Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Н. Буков, В. Н. Сизых, Приближенный синтез оптимального управления в вырожденной задаче аналитического конструирования регуляторов,
Автомат. и телемех., 1999, выпуск 12, 16–32

https://www.mathnet.ru/at195

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
18 января 2026 г., 16:12:25

Автоматика и телемеханика, № 12, 1999

Детерминированные системы

УДК 519.9

© 1999 г. **В. Н. БУКОВ, д-р техн. наук,**
В. Н. СИЗЫХ, канд. техн. наук
(Военный авиационный технический университет, Москва)

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ [1]

Рассматривается задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов для нелинейных объектов. В качестве развития метода, связанного с минимизацией функционала обобщенной работы, предлагается преобразовать исходную задачу в вырожденную задачу и осуществлять поиск решения на основе выбора подходящей стратегии. В число таких стратегий входит и построение минимизирующих последовательностей, поинтервально сходящихся к оптимальному процессу исходной задачи. Приведен иллюстрирующий пример.

1. Введение

В последнее двадцатилетие школой А. А. Красовского разработано высокоэффективное алгоритмическое обеспечение синтеза оптимальных управлений для сложных (нелинейных и многомерных) процессов, ориентированное в том числе и на создание перспективных интегрированных комплексов управления с развитыми функциями адаптации, самонастройки и самоорганизации [1–4]. Широкий круг экспериментальных исследований и конкретных проектов подтвердил, в целом, высокие характеристики алгоритмов. В то же время все еще остаются прикладные задачи, в которых названные алгоритмы или принимают излишне громоздкий вид, или эффективны в весьма узких диапазонах условий применения.

Анализ современных направлений развития методов оптимизации в задачах управления показывает большой интерес специалистов соответствующей области теории к процедурам приближенного решения оптимизационных задач. Этот путь позволяет существенно расширить класс объектов и постановок практических задач управления. Отметим здесь два направления: переход от традиционного динамического программирования [5] к так называемому дифференциальному динамическому программированию [6]; достаточные условия оптимальности в форме В. Ф. Кротова [7], получившие в дополненном и переосмысленном виде название принципа расширения [8].

Идейной основой первого из этих направлений является отказ от традиционного постулирования оптимальности участка неизвестной траектории и переход к варьированию в окрестности этой экстремали или любой другой, возможно неоптимальной, заданной траектории. В результате возникают алгоритмы типа последовательных улучшений траектории и/или управления на ней. Второе направление базируется на полном или частичном игнорировании связей объекта управления, что собственно и приводит к формальному расширению класса возможных решений исходной задачи за счет снятия ограничений на ее условия. Решения опреде-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00014).

ляются путем организации минимизирующих последовательностей, которые итерационным образом восстанавливают утраченные связи и одновременно приближают формируемые траектории и/или управления к искомым. В литературе приводятся доказательства того, что для определенного класса оптимизационных задач оба эти направления (в чем-то идейно близкие друг другу) дают конструктивные результаты.

Данная статья посвящена попытке переноса некоторых из приемов приближенного синтеза оптимального управления (ОУ) на задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) с использованием положений и методик минимизации функционала обобщенной работы (ФОР), в последнее время все чаще называемого неклассическим функционалом [4].

2. Формулировка вырожденной задачи синтеза

В качестве объекта управления будем использовать динамическую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in U \subset R^m, \tag{1}$$

функционирующую на отрезке времени $T = [t_0, t_к]$ с произвольно заданными начальными условиями $x(t_0) = x^0$ и кусочно-непрерывным управлением $u(t)$ из области U. Минимизируемый функционал запишем в виде

$$I\big(t, x(t), u(t)\big) = V_з(x(t)) + \int\limits_{t_0}^{t_к} f_0\big(\theta, x(\theta), u(\theta)\big) d\theta, \tag{2}$$

где $V_з$ – скалярная дифференцируемая терминальная функция, т.е. функция состояния объекта (1) в конечный момент времени $t_к$; f_0 – скалярная дифференцируемая по всем аргументам функция. Множество пар функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих перечисленным условиям, назовем множеством допустимых D.

Если существует решение задачи (1), (2), то функционал (2) на оптимальной траектории $x_{оп}(t)$ и при оптимальном управлении $u_{оп}(t)$ достигает своей нижней точной грани

$$\inf_u I\big(t, x_{оп}(t), u(t)\big) = I\big(t, x_{оп}(t), u_{оп}(t)\big) = S(t, x_{оп}). \tag{3}$$

Функционал (3) принято называть опорным. По определению опорный функционал численно равен функции Беллмана $S(t, x)$ [4], которая в конечный момент времени $t_к$ принимает значение терминального члена функционала

$$S\big(t_к, x_{оп}(t_к)\big) = V_з\big(x_{оп}(t_к)\big), \tag{4}$$

а в остальное время удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\frac{\partial S(t, x_{оп})}{\partial t} + \frac{\partial S(t, x_{оп})}{\partial x_{оп}} f(t, x_{оп}, u_{оп}) + f_0(t, x_{оп}, u_{оп}) = 0. \tag{5}$$

Теперь поставим перед собой цель: свести поставленную задачу к вырожденной. Доопределим конструкцию функционала (3) таким образом, чтобы условия (4) и (5) удовлетворялись при произвольной вариации управления $\delta u(t)$. Иначе говоря, определим дополнительные условия, при которых оптимальное решение имеет место в виде пары оптимальной траектории $x_{оп}(t)$ и любого (в рамках справедливости приведенных записей) управления $u_{оп}(t) + \delta u(t)$. Именно в этом смысле будем говорить о вырожденности задачи синтеза.

Запишем полные производные по времени крайних выражений в (3) и добавим к ним слагаемое $f_0(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}})$, в результате получим

$$\inf_u \Big(\dot{I}(t, x_{\text{оп}}, u) + f_0(t, x_{\text{оп}}, u)\Big) = \dot{S}(t, x_{\text{оп}}) + f_0(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}). \tag{6}$$

Если воспользоваться тождеством

$$\dot{S}(t, x_{\text{оп}}) = \frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial t} + \frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial x_{\text{оп}}} f(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) \tag{7}$$

и потребовать непременного выполнения уравнения Беллмана (5), то из (6) вытекает тождество

$$\inf_u \Big(\dot{I}(t, x_{\text{оп}}, u) + f_0(t, x_{\text{оп}}, u)\Big) = 0. \tag{8}$$

Теперь раскроем в (8) полную производную функционала $I(t, x_{\text{оп}}, u)$ на оптимальной траектории

$$\inf_u \left(\frac{\partial I(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial t} + \frac{\partial I(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial x_{\text{оп}}} f(t, x_{\text{оп}}, u) + f_0(t, x_{\text{оп}}, u)\right) = 0. \tag{9}$$

Разложим функции f и f_0 по малым вариациям управления δu в окрестности оптимальной траектории $x_{\text{оп}}(t)$ в ряд Тейлора с прописыванием только линейных членов. В результате из (9) с учетом (5) получим

$$\inf_u \left[\left(\frac{\partial f_0(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u} + \frac{\partial I(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial x_{\text{оп}}} \frac{\partial f(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u}\right) \delta u + O(\delta^2 u)\right] = 0, \tag{10}$$

где $O(\delta^2 u)$ – сумма слагаемых, порождаемых старшими членами разложений f и f_0 в ряды Тейлора. Непосредственно из (10) видно, что возможны, по крайней мере, две различные ситуации:

а) вариация управления δu в окрестности $u_{\text{оп}}$ равна нулю, т.е. используется управление, соответствующее экстремуму функционала;

б) коэффициенты разложения по отдельности тождественно равны нулю, в результате чего значение функционала на оптимальной траектории не зависит от выбора управления.

