

$$i\Psi_z(t, z) + \Psi_{tt}(t, z) + a\Psi(t, z)|\Psi(t, z)|^2 = 0, \quad (2)$$

*Department of Mathematics, Computer Science, Physics, University of Osnabrück, Osnabrück, Germany. E-mail: hwschuer@uos.de

†Research Unit of Mathematical Sciences, University of Oulu, Oulu, Finland.
E-mail: vsеров@cc.oulu.fi, valserov@gmail.com

где, если пользоваться терминологией волоконной оптики, z – расстояние вдоль волокна, а t – (запаздывающее) время. Помимо общих решений, полученных прямыми методами (например, методом обратной задачи рассеяния или преобразования Дарбу), интересны и могут оказаться достаточными частные решения НУШ с кубической нелинейностью, подходящие для конкретных физических приложений. В этом контексте были предложены методы поиска эллиптических решений уравнения (1) [4]. Для НУШ с кубической нелинейностью в частных случаях существуют эллиптические решения типа бегущей волны (см., например, работу [5] и ссылки в ней)

$$\Psi(t, x) = f(z)e^{i(\phi(z) - \lambda t)}, \quad z = x - ct. \quad (3)$$

Таким образом, в связи с отсутствием эллиптических решений уравнения (1) возникает очевидный вопрос: существуют ли эллиптические решения уравнения (2), более общие, чем заданные формулой (3)? В частности, если в (3) заменить $f(z)e^{-i\lambda t}$ на $f(t, z) + id(z)$ (не предполагая, что ищутся решения типа бегущей волны), мы приходим к возможному анзацу [6], [7]

$$\Psi(t, z) = (f(t, z) + id(z))e^{i\phi(z)}, \quad f, \phi, d \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

В настоящей статье мы рассматриваем вопрос о том, подходит ли анзац (4) для получения эллиптических решений НУШ (2) с кубической нелинейностью.

Если подставить анзац (4) в (2), то, выделив мнимую и действительную части, получим систему

$$f_z(t, z) = d(z)(\phi_z(z) - a(d^2(z) + f^2(t, z))), \quad (5a)$$

$$f_{tt}(t, z) = d_z(z) + (\phi_z(z) - ad^2(z))f(t, z) - af^3(t, z). \quad (5b)$$

Следует предположить, что эти уравнения с необходимостью справедливы, иначе исследование их совместности не имеет смысла.

Для доказательства несовместности уравнений (5a), (5b) в следующем разделе 2 мы находим решения $f(t, z)$, $d(z)$, $\phi(z)$, применив теорему Фробениуса. Используя эти решения, в разделе 3 мы представляем численный контрпример, в котором уравнение (5a) (переписанное ниже как уравнение (14a)) в общем случае не выполняется. В разделе 4 мы исследуем частные случаи и для них получаем решения системы (5). Заключительный раздел 5 посвящен выводам и замечаниям.

2. РЕШЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ $f_z \neq 0$, $f_t \neq 0$, $d_z \neq 0$

Далее мы частично следуем идеям работы [7]. Уравнение (5b) допускает первый интеграл

$$(f_t(t, z))^2 = -\frac{a}{2}f^4(t, z) - (ad^2(z) - \phi_z(z))f^2(t, z) + 2d_z(z)f(t, z) + 2b(z), \quad (6)$$

где $b(z)$ – не зависящая от t “константа” интегрирования. Согласно теореме Фробениуса система уравнений (5a), (6) имеет (локальное) единственное решение $f(t, z)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие интегрируемости $f_{zt} = f_{tz}$. Оно дает полином второй степени от $f(t, z)$, и условие обращения в нуль его коэффициентов приводит к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$4d(z)d_z(z) + \phi_{zz}(z) = 0, \quad (7a)$$

$$b_z(z) + d(z)d_z(z)(\phi_z(z) - ad^2(z)) = 0, \quad (7b)$$

$$d(z)(4ab(z) + (\phi_z(z) - ad^2(z))^2) + d_{zz}(z) = 0. \quad (7b)$$

Уравнения (7а)–(7в) успешно интегрируются, и мы получаем

$$\phi_z(z) = -2ad^2(z) + c_1, \quad (8а)$$

$$b(z) = \frac{1}{4}(2c_2 - 2c_1d^2(z) + 3ad^4(z)), \quad (8б)$$

$$(c_1^2 + 2ac_2)d^2(z) - 4ac_1d^4(z) + 4a^2d^6(z) + d_z^2(z) = c_3 \quad (8в)$$

(где c_1, c_2, c_3 – константы интегрирования). Здесь мы использовали (8а), чтобы получить (8б), и (8б), чтобы получить (8в). Положив $h(z) = d^2(z)$, можно переписать (8в) как

$$(h_z(z))^2 = \alpha_1 h^4(z) + 4\beta_1 h^3(z) + 6\gamma_1 h^2(z) + 4\delta_1 h(z) + \epsilon_1 =: R_1(h), \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = -16a^2, \quad \beta_1 = 4ac_1, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{3}(2c_1^2 + 8ac_2), \quad \delta_1 = c_3, \quad \epsilon_1 = 0.$$

