ОКТЯБРЬ 1971 г., ТОМ VII, № 10

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.946

О ПРИНЦИПЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И. И. ГОЛИЧЕВ

1. Пусть D_0 — плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие, L_1 и L_2 — симметрические на D_0 линейные операторы. Обозначим через L_0 оператор L_1+iL_2.

Оператор L_0 имеет замыкание. В самом деле, оператор $L_1-iL_2=L_0^+\subset L_0^*$, поэтому L_0^* определен на плотном в H множестве, но тогда существует $L_0^{**}=\overline{L}_0$ (здесь и в дальнейшем черточка наверху означает замыкание множества или оператора).

В абстрактном гильбертовом пространстве H построим «модель» принципа расщепления дифференциальных операторов.

Обозначим через $\nu(A,\lambda)$, где λ — вещественное число, максимальную размерность многообразия $G(A,\lambda)\subset D(A)$, на котором выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}(Ay,y)-\lambda(y,y)<0,\qquad y\in(A,\lambda).$$

Далее, обозначим через $N(A,\lambda)$ общую кратность собственных значений оператора A в полуплоскости $[z:\operatorname{Re}z<\lambda]$.

В дальнейшем будем предполагать, что в пространстве H задана возрастающая последовательность проекторов $\{P_k\}$, сильно сходящаяся к единичному оператору E, и, D_0, L_0, L_1, $\{P_k\}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Для любого $\varphi\in D_0$ найдется k, что $P_k\varphi=\varphi$.

2) Для любого k множество $D_0^k=P_k(D_0)\cap D_0$ всюду плотно в $H_k=P_k(H)$, а множество $R_0^k=Q_k(D_0)\cap D_0$ $(Q_k=E-P_k)$ всюду плотно в $H\ominus H_k$.

3) $L_i(D_0^k)\subset H_k$, а $L_i(R_0^k)\subset H\ominus H_k$ $(i=0,1,2)$.

4) Для любого k существует оператор $M_1^{(k)}$ $(D(M_1^{(k)})=D_0^k)$ такой, что для любого $\varphi\in D_0^k$ $(L_1\varphi,\varphi)\geqslant(M_1^{(k)}\varphi,\varphi)$ и оператор $M_1^{(k)}$ имеет полуограниченное снизу самосопряженное расширение $\tilde{M}_1^{(k)}$ с дискретным спектром.

5) Оператор L_1 имеет самосопряженное расширение $\tilde{L}_1$ такое, что если $\varphi\in H_k\cap D(\tilde{L}_1)$, то $\varphi\in D(\overline{L}_1^{(k)})$. Оператор L_0 имеет расширение $\tilde{L}_0$, у которого существует точка регулярности, и если $\varphi\in H_k\cap D(\tilde{L}_0)$, то $\varphi\in D(\overline{L}_0^{(k)})$ (здесь $L_1^{(k)}$ и $L_0^{(k)}$ — сужения операторов L_1 и L_2 на D_0^k).

6) По любым k, $\varepsilon>0$ и $\varphi\in D(\tilde{L}_i)$ $(i=0,1)$ найдется $\psi\in H_{k+1}\cap D(\tilde{L}_i)$, что $P_k(\varphi-\psi)=0$ и $\|\psi-P_k\varphi\|\leqslant\varepsilon$.

7) Пусть $A_0^{(k)}$ и $A_1^{(k)}$ — сужения операторов L_0 и L_1 на $\tilde{R}_0^k$ и $\tilde{R}_1^k$ соответственно, где $\tilde{R}_i^k = D(\tilde{L}_i) \cap H \ominus H_k$ $(i = 0, 1)$, тогда $C(\tilde{L}_i) = C(A_i^{(k)})$ $(i = 0, 1)$ для любого k ($C(T)$ — непрерывный спектр оператора T).

8) Если $A_1^{(k)}$ полуограничен снизу, то $\tilde{L}_1$ также полуограничен снизу.