Первый случай традиционен и не представляет сейчас интереса. Второй соответствует вырожденной задаче управления и подразумевает определенное расширение постановки задачи.

3. Условие локальной оптимальности

Предположим, что в (10) выполняется соотношение

$$\frac{\partial f_0(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u} + \frac{\partial I(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial x_{\text{оп}}} \frac{\partial f(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u} = 0 \tag{11}$$

при любом $u \in D$. При $u = u_{\text{оп}}$ условие (11) с учетом (3) запишется в виде

$$\frac{\partial f_0(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u} + \frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial x_{\text{оп}}} \frac{\partial f(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u} = 0. \tag{12}$$

Соотношение (12) является основным уравнением, определяющим необходимое условие локальной оптимальности процесса (1) и искомое ОУ исходной задачи. Выполнение этого условия означает, что минимизированное по вектору u уравнение (9)

$$\frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial t} + \frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial x_{\text{оп}}} \left(f(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) + \frac{\partial f(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u} \delta u\right) + \tag{13}$$

$$+f_0(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) + \frac{\partial f_0(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u}\delta u = 0$$

эквивалентно уравнению Беллмана (5) при любом $u \in D$.

Таким образом, из соотношений (3), (5), (12) вытекает следующее представление функционала I, справедливое при любом допустимом управлении u

$$I\left(t, x_{\text{оп}}(t), u(t)\right) = V_{\text{з}}(x(t_{\text{к}})) + \int\limits_{t_0}^{t_{\text{к}}} M\left(\theta, x_{\text{оп}}(\theta), \delta u(\theta)\right) d\theta, \tag{14}$$

где $M(t, x_{\text{оп}}, \delta u) = f_0(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) + \dfrac{\partial f_0(t, x_{\text{оп}}, u)}{\partial u}\delta u$ – скалярная функция, учитывающая доопределение интегранта опорного функционала до интегранта функционала исходной задачи.

Следует отметить, что известные достаточные условия оптимальности [7, 9] приближенного синтеза управлений сформулированы в терминах произвольной вспомогательной функции со свойствами функции Ляпунова. Развиваемый же нами подход основан на введении опорного функционала со свойствами функции Беллмана (задача Коши (4), (5)) и линеаризации системы (1) относительно заранее неизвестной вектор-функции $u_{\text{оп}}$. Функционал качества (14) оказывается полуопределенным и относится к неклассическим в том смысле, что содержит вектор $u_{\text{оп}}$.

Процедура разрешения неопределенности в объекте и в функционале включает два этапа. На первом этапе исходная (невырожденная) задача синтеза доопределяется до сингулярной с целью включения предельных функций управления в множество допустимых D, но так, чтобы расширенная задача содержала оптимальное решение (при $u = u_{\text{оп}}$ формулировки задач совпадают). Затем осуществляется поиск подходящей по условиям исходной задачи стратегии управления относительно вектора $u_{\text{оп}}$, разрешающей неопределенность в темпе функционирования системы (1).

К сожалению, ответ на вопрос о существовании опорного функционала и единственности решения определяющей его задачи Коши (4), (5), а также исходной задачи синтеза (1), (2) по ряду причин [10] неоднозначен. Кроме того, в вырожденной задаче возникают особые ($U \subset R^m$) и импульсные ($U = R^m$) режимы, для которых регулярные признаки оптимальности типа условий Якоби (принципа максимума) и Лежандра–Клебша оказываются тривиально выполненными и малоэффективными. Поэтому формальный переход от исходной задачи синтеза к вырожденной задаче вызывает необходимость в разработке дополнительных условий оптимальности для расширенного множества допустимых.

Традиционный путь исследования вырожденных задач ОУ, состоящий в получении более тонких, но и несоизмеримо более сложных необходимых условий оптимальности [10], не снимает проблему существования и единственности решения задачи синтеза. Однако имеется большой класс задач (названных в свое время задачами АКОР), в которых эта проблема разрешима путем преобразования уравнения Беллмана в задаче Коши (4), (5) в более простое достаточное условие оптимальности в форме уравнения Ляпунова. Формально такое преобразование осуществляется через определенную модернизацию исходной постановки задачи синтеза путем введения в функционал (2) дополнительного изопериметрического условия, имеющего энергетический смысл [11].

4. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов

Задача АКОР имеет место как частный и наиболее распространенный случай задачи синтеза ОУ для нелинейного объекта с аффинно (линейно и аддитивно)

входящими управлениями

$$\dot{x} = f_1(t,x) + \varphi_1(t,x)u \tag{15}$$

при интегранте функционала (2)

$$f_0(t,x,u) = Q(t,x) + L(t,u,u_{\text{оп}}), \tag{16}$$

где x – n-мерный вектор состояния, u – m-мерный вектор управления, t – время из заданного отрезка, f_1 и φ_1 – дифференцируемые и непрерывные по x векторная и матричная функции; Q – скалярная функция, используемая для задания требований к процессу $x(t)$ на интервале $[t_0, t_{\text{к}}]$; $L(t,u,u_{\text{оп}})$ – выбираемая скалярная функция, играющая роль штрафа за затраты на управление; $u_{\text{оп}}$ – оптимальный в локальном смысле (не допускающий варьирования) априори неизвестный вектор управления.

Формулировка вырожденной задачи АКОР заключается в определении такой структуры функции $L(t,u,u_{\text{оп}})$, для которой, с одной стороны, вместо задачи Коши (4), (5) с уравнением Беллмана используется более простое достаточное условие оптимальности в форме задачи Коши с уравнением Ляпунова

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_{\text{оп}}} f_1 + Q = 0 \tag{17}$$

и граничным условием

$$V\left(t_{\text{к}}, x_{\text{оп}}(t_{\text{к}})\right) = V_{\text{з}}\left(x_{\text{оп}}(t_{\text{к}})\right), \tag{18}$$

а с другой стороны, существует возможность выбора подходящей стратегии управления относительно вектора $u_{\text{оп}}$, в том числе и в виде итерационной процедуры.

Последнее требование означает, что решение уравнения (17) должно совпадать с функцией Беллмана $V(t,x_{\text{оп}}) = S(t,x_{\text{оп}})$, а опорный функционал должен являться оптимальной функцией Ляпунова на заданном отрезке времени при любом допустимом векторе управления. Поэтому поиск ОУ, определяемого через решение задачи Коши (17), (18), должен исключать непосредственное использование процедуры типа $u = u_{\text{оп}}$.