С использованием (8а), (8б) уравнение (6) принимает вид

$$(f_t(t, z))^2 = \alpha_2 f^4(t, z) + 4\beta_2 f^3(t, z) + 6\gamma_2 f^2(t, z) + 4\delta_2 f(t, z) + \epsilon_2 =: R_2(f, z), \quad (10)$$

где

$$\alpha_2 = -\frac{a}{2}, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{6}(c_1 - 3ah(z)),$$

$$\delta_2 = \frac{h_z(z)}{4\sqrt{h(z)}}, \quad \epsilon_2 = 2c_2 + \frac{3}{2}ah^2(z) - c_1h(z).$$

На этом этапе, в отличие от работ [6], [7], мы выбираем известный метод поиска решений уравнений (9) и (10), основанный на формуле Вейерштрасса [8]: решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$(y_x(x))^2 = \alpha y^4(x) + 4\beta y^3(x) + 6\gamma y^2(x) + 4\delta y(x) + \epsilon =: R(y)$$

имеет вид (штрихом обозначена производная по y)

$$y(x) = y_0 + \frac{\frac{1}{2}R'(y_0)(\wp(x; g_2, g_3) - \frac{1}{24}R''(y_0)) \pm \wp'(x; g_2, g_3)\sqrt{R(y_0)} + \frac{1}{24}R(y_0)R'''(y_0)}{2(\wp(x; g_2, g_3) - \frac{1}{24}R''(y_0))^2 - \frac{1}{48}R(y_0)R''''(y_0)}, \quad (11)$$

где y_0 – константа интегрирования¹⁾ и g_2, g_3 – инварианты функции $R(y)$ [9]. Применяя формулу (11) к уравнениям (9) и (10), получаем эллиптическое решение

$$h(z) = \frac{1}{(2\wp(z) - \gamma_1 - 2\beta_1 h_0 - \alpha_1 h_0^2)^2 - \frac{\alpha_1}{2}R_1(h_0)} \times \\ \times \left(4\wp(z)(h_0\wp(z) + \beta_1 h_0^2 + 2\gamma_1 h_0 + \delta_1) + 2\wp_z(z)\sqrt{R_1(h_0)} + \right. \\ \left. + h_0^2(2\alpha_1\delta_1 - 2\beta_1\gamma_1) + h_0(4\beta_1\delta_1 - 5\gamma_1^2) - 2\gamma_1\delta_1 \right), \quad (12)$$

¹⁾Поскольку уравнение (11) влечет $y(0) = y_0$, выполнено равенство $R(y_0) = 0$; однако (11) остается решением при любой константе y_0 , а не обязательно тогда, когда эта константа есть решение уравнения $R(y) = 0$.

где $\wp(z) = \wp(z; g_{2z}, g_{3z})$ – эллиптическая функция Вейерштрасса и g_{2z}, g_{3z} – инварианты уравнения для $R_1(h)$,

$$g_{2z} = 3\gamma_1^2 - 4\beta_1\gamma_1, \quad g_{3z} = -\gamma_1^3 + 2\beta_1\gamma_1\delta_1 - \alpha_1\delta_1^2,$$

а также двоякопериодическое решение $f(t, z)$, эллиптическое по t , но неэллиптическое по z ,

$$f(t, z; f_0(z)) = \frac{1}{(2\wp(t) - \gamma_2 - \alpha_2 f_0^2(z))^2 - \alpha_2 R_2(f_0(z), z)} \times \\ \times \left(-2\gamma_2\delta_2 - (5\gamma_2^2 - \alpha_2\epsilon_2)f_0(z) + 2\alpha_2\delta_2 f_0^2(z) + \right. \\ \left. + 4\wp(t)(\delta_2 + 2\gamma_2 f_0(z) + \wp(t)f_0(z)) + 2\wp_t(t)\sqrt{R_2(f_0(z), z)} \right), \quad (13)$$

где $\wp(t) = \wp(t; g_{2t}, g_{3t})$ – эллиптическая функция Вейерштрасса и g_{2t}, g_{3t} – инварианты уравнения для $R_2(f, z)$,

$$g_{2t} = \frac{c_1^2}{12} - ac_2, \quad g_{3t} = \frac{ac_3}{8} - \frac{c_1(c_1^2 + 36ac_2^2)}{216},$$

а $f_0(z)$ обозначает (не зависящую от t) “константу” интегрирования. Примечательно, что коэффициенты в (10) зависят от $h(z)$, при этом g_{2t} и g_{3t} от z не зависят.