Если в условиях 1) — 8) $\tilde{L}_1 = \bar{L}_1$, а $\tilde{L}_0 = \bar{L}_0$, то справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы* $C(\bar{L}_1) \cap (-\infty, \lambda) = \theta$ (θ — *пустое множество*) *и при любом* $\varepsilon > 0$ $N(\bar{L}_1, \lambda - \varepsilon)$ *было конечным, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое* $k = k(\varepsilon)$, *что*

$$(L_1\varphi, \varphi) - (\lambda - \varepsilon)(\varphi, \varphi) \geqslant 0 \tag{1}$$

для любого $\varphi \in R_0^k$.

Доказательство. Допустим, что $N(\bar{L}_1, \lambda - \varepsilon)$ конечно, но не найдется k, для которого выполнено (1). Тогда в силу 1) найдется нормированная последовательность $\{\varphi_n\}$ такая, что $\varphi_n \in (P_{n_2} - P_{n_1})(D_0) \cap D_0$, где отрезки $[n_1, n_2]$ уходят в $+\infty$ при $n \to \infty$ и

$$(L_1\varphi_n, \varphi_n) - (\lambda - \varepsilon)(\varphi_n, \varphi_n) < 0.$$

Очевидно, из последовательности $\{\varphi_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_\nu\}$, что отрезки $[\nu_1, \nu_2]$ не пересекаются, следовательно, последовательность $\{\varphi_\nu\}$ ортонормированная. Тогда на линейной оболочке $\{\varphi_\nu\}$ выполняются неравенства

$$(L_1\varphi, \varphi) - (\lambda - \varepsilon)(\varphi, \varphi) < 0,$$

т. е. $\nu(\bar{L}_1, \lambda - \varepsilon) = \infty$. Но по теореме 13^{bis} (гл. 1 [1]) $\nu(\bar{L}_1, \lambda - \varepsilon) = m$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия (1). Наоборот, если условие (1) выполнено, то по 7) $C(\bar{L}_1) \cap (-\infty, \lambda - \varepsilon) = \theta$ при любом $\varepsilon > 0$, тогда также $C(\bar{L}_1) \cap (-\infty, \lambda) = \theta$. По условию 8) $\bar{L}_1$ полуограничен и, следовательно, $N(\bar{L}_1, \lambda - \varepsilon)$ конечно при любом $\varepsilon > 0$. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 1. Если $C(\bar{L}_1) \cap (-\infty, \lambda) = \theta$, оператор L_1 полуограничен, для любого $y \in D_0$ $(L_1y, y) \leqslant (M_1y, y)$, где $\bar{M}_1$ — самосопряженный оператор и M_1, $\bar{M}_1$ удовлетворяют условиям 1) — 8), то из теоремы 5, очевидно, следует $C(\bar{M}_1) \cap (-\infty, \lambda) = \theta$.

Теорема 2. *Пусть* $\bar{L}_1$ — *полуограниченный и* $C(\bar{L}_1) \cap (-\infty, \lambda) = \theta$, *тогда* $C(\bar{L}_0) \cap [Z : \operatorname{Re} z < \lambda] = \theta$.

Доказательство. Из условий теоремы 2 и теоремы 1 следует, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется $k = k(\varepsilon)$, что $[z : z = (L_0y, y),\ y \in R_0^k] \cap [z : \operatorname{Re} z < \lambda - \varepsilon] = \theta$ и поэтому $C(A_0^{(k)}) \cap [z : \operatorname{Re} z < \lambda - \varepsilon] = \theta$. Откуда, учитывая 7), получим, что $C(\bar{L}_0) \cap [z : \operatorname{Re} z < \lambda - \varepsilon] = \theta$ и, следовательно, $C(\bar{L}_0) \cap [z : \operatorname{Re} z < \lambda] = \theta$.

Замечание 2. Из теорем 1 и 2 легко получить следующее утверждение: если по любому $C > 0$ найдется $k = k(C)$, что для любого $\varphi \in R_0^k$ $(L_1\varphi, \varphi) - C(\varphi, \varphi) > 0$, то спектры операторов $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_0$ дискретны.