Выявим условия, при которых гарантируется существование опорного функционала в виде оптимальной функции Ляпунова и единственность решения задачи Коши (17), (18). Ключевой вопрос, на который здесь предстоит ответить, сводится к следующему: при каких условиях скалярная функция, удовлетворяющая определенным условиям оптимальности, совпадает с ценой (значениями опорного функционала в произвольный текущий момент времени из заданного отрезка) или, другими словами, в каких случаях локально-оптимальное управление является оптимальным в указанном смысле?

При принятых упрощениях (15), (16) исходной задачи синтеза необходимое условие локальной оптимальности (12) принимает вид

$$\frac{\partial L(t,u,u_{\text{оп}})}{\partial u} + \frac{\partial S(t,x_{\text{оп}})}{\partial x_{\text{оп}}} \varphi_1(t,x_{\text{оп}}) = 0. \tag{19}$$

Тогда минимизированное по вектору u уравнение (9) уступит место уравнению Ляпунова (17), если:

1° выполняется условие локальной оптимальности (19),

2° обеспечивается выполнение дополнительного условия

$$L(t,u_{\text{оп}},u_{\text{оп}}) = \frac{\partial L(t,u,u_{\text{оп}})}{\partial u} u_{\text{оп}}, \tag{20}$$

3° при $u = u_{\text{оп}}$ имеет место тождество

$$\frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial x_{\text{оп}}} \varphi_1(t, x_{\text{оп}}) u_{\text{оп}} + L(t, u_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) = 0. \tag{21}$$

Уравнения (19)–(21) при $V(t, x_{\text{оп}}) = S(t, x_{\text{оп}})$ определяют структуру функции $L(t, u, u_{\text{оп}})$ по достаточному условию оптимальности в форме уравнения Ляпунова.

В линейно-квадратичной задаче АКОР скалярная функция L обычно задается в виде

$$L(t, u, u_{\text{оп}}) = L_1(t, u) + L_2(t, u_{\text{оп}}), \tag{22}$$

где L_1, L_2 – некоторые квадратичные формы от вектор-функций u, $u_{\text{оп}}$. Выбор скалярных функций L_1, L_2 определяет различные постановки задачи АКОР [4]. Исследуем их на предмет соответствия условиям (19)–(21).

5. Постановка задачи АКОР по Летову–Калману

Утверждение 1. *Пусть* $L_1(t, u) = 0{,}5\, u^{\mathrm{T}} K^{-1} u$, $L_2(t, u_{\text{оп}}) = 0$, *где* K *– положительно определенная матрица постоянных коэффициентов. Тогда уравнение* (19) *соответствует условию инфимума функционала* (2)

$$u = u_{\text{оп}} = -K \varphi_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial S^{\mathrm{T}}}{\partial x_{\text{оп}}}, \tag{23}$$

а условие (20) *и тождество* (21) *не выполняются.*

Формально утверждение 1 проверяется непосредственной подстановкой скалярной функции $L(t, u, u_{\text{оп}}) = L_1(t, u)$ в уравнения (20), (21). Докажем утверждение от противного. Предположим, что тождество (21) выполняется при некоторой другой вектор-функции управления $u = u_0$, в локальном смысле доставляющей инфимум функционалу (2) и удовлетворяющей решению (23). Тогда минимизированное по вектору u уравнение (9) приобретает вид

$$\frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial t} + \frac{\partial S(t, x_{\text{оп}})}{\partial x_{\text{оп}}} f_1(t, x_{\text{оп}}) + Q(t, x_{\text{оп}}) + 0{,}5\, u_0^{\mathrm{T}} K^{-1} u_0 - u_{\text{оп}}^{\mathrm{T}} K^{-1} u_0 = 0. \tag{24}$$

Отсюда следует, что уравнение Ляпунова (17) имеет место при $u_0 = 0$ или $u_0 = 2u_{\text{оп}}$. Это противоречит условию формулы (23): $u_0 = u_{\text{оп}}$.

Таким образом, управления, доставляющие инфимум функционалу (2) в произвольный текущий момент времени t из заданного отрезка $[t_0, t_{\text{к}}]$, не совпадают с управлениями, полученными из необходимого условия локальной оптимальности (19). Другими словами, минимизация классических функционалов типа (2) не сводится к условиям типа (19). Причина, вероятно, кроется в особенностях задачи на условный экстремум, к которой так или иначе сводится задача (1), (2). Положение принципиально меняется при доопределении функционала исходной задачи до неклассического. Именно это и было сделано в 60-х годах А. А. Красовским [11].

6. Постановка задачи АКОР по А. А. Красовскому

Полагаем $L_1(t, u) = 0{,}5\, u^{\mathrm{T}} K^{-1} u$, $L_2(t, u_{\text{оп}}) = 0{,}5\, u_{\text{оп}}^{\mathrm{T}} K^{-1} u_{\text{оп}}$. Здесь слагаемое L_2 в интегранте соответствует введению в функционал (2) дополнительного изопериметрического условия

$$\int_{t_0}^{t_{\text{к}}} L_2(\theta, u_{\text{оп}}) d\theta = C,$$

который затем приобретает вид ФОР

$$I = V_з(x(t_к)) + \int\limits_{t_0}^{t_к} \left(Q(\theta, x) + \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K^{-1} u + \frac{1}{2} u_{оп}^{\mathrm{T}} K^{-1} u_{оп} \right) d\theta. \tag{25}$$

Решение задачи определяется формулой (23) и справедливо при $V(t, x_{оп}) = S(t, x_{оп})$.

Утверждение 2. *Условия* (19), (20) *и тождество* (21) *выполняются тогда и только тогда, когда управления, в локальном смысле доставляющие инфимум ФОР* (25), *являются оптимальными управлениями.*

Доказательство утверждения также проводится от противного в предположении о выполнении тождества (21) при некоторой вектор-функции $u = u_{оп}$, отличной от вектора ОУ и удовлетворяющей решению (23). В итоге минимизированное по вектору u уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial S(t, x_{оп})}{\partial t} + \frac{\partial S(t, x_{оп})}{\partial x_{оп}} f_1(t, x_{оп}) + Q(t, x_{оп}) + 0{,}5\,(u_0 - u_{оп})^{\mathrm{T}} K^{-1} (u_0 - u_{оп}) = 0 \tag{26}$$

и из сравнения условий по управлениям в формулах (23) и (26) следует, что достаточное условие оптимальности в форме уравнения Ляпунова в постановке задачи АКОР по А. А. Красовскому выполняется в единственном случае: $u = u_{оп}$. Последнее требование накладывает жесткое ограничение на область практического применения ФОР. Включить предельные функции управления представляется возможным только за счет использования неквадратичных условий, накладываемых на скалярные функции L_1 и L_2, путем введения регуляризующих параметров – степеней вектор-функций u, $u_{оп}$ или их квадратичных форм [11]. Снять отмеченное ограничение на условия задачи АКОР позволяет следующее предлагаемое нами доопределение функционала (25).