С учетом уравнений (8а)–(8в) систему уравнений (5а), (6) можно записать как

$$f_z(t, z; f_0(z)) = \sqrt{h(z)}(c_1 - 3ah(z) + af^2(t, z; f_0(z))), \quad (14а)$$

$$(f_t(t, z))^2 = R_2(f, z). \quad (14б)$$

Явный вид функции $\phi(z)$, получающийся из уравнений (8а) и (12) путем интегрирования, нам в дальнейшем не понадобится.

3. НЕСОВМЕСТИМОСТЬ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (14а), (14б) В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Проблема существования эллиптических решений НУШ с кубической нелинейностью сводится к проблеме разрешимости системы (14а), (14б). Напомним, что уравнение (13) необходимо для существования решения уравнения (2) вида (4). Если $h(z)$ задана формулой (12), то решение системы (14а), (14б) задается функцией $f(t, z; f_0(z))$ при условии, что оба уравнения (14а) и (14б) выполняются и совместны. Подставляя f в уравнение (14б), напрямую получаем, что (14б) удовлетворяется. Если предположить, что уравнение (14а) при этом также верно, то при $h(z)$, заданной формулой (12), система (14а), (14б) совместна. Следовательно (в общем случае), если функция (13) удовлетворяет уравнению (14а), анзац (4) является корректным. Подстановка $f(t, z; f_0(z))$ в (14а) приводит к длинному выражению для $f_z(t, z; f_0(z))$ через $\wp(z; g_{2h}, g_{3h})$, $\wp(t; g_{2t}, g_{3t})$ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, поэтому проверить его очень сложно (даже с использованием систем компьютерной алгебры). Вместо этого мы представляем контрпример.

Запишем уравнение (14а) как

$$\Delta(t, z, f_0(z)) := f_z(t, z; f_0(z)) - \sqrt{h(z)}(c_1 - 3ah(z) - af^2(t, z; f_0(z))) = 0$$

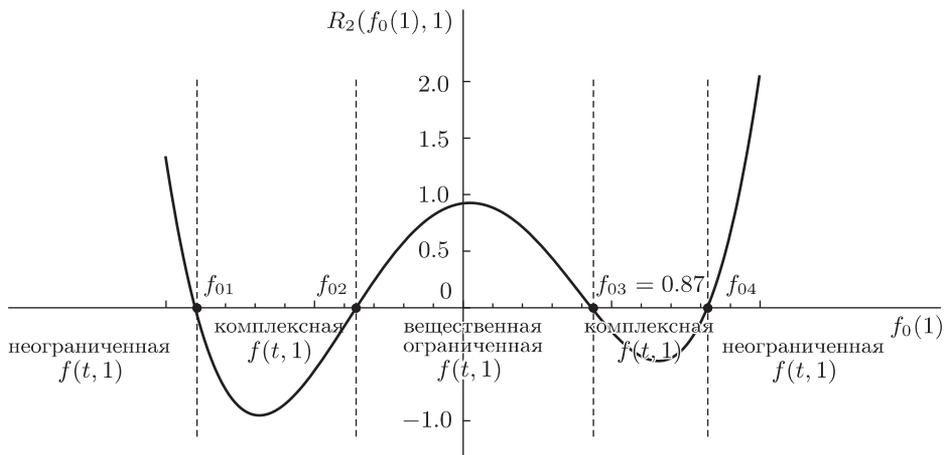


Рис. 1. Фазовая диаграмма для уравнения (10) при $z = 1$, параметры заданы как $a = -1$, $c_1 = -2$, $c_2 = 0.4$, $c_3 = 0.13$.

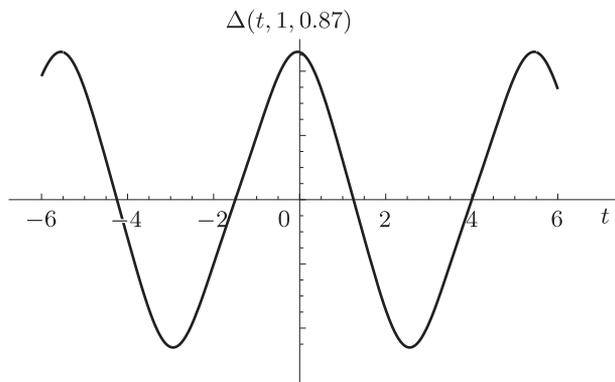


Рис. 2. Численная проверка уравнения (14a) ($\Delta(t, 1, 0.87) \neq 0$) при $z = 1$ и тех же параметрах, что на рис. 1 (см. текст).