Пусть a — вещественное положительное число, тогда имеет место

Теорема 3. *Если по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $k = k(a, \varepsilon)$, *что* $\left((L_1 \pm aL_2)y, y\right) > -\varepsilon(y, y)$ *на* R_0^k, *то* $C(\bar{L}_0) \subset \left[z : |\arg z| \leqslant \operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}\right]$.

Доказательство. В силу условий теоремы по любому $\varepsilon > 0$ и любому $n > 1$ найдется k, что

$$\left(\left(L_1 + \frac{n-1}{n}\varepsilon\right) y,\ y\right) > \frac{\varepsilon}{2}(y,\ y), \qquad y \in R_0^k \tag{2}$$

$$(L_1 y,\ y) \pm a(L_2 y,\ y) > -\varepsilon(y,\ y), \qquad y \in R_0^k. \tag{3}$$

Из последних неравенств следует

$$\left(\left(L_1 + \frac{n-1}{n}\varepsilon\right) y,\ y\right) - a\,|(L_2 y,\ y)| > -\frac{\varepsilon}{n}, \qquad y \in R_0^k$$

и, учитывая неравенство (2), получаем

$$|(L_2 y,\ y)| \Big/ \left(\left(L_1 + \frac{n-1}{n}\varepsilon\right) y,\ y\right) < \frac{1}{a} + \frac{2}{an}, \qquad y \in R_0^k.$$

Но тогда

$$C(\bar{L}_0) = C(A_0^{(k)}) \subset [z : z = (A_0^{(k)} y,\ y),\quad y \in D(A_0^{(k)})] \subset$$
$$\subset \left[z : \left|\arg\left(z + \frac{n-1}{n}\varepsilon\right)\right| < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{an}\right)\right],$$

и в силу произвольности ε и n легко получить утверждение теоремы.

Условие конечности спектра оператора $\bar{L}_0$ вне угла

$$\Lambda_a^\varepsilon = \left[z : |\arg(z+\varepsilon)| < \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a} + \varepsilon\right)\right]$$

при любом $\varepsilon > 0$ дает

Теорема 3′. *Если операторы $\overline{L_1 \pm aL_2}$ самосопряженные, ограниченные снизу и $C(\overline{L_1 \pm aL_2}) \cap (-\infty,\ 0) = \theta$, то вне угла Λ_a^ε лежит, разве лишь, конечное множество собственных значений оператора $\bar{L}_0$.*

Доказательство. Выберем $C > 0$ так, чтобы

$$((L_1 \pm aL_2) y,\ y) + C(y,\ y) \geqslant 0 \quad (y \in D_0).$$

Из неравенства $((L_1 + aL_2) y,\ y) + C(y,\ y) \geqslant 0$ следует, что

$$[z : z = ((L_0 + C) y,\ y),\ y \in D_0] \subset \left[z : \operatorname{Im} z \geqslant -\frac{1}{a}\operatorname{Re} z\right], \tag{4}$$

а из неравенства $((L_1 - aL_2) y,\ y) + C(y,\ y) \geqslant 0$ следует

$$[z : z = ((L_0 + C) y,\ y),\ y \in D_0] \subset \left[z : \operatorname{Im} z \leqslant \frac{1}{a}\operatorname{Re} z\right]. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что значение квадратичной формы $(L_0 y,\ y)$, а следовательно, и спектр оператора $\bar{L}_0$ лежат в угле $\Lambda_a = \left[z : |\arg(z+C)| < \operatorname{arctg}\frac{1}{a}\right]$. Легко видеть, что замкнутая область $E^\varepsilon = \Lambda_a \cap C(\Lambda_a^\varepsilon)$ ($C(\Lambda_a^\varepsilon)$ — дополнение множества Λ_a^ε до всей z-плоскости) ограничена. По теореме 3 в E^ε нет предельных точек спектра оператора $\bar{L}_0$ и поэтому их конечное множество. Теорема доказана.