7. Постановка вырожденной задачи АКОР

В вырожденной задаче требуется определить такую скалярную функцию $L(t, u, u_{оп})$, для которой уравнение Ляпунова (17) справедливо при любом допустимом векторе управления u. Это требование равносильно введению в левую часть соотношения (26) добавочного члена $-0{,}5\,(u_0 - u_{оп})^{\mathrm{T}} K^{-1} (u_0 - u_{оп})$. Так как вектор-функция u_0 была выбрана произвольной ($u = u_0$), то функция $L(t, u, u_{оп})$ должна быть доопределена на слагаемое

$$L_3(t, u, u_{оп}) = -0{,}5\,(u - u_{оп})^{\mathrm{T}} K^{-1} (u - u_{оп})$$

в постановке задачи АКОР с ФОР (25) и иметь вид

$$L(t, u, u_{оп}) = L_1(t, u) + L_2(t, u_{оп}) + L_3(t, u, u_{оп}) = u^{\mathrm{T}} K^{-1} u_{оп}.$$

Утверждение 3. *Пусть* $L(t, u, u_{оп}) = u^{\mathrm{T}} K^{-1} u_{оп}$. *Тогда уравнение* (19) *соответствует условию инфимума функционала* (2)

$$u_{оп} = -K \varphi_1^{\mathrm{T}} \frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x_{оп}} \tag{27}$$

при любом допустимом векторе управления u *и справедливы соотношения* (20), (21).

Доказательство утверждения проводится по аналогии с разделами 4, 5.

Таким образом, функционал качества, для которого уравнение Ляпунова (17) выполняется при любом допустимом управлении u, задается в виде

$$I = V_{\text{з}}(x(t_{\text{к}})) + \int\limits_{t_0}^{t_{\text{к}}} \left(Q(\theta, x) + u^{\text{T}} K^{-1} u_{\text{оп}}\right) d\theta. \tag{28}$$

Функционал (28) назовем критерием взвешенной обобщенной работы (КВОР). КВОР имеет такой же энергетический смысл, как и ФОР (25): слагаемое интегранта $u^{\text{T}} K^{-1} u_{\text{оп}} = (u_{\text{оп}} + \delta u)^{\text{T}} K^{-1} u_{\text{оп}}$ характеризует диссипатируемую кинетическую энергию оптимального процесса (15) (функция L_3 – кинетическая энергия рассеивания), а интеграл от этого слагаемого определяет обобщенную работу диссипативной системы.

Вырожденная формулировка задачи АКОР, по существу, является синергетической постановкой проблемы управления. Она допускает многосвязность области управления, многовариантность путей достижения цели. Оптимизация процессов управления по КВОР имеет ряд важных преимуществ:

1. Возможность включения предельных функций управления ($U \subset R^m$) при использовании квадратичных условий.

2. Выбор подходящей стратегии управления относительно оптимального решения (27) задачи АКОР.

3. Организация итерационных процедур приближенно-оптимального синтеза, обладающих свойством релаксационной сходимости по условию Якоби.

4. Алгоритмическая и вычислительная простота.

Отмеченные достоинства применения КВОР продемонстрируем модельной задачей управления динамикой продольного движения маневренного летательного аппарата.

8. Пример

Уравнения короткопериодического движения самолета имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_z + \overline{a}_y^{\alpha} \alpha, \\ \dot{\omega}_z &= -\overline{a}_{mz}^{\alpha} \alpha - \overline{a}_{mz}^{\omega z} \omega_z + \overline{a}_{mz}^{\delta_{\text{в}}} \delta_{\text{в}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Уравнения (29) образуют колебательную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u, \end{aligned} \tag{30}$$

где $x_1 = \alpha$ – угол атаки, $x_2 = \dot{\alpha}$ – скорость изменения угла атаки, $u = \delta_{\text{в}}$ – отклонение руля высоты.

Коэффициенты a_i для одного из режимов полета принимают значения: $a_1 = -4{,}71\,\text{с}^{-2}$; $a_2 = -1{,}76\,\text{с}^{-1}$; $a_3 = -7{,}50\,\text{с}^{-2}$. Начальные условия были выбраны произвольно: $x_1(0) = -0{,}1$ рад; $x_2(0) = 1$ рад/с.

Таблица 1

Тип функционала	Критериальная зависимость	Временные ограничения			
Критерий Летова–Калмана	$I_1 = \int\limits_{t_0}^{t_к} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ru^2)dt,$ $k_1 = 2r$	$t_к = \infty$	$t_к = t + T,$ $T = \text{const}$	$t_к = t$	$t_к = \text{const}$
ФОР А. А. Красовского	$I_2 = \int\limits_{t_0}^{t_к} \Big(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \frac{1}{2} ru^2 + \frac{1}{2} ru_{оп}^2\Big)dt,\ k_2 = r$	$t_к = \infty$	$t_к = t + T,$ $T = \text{const}$	$t_к = t$	$t_к = \text{const}$
Предлагаемый критерий	$I_3 = \int\limits_{t_0}^{t_к} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ruu_{оп})dt,$ $k_3 = r$	$t_к = \infty$	$t_к = t + T,$ $T = \text{const}$	$t_к = t$	$t_к = \text{const}$

Требуется решить задачу синтеза оптимального управления: в аналитическом виде определить оптимальный закон управления рулем высоты $\delta_в^{оп} = u_{оп}(x_1, x_2)$, стабилизирующий движение самолета по углу атаки ($x_{1зад} = 0$) при различных минимизируемых критериях качества. Тип функционала в известных и предлагаемой формулировках задачи АКОР показан в табл. 1.

Для упрощения получения и сравнения в различных формулировках аналитических решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ замкнутой регулятором $\delta_в^{оп} = u_{оп}(x_1, x_2)$ системы (30) в качестве интервала $[t_0, t_к]$ выбирается правая полуось времени $[0, \infty[$. Параметры объекта (30) и коэффициенты функционалов I_i $(i = 1, 2, 3)$ принимаются одинаковыми: $q_1 = 90\,\text{рад}^{-2}$, $q_2 = 2{,}5\,\text{рад}^{-2}\text{с}^2$, $r = 90\,\text{рад}^{-2}$.

Первоначально исследуем оптимальную стратегию управления $u = u_{оп}$, при которой инфимумы функционалов I_i совпадают на числовой полуоси $[0, \infty[$. При этом для совпадения инфимумов при $u = u_{оп}$ в классической постановке задачи АКОР (функционал I_1) и по нетрадиционным функционалам качества (функционалы I_2, I_3) требуется выбор в критерии Летова–Калмана коэффициента $k_1 = 2r$, чем учитывается вводимое через изопериметрическое условие смещение инфимумов функционалов (25), (28) на постоянную C.

Аналитическое решение задачи синтеза ОУ может быть получено различными путями, включая динамическое программирование и метод В. Ф. Кротова [7].