и решим его численно с параметрами $a = -1$, $c_1 = -2$, $c_2 = 0.4$, $c_3 = 0.13$. В силу (13) функция f через коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \epsilon_2$ зависит от z и от $f_0(z) = f(0, z)$. Изучая зависимость Δ от t , мы сначала выберем $h_0 = h(0) = 0$, что допустимо при указанных выше значениях параметров. Затем положим $z = 1$, так что $f_0(1)$ можно выбрать как решение уравнения $R_2(f_0(1), 1) = 0$ в соответствии с (10). Обозначим корни этого уравнения как f_{0i} , $i = 1, 2, 3, 4$. Рассматривая зависимость $R_2(f_0(1), 1)$ от $f_0(1)$ (см. рис. 1) и вычисляя $f(t, 1, f_{0i})$ для $i = 1, 2, 3, 4$, получаем, что только f_{02} и f_{03} соответствуют вещественной и ограниченной функции f . Далее, выбрав $f_{03} = 0.87$, мы проверили уравнение (14a), т.е. уравнение $\Delta(t, z, 0.87) = 0$ (мы использовали систему компьютерной алгебры Mathematica и подтвердили свои результаты с помощью Maple). Результат показан на рис. 2. Мы видим, что анзац (4) неприменим для решения НУШ (2) с кубической нелинейностью в общем случае $f_z \neq 0$, $f_t \neq 0$, $d_z \neq 0$.

4. РЕШЕНИЯ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Несовместность системы (14а), (14б) в общем случае указывает на то, что условие $f_z \neq 0$, $f_t \neq 0$, $d_z \neq 0$ является слишком ограничительным для существования решения $\Psi(t, z)$. Поэтому целесообразно изменить приведенное выше требование, чтобы проверить, существуют ли решения, подчиняющиеся другим условиям.

Сначала рассмотрим случай $f_z \neq 0$, $f_t \neq 0$, $d_z = 0$. При $d(z) = \text{const} =: k$ система (7а)–(7в) принимает вид

$$\phi_z(z) = c_1, \quad (15а)$$

$$b(z) = c_2, \quad (15б)$$

$$k(a^2 k^4 - 2ac_1 k^2 + c_1^2 + 4ac_2) = 0. \quad (15в)$$

Введем функцию $g(t, z) = f^2(t, z)$, тогда уравнения (5а), (6) можно переписать как

$$(g_z(t, z))^2 = 4k^2 g(t, z)(c_1 - ak^2 - ag(t, z))^2, \quad (16а)$$

$$(g_t(t, z))^2 = 2g(t, z)(4c_2 + 2(c_1 - ak^2)g(t, z) - ag^2(t, z)). \quad (16б)$$

В силу формулы (11) решение уравнения (16б) задается формулой

$$\begin{aligned} g(t, z) = g_0(z) + \frac{3}{(6\wp(t) + 3ag_0(z) - 2(c_1 - ak^2))^2} \times \\ \times \left(6\wp(t)(-3ag_0^2(z) + 4(c_1 - ak^2)g_0(z) + 4c_2) + \right. \\ \left. + 6\wp(t)\sqrt{-2ag_0^3(z) + 4(c_1 - ak^2)g_0^2(z) + 8c_2g_0(z) +} \right. \\ \left. - 3a^2g_0^3(z) + 6a(c_1 - ak^2)g_0^2(z) + \right. \\ \left. + (-12ac_2 - 8(c_1 - ak^2)^2)g_0(z) + 8c_2(ak^2 - c_1) \right), \quad (17) \end{aligned}$$

где $\wp(t) = \wp(t; g_{2t}, g_{3t})$ и инвариантами уравнения (16б) являются

$$g_{2t} = \frac{4}{3}(c_1^2 + 3ac_2), \quad g_{3t} = -\frac{4}{27}(2c_1^3 + 9ac_1c_2).$$

Решение $g(t, z)$ зависит от z только через (не зависящую от t) “константу” интегрирования $g_0(z)$, которая должна удовлетворять системе (16а), (16б), поскольку $g_0(z) = g(0, z)$. В силу уравнения (16б) функция $g_0(z)$ равна константе g_0 . Тогда система (16а), (16б) принимает вид

$$4k^2 g_0(c_1 - ak^2 - ag_0)^2 = 0, \quad (18а)$$

$$2g_0(4c_2 + 2(c_1 - ak^2)g_0 - ag_0^2) = 0. \quad (18б)$$

Эту систему можно решить, если считать, что $k = 0$, $k_{\pm}^2 = \frac{c_1 \pm 2\sqrt{-ac_2}}{a}$ (в соответствии с (15в)) и $g_0 \geq 0$. Преобразовав систему (18а), (18б), получаем допустимые значения g_0 :

$$\text{если } k = 0, \quad \text{то } g_0 = 0, \quad g_0 = g_{0\pm} = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4ac_2}}{a} > 0, \quad (19а)$$

$$\text{если } k^2 = k_-^2, \quad \text{то } g_0 = 0, \quad g_0 = 2\sqrt{-\frac{c_2}{a}}, \quad ac_2 < 0; \quad (19б)$$

случай $k^2 = k_+^2$ следует исключить, поскольку он приводит к $g_0 = -2\sqrt{-c_2/a} < 0$.