Следствие. *Если условия теоремы 3 выполнены при любом положительном a, то, очевидно, $C(\overline{L}_0) \subset [0, \infty)$. Если при любом a выполняются условия теоремы 3', то вне области $[z: |z| < \varepsilon] \cup [z: |\arg z| < \varepsilon]$ лежит лишь конечное множество собственных значений оператора $\overline{L}_0$ при любом $\varepsilon > 0$.*

2. Лемма 1. *Если самосопряженный оператор A полуограничен и имеет дискретный спектр, то какое бы ни было λ, не существует некомпактной нормированной последовательности $\{y_\nu\} \subset D(A)$, на которой выполняются неравенства*

$$(Ay_\nu, y_\nu) - \lambda(y_\nu, y_\nu) < 0. \tag{6}$$

Доказательство. Выбираем $C > 0$ так, чтобы

$$(Ay, y) + (C - \lambda)(y, y) > (y, y), \qquad y \in D(A).$$

Тогда по теореме Реллиха [2] множество $E = [y: (Ay, y) + (C - \lambda)(y, y) \leqslant 1, \ y \in D(A)]$ компактно. Пусть $\{y_\nu\}$ — нормированная последовательность, на которой выполняются неравенства (6), тогда

$$\{y_\nu\} \subset [y: (Ay, y) + (C - \lambda)(y, y) < C, \ \|y\| = 1, \ y \in D(A)] \subset [y: (Ay, y) + \\ + (C - \lambda)(y, y) \leqslant C, \ y \in D(A)].$$

Но последнее множество компактно вместе с множеством E, поэтому последовательность $\{y_\nu\}$ компактна и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mu_0 \in C(\tilde{L}_0)$, тогда по любому k найдется некомпактная нормированная последовательность $\{u_i\} \subset D(\tilde{L}_0)$ такая, что*

$$\tilde{L}_0 u_i - \mu_0 u_i \to 0, \quad P_k u_i \to 0 \quad \text{и} \quad p_k \tilde{L}_0 u_i \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty, \tag{7}$$

если выполняются условия 1) — 6), а также условие 6'): существует характеристическая последовательность $\{\varphi_\nu\} \subset D(\tilde{L}_0)$ для значения μ_0 и по последовательности $\{\varphi_\nu\}$ можно найти последовательность $\{\tilde{\varphi}_\nu\} \subset D_0(\overline{L}_0^{(k+1)})$, что $P_k(\tilde{\varphi}_\nu - \varphi_\nu) = 0$, а последовательность $\{\tilde{L}_0 \tilde{\varphi}_\nu\}$ ограничена.

Доказательство. Так как последовательность $\{\varphi_\nu\}$ характеристическая, то

$$\tilde{L}_0 \varphi_\nu - \mu_0 \varphi_\nu = h_\nu \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty. \tag{8}$$

Покажем, что последовательность $\{P_k \varphi_\nu\}$ компактна. Для этого достаточно показать, что последовательность $\{\tilde{\varphi}_\nu\}$ компактна.

Допустим, что последовательность $\{p_k \varphi_\nu\}$, а вместе с ней и последовательность $\{\tilde{\varphi}_\nu\}$ некомпактны. Можно считать, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\|P_k \varphi_\nu\| \geqslant \varepsilon_0$ и тем более $\|\tilde{\varphi}_\nu\| \geqslant \varepsilon_0$ (в противном случае при некотором $\varepsilon_0 > 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\tilde{L}_0 \tilde{\varphi}_{\nu_i}\}$, что $\|P_k \varphi_{\nu_i}\| > \varepsilon_0$). Тогда, учитывая ограниченность последовательности $\{\tilde{L}_0 \tilde{\varphi}_\nu\}$, можно утверждать, что найдется такое $C_1 > 0$, что

$$|(\tilde{L}_0 \tilde{\varphi}_\nu, \tilde{\varphi}_\nu)| \leqslant C_1 (\tilde{\varphi}_\nu, \tilde{\varphi}_\nu). \tag{9}$$