По схеме динамического программирования задачи ОУ с функционалами I_i приводятся к задаче Майера путем введения новых переменных $x_3 = I_1, x_4 = I_2, x_5 = I_3$:

$$-\dot{x}_3 = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ru^2, \quad x_3(t_к) = 0, \quad x_3(0) \to \inf;$$
$$-\dot{x}_4 = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + 0{,}5\, ru^2 + 0{,}5\, ru_{оп}^2, \quad x_4(t_к) = 0, \quad x_4(0) \to \inf;$$
$$-\dot{x}_5 = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ruu_{оп}, \quad x_5(t_к) = 0, \quad x_5(0) \to \inf.$$

Затем выписываются гамильтонианы системы (30):

$$H = \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} \dot{x}_1 + \dot{x}_i, \quad i = 3, 4, 5.$$

Из условия Якоби $\partial H / \partial u = 0$ определяются скалярные функции ОУ для критериев качества I_i:

$$u = u_{оп} = -\frac{1}{2} \frac{a_3}{r} \frac{\partial S}{\partial x_2}, \quad u = u_{оп} = -\frac{a_3}{r} \frac{\partial S}{\partial x_2},$$
$$u_{оп} = -\frac{a_3}{r} \frac{\partial S}{\partial x_2} \quad \text{при любом} \quad u \in R^1.$$

Далее при $u = u_{\text{оп}}$ решаются уравнения Гамильтона–Якоби:

1. На бесконечном интервале оптимизации частная производная по t принимается равной нулю и выписываются уравнения в частных производных:

для функционала I_1

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2}(a_1x_1 + a_2x_2) - \frac{1}{4}\frac{a_3^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + q_1x_1^2 + q_2x_2^2 = 0,$$

для функционалов I_2, I_3

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2}(a_1x_1 + a_2x_2) + q_1x_1^2 + q_2x_2^2 = 0.$$

2. Выбирается один из приемов получения их аналитического решения [12] – способ представления функции Беллмана в виде положительно определенной квадратичной формы: $S(x_1, x_2) = A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2$.

3. Определяются коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{22} этого решения через параметры $a_i(i=1,2,3)$, $q_j(j=1,2)$, r, используя подстановку $\partial S/\partial x_j$ в уравнения Гамильтона–Якоби и приравнивая к нулю коэффициенты при соответствующих степенях x_1 и x_2.

4. Выписываются в аналитической форме законы ОУ и значения их коэффициентов:

для функционала I_1

$$(A_{12})_{1,2} = \left(-2a_1 \pm 2\sqrt{a_1^2 + \beta q_1}\right)/\beta,$$

$$(A_{22})_{1,2} = \left(a_2 \pm \sqrt{\beta(A_{12} + q_2)}\right)/\beta, \quad \beta = \frac{a_3^2}{r},$$

для функционалов I_2, I_3

$$A_{12} = -\frac{q_1}{a_1}, \quad A_{22} = \frac{q_1 - a_1q_2}{2a_1a_2}.$$

Замечание. Процедура оптимизации по В. Ф. Кротову обобщает схему вычислений Р. Беллмана. Она отличается, прежде всего, тем, что уравнение Гамильтона–Якоби с условием $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$ может быть использовано также в случае, когда время $t_{\text{к}}$ фиксировано и функция $\varphi(\cdot) = \mu(t) + S(x_1, x_2)$ явно зависит от времени. Тогда принимается: $\dot{\mu}(t) = \nu(t) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$. При $t \to \infty$ для ограниченной функции $|\mu(t)| < \infty$ выполняется условие: $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(t) = 0$, и оптимизационная процедура по методу В. Ф. Кротова совпадает со схемой вычислений по методу динамического программирования.

На заключительном этапе выполняется подстановка синтезированных законов управления $u = u_{\text{оп}}$ в уравнения системы (30) и находятся аналитические решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ замкнутого регулятором объекта. Результат показан в табл. 2. В зависимости от соотношения значений коэффициентов объекта и функционалов I_i переходные процессы по x_1 и x_2 могут быть асимптотически устойчивыми, экспоненциально или колебательно устойчивыми. Аналитические зависимости табл. 2 показывают, что при использовании оптимальной стратегии управления $u = u_{\text{оп}}$ результаты минимизации по ФОР I_2 и КВОР I_3 совпадают. При линейных относительно $\partial S/\partial x_i$ уравнениях Ляпунова существенно упрощается процедура вычисления коэффициентов A_{12} и A_{22} закона управления. Если при минимизации критерия I_1 из решения алгебраического уравнения Риккати – четырех возможных комби-

Таблица 2

Тип функционала	Функционал I_1: $\alpha_i = \alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{a_3}{r}$	Функционалы I_2, I_3: $\alpha_i = \alpha_2 = \frac{a_3}{r}$	
Характеристическое уравнение $\Delta(p) = 0$	$p^2 + (2\alpha_i a_3 A_{22} - a_2)p + (\alpha_i a_3 A_{12} - a_1) = 0$		
Корни уравнения $\Delta(p) = 0$	$p_{1,2} = \frac{a_2 - 2\alpha_i a_3 A_{22} \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = (2\alpha_i a_3 A_{22} - a_2)^2 - 4(\alpha_i a_3 A_{12} - a_1)$		
Характерные случаи	$D > 0$, $p_{1,2} \in R^1$, $p_1 \neq p_2$, $p_1 < 0$, $p_2 < 0$	$D = 0$, $p_{1,2} = \alpha$, $\alpha < 0$, $\alpha \in R^1$	$D < 0$, $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $\alpha < 0$, $\alpha \in R^1$
Переходный процесс	асимптотически устойчивый	экспоненциально устойчивый	колебательно устойчивый
Сходимость	монотонная	монотонная	квадратичная
Вид аналитического решения	$x_1(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}$, $x_2(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$	$x_1(t) = (L_1 + L_2 t)e^{\alpha t}$, $x_2(t) = (M_1 + M_2 t)e^{\alpha t}$	$x_1(t) = 2A_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi_{01})$, $x_2(t) = 2A_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi_{02})$,
Аналитические выражения для определения коэффициентов	$B_1 = \frac{(2\alpha_i a_3 A_{22} - a_2 + p_1)x_{10} + x_{20}}{p_1 - p_2}$ $B_2 = \frac{(2\alpha_i a_3 A_{22} - a_2 + p_2)x_{10} + x_{20}}{p_2 - p_1}$ $C_1 = \frac{p_1 x_{20} - (\alpha_i a_3 A_{12} - a_1)x_{10}}{p_1 - p_2}$ $C_2 = \frac{p_2 x_{20} - (\alpha_i a_3 A_{12} - a_1)x_{10}}{p_2 - p_1}$	$L_1 = x_{10}$ $L_2 = (2\alpha_i a_3 A_{22} - a_2 + \alpha)x_{10} + x_{20}$ $M_1 = x_{20}$ $M_2 = \alpha x_{20} - (\alpha_i a_3 A_{12} - a_1)x_{10}$	$A_1 = \sqrt{0{,}25x_{10}^2 + \chi_1^2}$, $\cos\varphi_{01} = \frac{x_{10}}{2A_1}$ $A_2 = \sqrt{0{,}25x_{20}^2 + \chi_2^2}$, $\cos\varphi_{02} = \frac{x_{20}}{2A_2}$ $\chi_1 = \frac{(2\alpha_i a_3 A_{22} - a_2 + \alpha)x_{10} + x_{20}}{2\beta}$ $\chi_2 = \frac{\alpha x_{20} - (\alpha_i a_3 A_{12} - a_1)x_{10}}{2\beta}$