Рассматривая систему (16а), (16б) с учетом (19а), (19б), получаем, что при $k = 0$ эта система очевидно удовлетворяется. Используя формулу (17), получаем решения

$$\begin{aligned} g(t) = g_1(t) &= \frac{6c_2}{3\wp(t; g_{2t}, g_{3t}) - c_1}, \\ g(t) = g_{\pm}(t) &= 4g_{0\pm} \frac{2c_1^2 + 9ac_2 - 3\wp(t; g_{2t}, g_{3t})(c_1 + 3\wp(t; g_{2t}, g_{3t}))}{(6\wp(t; g_{2t}, g_{3t}) + c_1 \pm 3\sqrt{c_1^2 + 4ac_2})^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $c_1^2 + 4ac_2 \geq 0$. Если использовать (17) вместе с условием (19б), получаем решение при $k_-^2 = 0$, идентичное (20). Если $k_-^2 \neq 0$, то функции (20) не удовлетворяют уравнению (16а). В этом случае система (16а), (16б) имеет решение

$$g(t) = g_3 = -\frac{2c_2}{\sqrt{-ac_2}}, \quad 0 < a < -\frac{c_1^2}{4c_2}. \quad (21)$$

Мы получили двухпараметрическое (в силу (8в) для указанных решений $c_3 = 0$) семейство решений $\Psi(t, z)$ вида (4), выраженных через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(t, g_{2t}, g_{3t})$ и $e^{ic_1 z}$. Таким образом, $\Psi(t, z)$ – двоякопериодическая функция. Период по t равен вещественному периоду функции $\wp(t, g_{2t}, g_{3t})$:

$$L_t = 2\omega(g_{2t}, g_{3t}). \quad (22)$$

С учетом уравнения (15а) решения $\Psi(t, z)$ можно представить как

$$\Psi(t, z) = (\sqrt{g(t)} + ik)e^{ic_1 z}, \quad (23)$$

где $k = 0$ для решений (20) и $k = \sqrt{\frac{c_1 - 2\sqrt{-ac_2}}{a}}$ для решения (21). Как и $g_3(t)$, решения (20) должны быть вещественными и неотрицательными (ограниченными или неограниченными).

Чтобы записать условия вещественности и неотрицательности решений в терминах параметров a , c_1 , c_2 , для решений (20) удобно воспользоваться подходом фазовых диаграмм [10]. Согласно уравнению (16б), в котором для решений (20), (21) мы должны положить $k = 0$, возможны и необходимы в точности пять фазовых диаграмм $\{g_t^2, g\}$, $g \geq 0$, если мы требуем, чтобы решения были вещественными и неотрицательными (ограниченными или неограниченными). Для этих диаграмм параметры должны удовлетворять условиям

$$a < 0, \quad c_1 < 0, \quad c_2 > 0, \quad c_1^2 + 4ac_2 > 0, \quad (24а)$$

$$a > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 = 0, \quad (24б)$$

$$a < 0, \quad c_1 < 0, \quad c_1^2 + 4ac_2 = 0, \quad (24в)$$

$$a > 0, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 > 0, \quad (24г)$$

$$a > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad c_1^2 + 4ac_2 \geq 0. \quad (24д)$$

Если ни одно из этих ограничений не выполнено, решения (20) не являются вещественными и ограниченными (например, если $a < 0$, $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, мы получаем, что $g_1(t) < 0$, $g_+(t) < 0$, а g_- неограничено). Если выполнены некоторые из условий, то по крайней мере одна из функций (20) ограничена.

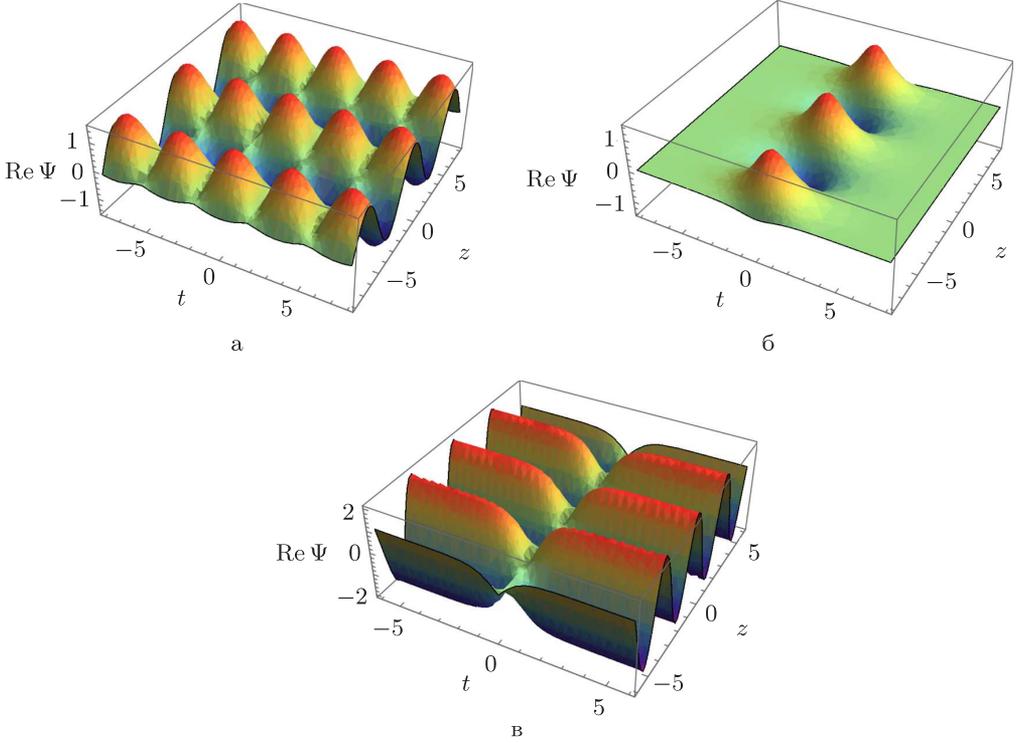


Рис. 3. Функция $\text{Re } \Psi(t, z)$ для решения (24а)–(24д) для трех наборов значений параметров, выбранных согласно (24а), (24б) и (24в): $a = -1/8$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $g(t) = g_+(t)$ (а); $a = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $g(t) = g_+(t)$ (б) и $a = 0.46$, $c_1 = -1.92$, $c_2 = 2$, $g(t) = g_1(t)$ (в).

Если выполнены (24а), (24г), то решения g_1 и g_+ ограничены, g_- неограничено; если выполнено (24д), то решения g_+ , g_- ограничены (и отличаются только сдвигом переменной t), а g_1 неограничено; если выполнено (24б), то g_+ представляет собой яркий солитон ($g \equiv 0$, $g_1 \equiv 0$); если выполнено (24в), то решение g_1 – темный солитон ($g_+ = c_1/a$, $g_- = c_1/a$). Решения (20) при условиях (24б), (24в) являются вырожденными эллиптическими решениями, определяемыми уравнением $g_{3t}^3 - 27g_{3t}^2 = 0$ (при этом $g_{3t} < 0$ в обоих случаях) [11]. Они записываются как

$$g_+(t) = \frac{2c_1}{a} \text{sech}^2(t\sqrt{c_1}), \quad (25)$$

$$g_1(t) = \frac{c_1}{a} \text{th}^2\left(t\sqrt{-\frac{c_1}{2}}\right). \quad (26)$$

Подведем итог: соотношение (23) с $g(t)$, заданной в (20) или (21) с учетом ограничений (24а)–(24д), определяет вещественные и ограниченные, а также вещественные, неотрицательные и неограниченные решения НУШ с кубической нелинейностью, получающиеся с помощью анзаца (4).

Численные расчеты проводятся непосредственно. Примеры вещественных и ограниченных решений показаны на рис. 3.

Далее рассмотрим случай $f_t(t, z) = 0$. Первый интеграл $b(z)$ не существует, поэтому возвращаемся к системе (5):

$$\begin{aligned} f_z(z) &= d(z)(\phi_z(z) - a(d^2(z) + f^2(z))), \\ d_z(z) + f(z)(\phi_z(z) - a(d^2(z) + f^2(z))) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

После преобразований получаем

$$d^2(z) + f^2(z) = \text{const} = c > 0. \quad (28)$$

Если $d_z(z) = 0$ ($f = \text{const}$), то $\phi(z)$ задается как

$$\phi(z) = acz. \quad (29)$$

Если $d_z(z) = -f(z)f'(z)/\sqrt{c - f^2(z)}$, $|f(z)| < \sqrt{c}$, то мы получаем

$$\phi(z) = acz + \arcsin \frac{f(z)}{\sqrt{c}}. \quad (30)$$

По сравнению с (23), (21) решение (29) не является новым. Для решения (30) отметим, что соотношения (28) и (30) согласуются с (27), но очевидно, что их недостаточно для определения $f(z)$ и $\phi(z)$ аналогично тому, как это происходит с (17) и (15a). Тем не менее формулы (28), (30) задают решение вида (4), физическая значимость которого, однако, неясна.