Таблица 3

Тип функционала	Функционал I_1	Функционалы I_2, I_3
Коэффициенты закона управления	$A_{12} = 43{,}396$ $A_{22} = 5{,}753$	$A_{12} = 19{,}1213$ $A_{22} = 6{,}1424$
Закон управления	$u = u_{\text{оп}} = 1{,}808x_1 + 0{,}479x_2$	$u = u_{\text{оп}} = 1{,}5934x_1 + 1{,}0237x_2$
Аналитические решения	$x_1(t) = 0{,}3536e^{-1{,}6875t} \times$ $\times \cos(2{,}4509t + 1{,}8575)$ $x_2(t) = 1{,}0522e^{-1{,}6875t} \times$ $\times \cos(2{,}4509t + 0{,}3163)$	$x_1(t) = 0{,}0615e^{-2{,}3502t} -$ $- 0{,}1615e^{-7{,}0879t}$ $x_2(t) = -0{,}1445e^{-2{,}3502t} +$ $+ 1{,}1446e^{-7{,}0878t}$
Прямые показатели качества переходных процессов по углу атаки	$t_{\text{ср}} = 1{,}05\,\text{с}$ $t_{\text{р}} = 1{,}9\,\text{с}$ $\Delta h_m = 3{,}73$ град $\Delta_{\text{ст}}(t = 3\,\text{с}) = 0{,}006$ град	$t_{\text{ср}} = 0{,}2\,\text{с}$ $t_{\text{р}} = 1{,}81\,\text{с}$ $\Delta h_m = 0{,}8$ град $\Delta_{\text{ст}}(t = 3\,\text{с}) = 0{,}003$ град

наций этих коэффициентов требуется выбрать одну комбинацию с положительными вещественными значениями, то для критериев I_2 и I_3 такая комбинация единственна. Это подтверждает вывод о неединственности решения задачи Коши (4), (5) и, как следствие, решения задачи синтеза ОУ по критерию Летова–Калмана в случае, когда условия существования оптимального процесса не могут быть получены в аналитической форме.

Применение критериев I_2 и I_3 имеет и другие преимущества. Коэффициенты A_{12} и A_{22} в законе управления не зависят от параметров a_3 и r, и выражения, определяющие вид аналитических решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$, легко поддаются формальному анализу. Так, например, существенное увеличение коэффициента r ухудшает качество переходных процессов по x_1 и x_2, и при $r \to \infty$ имеет место колебательная система (30) с разомкнутой обратной связью по управлению ($u = 0$). В примере при $r = 124{,}65465\,\text{рад}^{-2}$ управляемый по критериям I_2, I_3 процесс (30) становится колебательным.

Другим важным преимуществом является существенное расширение области задания возможных значений весовых коэффициентов r при управлении в функционалах I_2, I_3 по сравнению с критерием I_1. Границы области, в которой наблюдается асимптотическая устойчивость процессов управления, для неклассических функционалов составляют $r \in [1{,}2;\ 124{,}65]$, для функционала Летова–Калмана – $r \in [17{,}21;\ 46{,}05]$.

Результаты моделирования выбранного в примере режима полета гипотетического самолета по аналитическим зависимостям табл. 2 поясняются рис. 1 и сведены в табл. 3, где обозначено: $t_{\text{ср}}$ – время срабатывания, $t_{\text{р}}$ – время регулирования, Δh_m – перерегулирование, $\Delta_{\text{ст}}(t = t_{\text{к}})$ – статическая ошибка воспроизведения заданного угла атаки в момент времени $t = t_{\text{к}}$.

Из анализа табл. 2, 3 и результатов моделирования (рис. 1) можно сделать вывод, что при одинаковых параметрах a_i системы (30) и коэффициентах q_j, r функционалов I_i применение критериев I_2 и I_3 позволяет получить наилучшее качество процессов управления как по характеру их протекания, так и в смысле указанных выше прямых показателей.

Применение функционалов качества I_1 и I_2 постулирует поиск оптимальной стратегии управления: $u = u_{\text{оп}}$. В отличие от формулировок задач синтеза ОУ по кри-

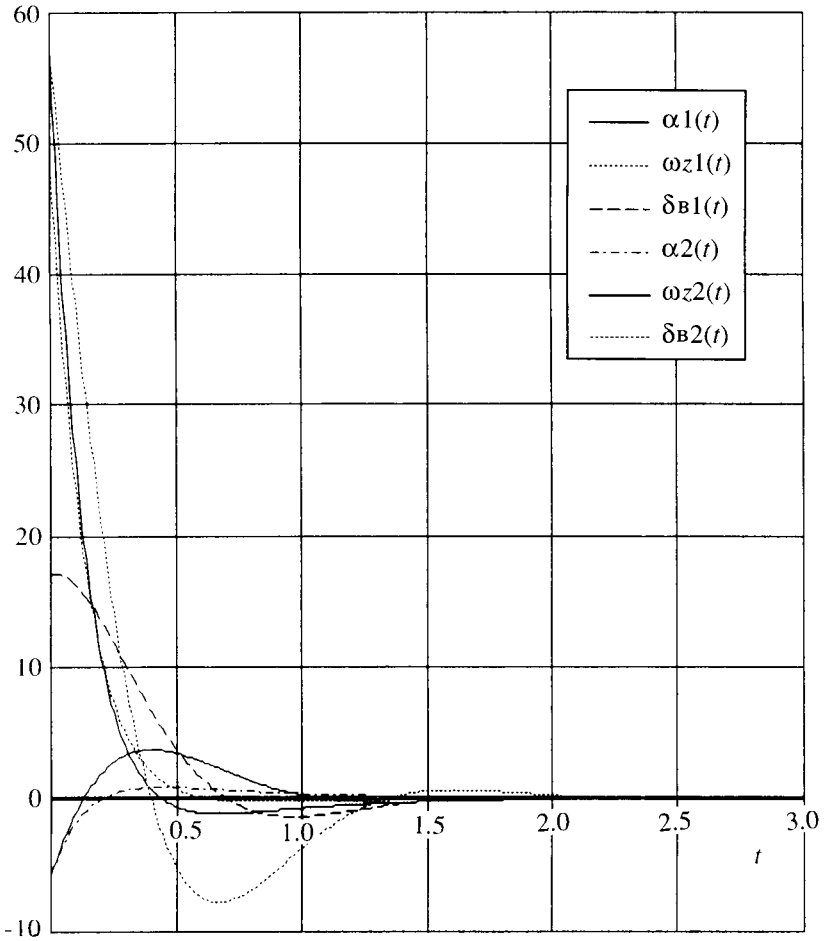

Рис. 1. Переходные процессы при оптимальных законах управления, синтезированных по различным критериям качества: $\alpha 1$, $\omega z1$, δ в 1; $\alpha 2$, $\omega z2$, δ в 2 – соответственно углы атаки, угловые скорости вращения вокруг поперечной оси, оптимальные отклонения руля высоты при применении критериев I_1 и I_2, I_3; t – время в секундах

териям Летова–Калмана и А. А. Красовского минимизация предлагаемого функционала качества не ограничивается только случаем $u = u_{\text{оп}}$ и предполагает выбор любой другой подходящей по условиям задачи стратегии поиска управления относительно функции $u_{\text{оп}}$. В качестве такой стратегии может быть выбрана:

а) двухпозиционная стратегия управления: $u = U_i \operatorname{sign} u_{\text{оп}}$, $i = 1, 2$, $U_1 \leqslant u \leqslant U_2$;

б) комбинированная стратегия управления: $u = U_i \operatorname{sat} u_{\text{оп}}$, т.е. $u = u_{\text{оп}}$, если $u \in \operatorname{int} U$, $U \subseteq R^1$, и $u = U_i \operatorname{sign} u_{\text{оп}}$, если $|u| \geqslant U_i$;

в) инвариантная стратегия управления [13], когда функция u выбирается из условия: $\dot{I}_3 = 0$ на интервале времени $[t_0, t_{\text{к}}]$ (в примере функция управления равна: $u = \dfrac{q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2}{r u_{\text{оп}}}$);

г) стратегия управления с сингулярностью $u = 0$;

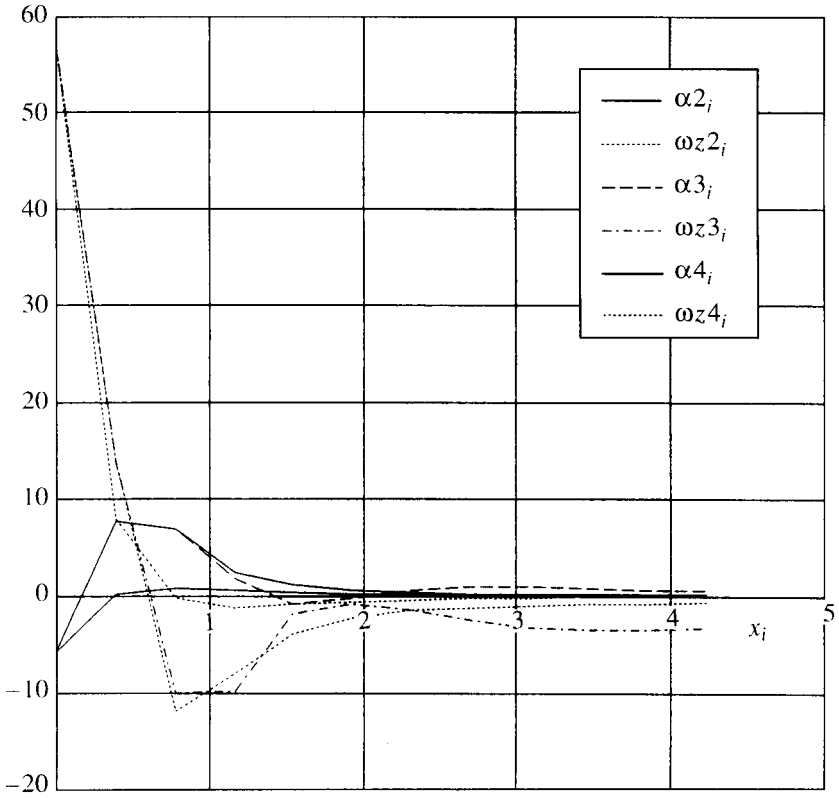

Рис. 2. Результаты численного моделирования для режимов малых и больших отклонений руля высоты: $\alpha 2_i, \omega z 2_i$; $\alpha 3_i, \omega z 3_i$; $\alpha 4_i, \omega z 4_i$ – соответственно углы атаки и угловые скорости вращения вокруг поперечной оси при стабилизации движения самолета в продольной плоскости по линейному, релейному и линейно-релейному законам управления; x_i – время в секундах

д) итерационно-релаксационная стратегия совмещенного синтеза управления: $u \to u_{\text{оп}}$ на малых интервалах оптимизации $\Delta t \in T$, $T = [t_0, t_{\text{к}}]$.

Стратегия совмещенного синтеза $u \to u_{\text{оп}}$ в рассматриваемых нами конструкциях (17)–(19) является основной и требует отдельного рассмотрения.

Стратегии а), б) соответствуют режиму больших отклонений от заданного движения ($\alpha_{\text{зад}} = 0$) и формулировке задачи синтеза с ограничениями на управление. Результаты моделирования при ограничениях $U_1 = -40$ град, $U_2 = 40$ град, демонстрирующие отличие режимов малых (линейный закон управления: $u = u_{\text{оп}}$) и больших отклонений как по быстродействию (релейный закон: $u = U_i \operatorname{sign} u_{\text{оп}}$), так и по минимуму энергозатрат (релейно-линейный закон: $u = U_i \operatorname{sat} u_{\text{оп}}$), представлены на рис. 2.

Инвариантная стратегия управления при применении КВОР не обеспечивает стабилизации угла атаки (рис. 3). Однако она позволяет достаточно быстро осуществлять гашение угловой скорости при произвольно задаваемых начальных условиях и постоянных возмущениях. Отсюда следует и ее возможное применение: спиральное прогнозирование, стабилизация вращательного движения твердого тела [14].