Наконец, если $f_z(t, z) = 0$, $f_t(t, z) \neq 0$ и нет никаких ограничений на $d(z)$, то теорема Фробениуса неприменима, поэтому (опять же) рассмотрим систему (5)

$$\begin{aligned} d(z)(\phi_z(z) - a(d^2(z) + f^2(t))) &= 0, \\ f_{tt}(t) = d_z(z) + f(t)(\phi_z(z) - a(d^2(z) + f^2(t))), \end{aligned} \quad (31)$$

которую можно свести к следующим уравнениям:

$$d(z) = 0, \quad \phi_z(z) = \frac{f_{tt}(t) + af^3(t)}{f(t)}, \quad f(t) \neq 0, \quad \text{или} \quad (32a)$$

$$d_z(z) = f_{tt}(t), \quad \phi_z(z) = a(d^2(z) + f^2(t)). \quad (32б)$$

Из (32б) получаем $f(t) = \text{const}$, $d_z(z) = 0$, следовательно, решение (опять же) задается формулами (21) с ограничениями (24a)–(24д). Рассматривая (32a), получаем, что необходимо условие

$$\phi_z(z) = \frac{f_{tt}(t) + af^3(t)}{f(t)} = \text{const} = \lambda_1,$$

приводящее к линейной функции $\phi(z)$. Функция $f(t)$ должна удовлетворять уравнению (где λ_3 – константа интегрирования)

$$(f_t(t))^2 = -\frac{a}{2}f^4(t) + \lambda_1 f^2(t) + \lambda_3,$$

следовательно, если положить $g(t) := f^2(t)$,

$$(g_t(t))^2 = -2ag^3(t) + 4\lambda_1 g^2(t) + 4\lambda_3 g(t). \quad (33)$$

За исключением различного обозначения констант интегрирования, уравнение (33) идентично уравнению (16a) при $k = 0$. Уравнение (166) при условии $k = 0$ имеет решение (20). Следовательно, решения уравнения (33) имеют вид (20) (где $\lambda_1 = c_1$ в силу (15a)).

В заключение отметим, что вырожденные решения для общего случая, определяемые равными нулю дискриминантами функций $\wp(z; g_{2h}, g_{3h})$ и $\wp(t; g_{2t}, g_{3t})$, являются решениями в частных случаях, но должны быть исключены из числа возможных решений из-за того, что уравнения в общем случае несовместны. Таким образом, кроме (30), решения для частных случаев определяются только условием $d_z(z) = 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали пригодность анзаца (4) (первоначально предложенного в [6]) для решения НУШ (2) с кубической нелинейностью. При этом мы действовали следующим образом.

Предположив, что анзац (4) приемлем (задает решение уравнения (2)), из (с необходимостью верной) системы (5) мы получили решения $d(z)$, $\phi(z)$, $f(t, z; f_0(z))$, используя условие интегрируемости $f_{zt} = f_{tz}$ системы (5a), (6). Далее мы использовали решения d , ϕ , f для преобразования системы (5a), (5б) в систему (14a), (14б). Если уравнения (14a), (14б) можно удовлетворить, взяв в качестве решения функцию (13) (с $h(z)$, заданной в (12)), то можно использовать анзац (4). Числовой контрпример, представленный в разделе 3, показывает, что функция (13) не является решением уравнения (14a), поэтому анзац (4) неприменим в общем случае. В частных случаях, используя результаты раздела 2, мы получили решения $\Psi(t, z)$ и соответствующие условия для неотрицательных ограниченных или неограниченных решений на основе подхода фазовых диаграмм. Насколько нам известно, эти решения являются новыми.

Во-первых, подчеркнем, что функции $h(z)$ и $f(t, z; f_0(z))$, хотя они вместе с соответствующей функцией $\phi(z)$ не являются решениями НУШ с кубической нелинейностью (но удовлетворяют уравнению (14б)), тем не менее необходимы для численной проверки уравнения (14a) и поиска решений в частных случаях.

Во-вторых, представление указанных функций через эллиптическую функцию Вейерштрасса вместо эллиптических функций Якоби, несмотря на эквивалентность этих представлений, имеет некоторое вычислительное преимущество (см. монографию [9], раздел VII), поскольку при варьировании параметров a , c_1 , c_2 , c_3 нет необходимости различать случаи разных модулей функции Якоби: для разных комбинаций параметров (см. формулы (24a)–(24д)) каждому случаю соответствуют определенные инварианты g_{2t} , g_{3t} и, следовательно, одна функция $\wp(t; g_{2t}, g_{3t})$ в (20). Кроме того, поскольку \wp аналитически зависит от инвариантов (см. раздел 18.5 в [11]), удобно изучать зависимость решений (20) от параметра.

В-третьих, используя компактное представление функций $h(z)$ и $f(t; g_{2t}, g_{3t})$ вместе с анализом фазовой диаграммы, можно выделить сингулярные решения (соответствующие определенным комбинациям параметров) и найти подходящие комбинации параметров для вещественных и ограниченных (“физических”) решений (см. условия (24a)–(24д)).

Наконец, известно, что НУШ с кубической нелинейностью имеет широкое применение в физике как модель различных нелинейных процессов. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть заново некоторые результаты, имеющиеся в литературе, в частности в оптике и гидродинамике [12]–[16], где использовался анзац (4).