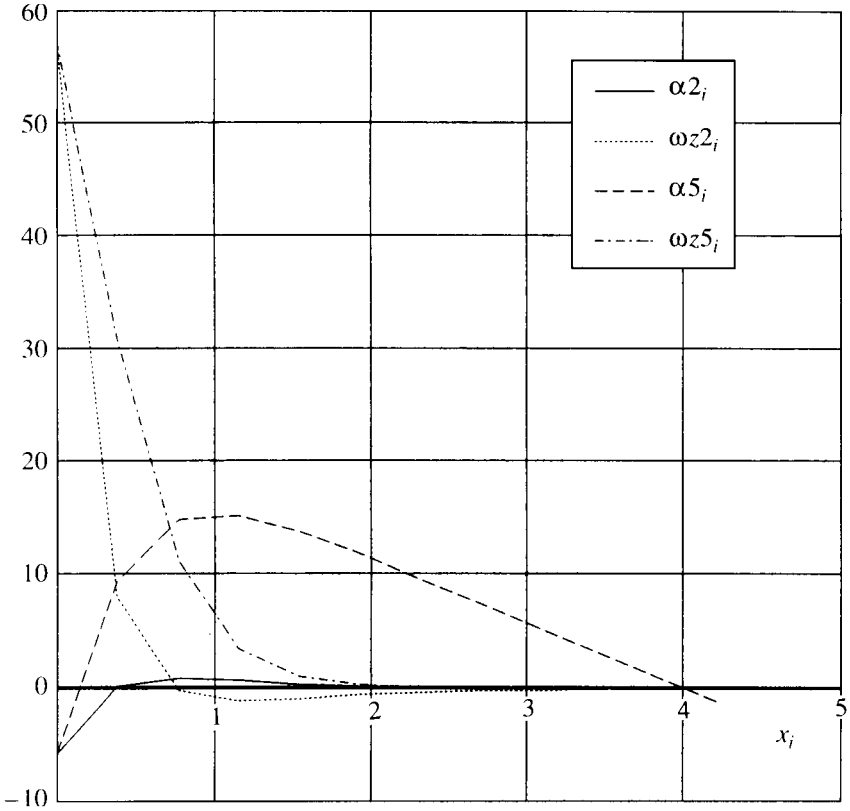

Рис. 3. Результаты численного моделирования при использовании инвариантной стратегии управления: $\alpha 5_i$, $\omega z5_i$ – угол атаки и угловая скорость вращения вокруг поперечной оси при инвариантной стратегии управления; x_i – время в секундах

Стратегия управления с сингулярностью $u = 0$ отражает уникальное свойство оптимизации по неклассическим функционалам качества – обращение в нуль ОУ на естественном (свободном) движении объекта. Однако это свойство вовсе не означает, что синтез ОУ на всем интервале времени $[t_0, t_к]$ возможен по уравнениям свободного движения системы (30) и главной части (при $u = 0$) функционала I_3, так как состояния x_i однозначно определяются управлением u, а функция u зависит, в свою очередь, от координат x_i (рис. 4). Фактически же здесь это взаимно однозначное соответствие потеряно, и требуется доопределение внутренних вариационных связей процесса управления через оптимизацию начальных условий свободного движения объекта. Несмотря на многочисленные публикации [11], посвященные разработке теории универсальных алгоритмов совмещенного (на малых интервалах оптимизации $\Delta t \in [t_0, t_к]$) синтеза управлений в этом практически важном случае; математически строгих, справедливых на всем отрезке $[t_0, t_к]$ методов оптимизации до сих пор не создано. Проблема здесь заключается в том, что задача ОУ по постановке является сингулярной (вырожденной в обычном смысле), а методов и тем более формализованных алгоритмов ее решения насчитывается не так уж много [15].

Таким образом, проведенный в примере сравнительный анализ аналитических и численных решений системы (30) с регуляторами, синтезированными по различным критериям качества, показывает, что предлагаемый функционал обладает все-

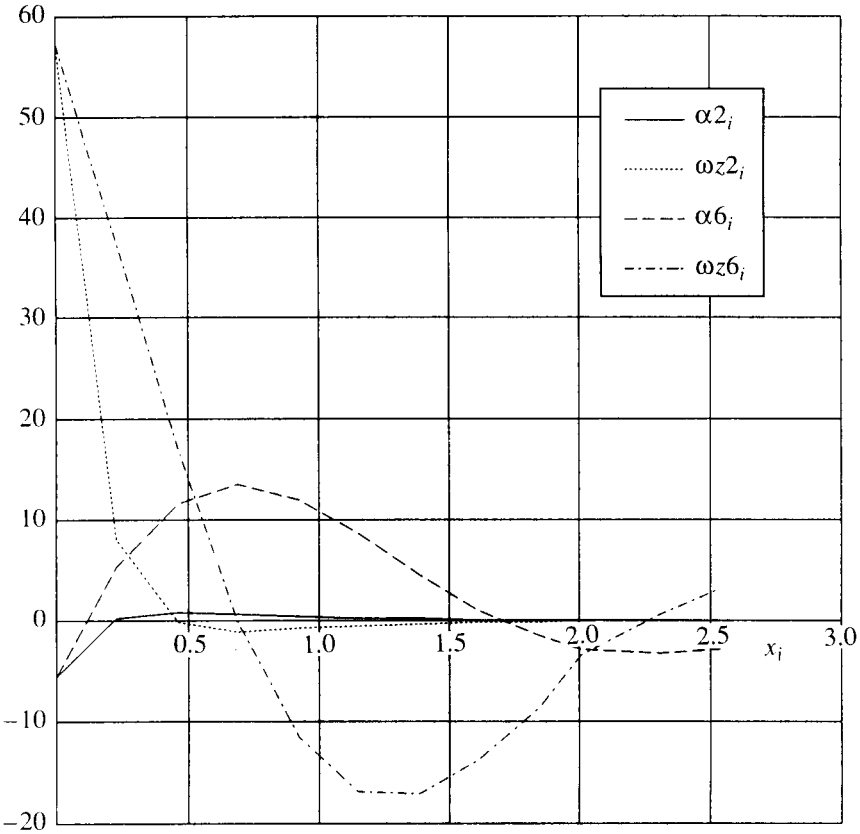

Рис. 4. Результаты численного моделирования при использовании стратегии управления с сингулярностью $u = 0$: $\alpha 6_i$, $\omega z6_i$ – угол атаки и угловая скорость вращения вокруг поперечной оси при стратегии управления с сингулярностью $u = 0$; x_i – время в секундах

ми достоинствами ФОР А. А. Красовского, но в то же время позволяет осуществить гибкую по условиям задачи смену стратегии управления относительно функции ОУ.

9. Заключение

В настоящей работе развит принципиально новый подход к решению задачи приближенно-оптимального синтеза регуляторов. Основное отличие от известных подходов состоит в том, что вместо использующих вспомогательные производящие функции конструкций предложено естественное расширение достаточных условий за счет необходимых условий локальной оптимальности, справедливых при произвольной вектор-функции управления. Впервые сформулирована задача АКОР по неклассическим функционалам качества в вырожденной (синергетической) постановке; обоснован выбор заранее постулируемого критерия, обеспечивающего условия многосвязности (многокритериальности) и многовариантности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980.
2. *Красовский А. А.* Алгоритмические основы оптимальных адаптивных регуляторов нового класса // АиТ. 1995. № 9. С. 104–116.

3. *Буков В. Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.
5. *Черноусько Ф. Л., Баничук В. П.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
6. *Jacobson D. H.* Differential dynamic programming methods for solving bang-bang control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. No. 6. P. 661–675.
7. *Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969.
8. *Гурман В. И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
9. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
10. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1998.
11. *Красовский А. А.* Неклассические целевые функционалы и проблемы теории оптимального управления (обзор) // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 3–41.
12. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982.
13. *Хрусталев М. М.* Методы теории инвариантности в задачах синтеза законов терминального управления летательными аппаратами. М.: Изд-во МАИ, 1987.
14. *Крутько П. Д.* Симметрия и обратные задачи динамики управляемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 6. С. 17–46.
15. *Гурман В. И., Дыхта В. А., Колокольникова Г. А.* Нелокальные преобразования вырожденных задач оптимального управления и импульсные режимы. Иркутск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А. А. Красовским.

Поступила в редакцию 26.04.99