В качестве первого примера рассмотрим пример из работы [15], где двоякопериодические фоновые решения, представленные в [12] (на основе [6]), сравниваются с экспериментальными данными. Авторы работы [15] заявляют “good agreement between theory and experiment” (хорошее согласие теории и эксперимента). Поскольку мы недостаточно компетентны, чтобы оценить детали экспериментальных исследований, отметим только, что коэффициенты Фурье нулевого и первого порядков для функции $Q(t, z)$ (см. уравнение (16) в [15]) сравниваются с экспериментальными данными (см. рис. 3 и 4 в [12]) только за два периода t (“two cycles of evolution” в терминологии работы [12]). Кроме того, расхождения между теорией и экспериментальными данными (см. заштрихованные области на рис. 3 и 4 в [15]) за пределами двух циклов объясняются (в данном случае) несовершенной компенсацией потерь. Как итог, мы предлагаем улучшить “хорошее” согласие между теорией и экспериментом за счет использования правильного анзаца (4) – решения НУШ с кубической нелинейностью.

Второй пример представляет собой гидродинамическое приложение результатов работы [6], представленное в [16], где волны-убийцы и модуляционная неустойчивость волнового фона моделируются с помощью фокусирующего НУШ с кубической нелинейностью. При этом в [16] используются решения (2) и (3), которые получены из соотношения (60) (идентичного (3.23) в [7]) вместе с (65) (идентичным (3.26) в [7]) и из соотношений (69), (75) соответственно. За исключением определений переменных z и t , решения (2) и (3) из [16] не согласуются с приведенными выше решениями (20), поскольку $g_1(t)$, $g_{\pm}(t)$ не зависят от z , а амплитудные функции в (2) и (3) зависят от обоих переменных. Проще говоря, в работе [16] функция $Q(x, t)$ согласно формуле (65) является решением первого уравнения системы (51) (с δ^2 , удовлетворяющей равенству $\Theta' = -2(\delta^2 + b)$), но является ли она решением второго уравнения системы (51) – открытый вопрос. Пока эта проблема не решена, кажется сомнительным, что статья [16] “opens up a number of new directions in the study of rogue waves modelled by the focusing NLS equation” (открывает ряд новых направлений в изучении волн-убийц, моделируемых фокусирующим НУШ).

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] R. Conte, M. Musette, T. W. Ng, C. Wu, “All meromorphic traveling waves of cubic and quintic complex Ginzburg–Landau equations”, *Phys. Lett. A*, **481** (2023), 129024, 15 pp.
- [2] A. N. W. Hone, “Non-existence of elliptic travelling wave solutions of the complex Ginzburg–Landau equation”, *Phys. D*, **205**:1–4 (2005), 292–306.
- [3] С. Ю. Вернов, “Доказательство отсутствия эллиптических решений кубического комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау”, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 161–171.
- [4] S. Yu. Vernov, “Elliptic solutions of the quintic complex one-dimensional Ginzburg–Landau equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:32 (2007), 9833–9844.

- [5] H. W. Schürmann, “Traveling-wave solutions of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. E*, **54**:4 (1996), 4312–4320.
- [6] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, “Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **72**:2 (1987), 183–196.
- [7] Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, М., 2003.
- [8] K. Weierstrass, “Transformation des Differentials”, *Mathematische Werke*, v. 5, ed. J. Knoblauch, Johnson, New York, 1915, 4–16; Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматлит, М., 1963.
- [9] K. Chandrasekharan, *Elliptic Functions*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **281**, Springer, Berlin, 1985.
- [10] H. W. Schürmann, V. S. Serov, “Theory of TE-polarized waves in a lossless cubic-quintic nonlinear planar waveguide”, *Phys. Rev. A*, **93**:6 (2016), 063802, 8 pp.
- [11] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [12] M. Conforti, A. Mussot, A. Kudlinski, S. Trillo, N. Akhmediev, “Doubly periodic solutions of the focusing nonlinear Schrödinger equation: recurrence, period doubling, and amplification outside the conventional modulation-instability band”, *Phys. Rev. A*, **101**:2 (2020), 023843, 11 pp.
- [13] G. Vanderhaegen, C. Naveau, P. Szriftgiser et al., “‘Extraordinary’ modulation instability in optics and hydrodynamics”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **118**:14 (2021), e2019348118, 7 pp.
- [14] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, A. Ankiewicz, “Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves”, *Phys. Lett. A*, **373**:25 (2009), 2137–2145.
- [15] G. Vanderhaegen, P. Szriftgiser, C. Naveau et al., “Observation of doubly periodic solutions of the nonlinear Schrödinger equation in optical fibers”, *Optics Lett.*, **45**:13 (2020), 3757–3760.
- [16] J. Chen, D. E. Pelinovsky, R. E. White, “Rogue waves on the double-periodic background in the focusing nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. E*, **100**:5 (2019), 052219, 18 pp.

Поступила в редакцию 7.11.2023,
после доработки 25.12.2023,
принята к публикации 29.12.2023