Так как $\tilde{\varphi}_\nu \in D(\widetilde{L_0^{(k+1)}})$, то из (9) следует, что найдется некомпактная ограниченная последовательность $\{\psi_\nu\} \subset D_0^{k+1}$ и $C_2 > 0$, что

$$|(\tilde{L}_0 \psi_\nu, \psi_\nu)| < C_2 (\psi_\nu, \psi_\nu). \tag{10}$$

Из неравенства (10) следует $(L_1\psi_\nu, \psi_\nu) - C_2(\psi_\nu, \psi_\nu) < 0$ и тем более

$$(\widetilde{M_1^{(k+1)}}\psi_\nu, \psi_\nu) - C_2(\psi_\nu, \psi_\nu) < 0. \tag{11}$$

Но оператор $\widetilde{M_1^{(k+1)}}$ полуограничен, самосопряжен и имеет дискретный спектр. Тогда неравенство (11) противоречит лемме 1.

Таким образом доказано, что последовательность $\{P_k\tilde{L}_0^{-1}\varphi_\nu\}$ компактна при любом k. Из соотношений (9) следует, что последовательность $\{P_k\varphi_\nu\}$ также компактна, а из (8) следует компактность последовательности $\{P_k\tilde{L}_0\varphi_\nu\}$.

Так как последовательность $\{\varphi_\nu\}$ некомпактна, то существует подпоследовательность $\{\varphi_{\nu_i}\}$, что

$$\rho(\varphi_{\nu_i}, \mathfrak{B}_{i-1}) \geqslant \varepsilon_1, \tag{12}$$

где $\mathfrak{B}_{i-1}$ — подпространство, порожденное векторами $\{\varphi_{\nu_n}\}_1^{i-1}$, а $\rho(\varphi_{\nu_i}, \mathfrak{B}_{i-1})$ — расстояние от φ_{ν_i} до $\mathfrak{B}_{i-1}$. Будем считать, что сама последовательность $\{\varphi_\nu\}$ такова.

Пусть $\{\varphi_{\nu_n}\} = \{\varphi_n\}$ — подпоследовательность такая, что $P_k\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$. Очевидно, $\{\varphi_n\}$ некомпактна. Покажем, что $v_n = \varphi_{2n} - \varphi_{2n-1}$ также некомпактна и не содержит компактно подпоследовательности. В самом деле, если $n > m$, то ввиду (12)

$$\|v_n - v_m\| = \|\varphi_{2n} - (\varphi_{2n-1} - \varphi_{2m} + \varphi_{2m-1})\| \geqslant \varepsilon_1.$$

Очевидно, $P_kv_n \to 0$ при $n \to \infty$, а так как последовательность $\{P_k\tilde{L}_0v_n\}$ компактна, то существует подпоследовательность $\{v_{n_i}\} = \{v_i\}$, что $P_k\tilde{L}_0v_i \to q$ при $i \to \infty$. Образуя последовательность $\{\tilde{u}_i\} = \{v_{2i} - v_{2i-1}\}$, доказываем, что $\{\tilde{u}_i\}$ некомпактна и ограничена. Очевидно, для последовательности $\{\tilde{u}_i\}$ выполняются все соотношения (7) и остается только пронормировать ее.

3. Пусть W — открытая область в n-мерном евклидовом пространстве E_n, а ω_k — ограниченные подобласти области W такие, что $\omega_{k+1} \supset \omega_k$, $\rho(\Gamma_{k+1}, \omega_k) = \delta_k > 0$ (здесь Γ_{k+1} — граница области ω_{k+1}) и $W = \bigcup \omega_k$. Обозначим через x точку пространства E_n, через x_p — ее p-ю координату и $|x|^2 = \sum_{p=1}^{n} x_p^2$.

Пусть далее на W задано дифференциальное выражение

$$l = -\sum_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{pj}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_p b_p(x)\frac{\partial}{\partial x_p} + c(x),$$

где $a_{pj}(x)$, $b_p(x)$, $c(x)$, а также первые и вторые частные производные $a_{pj}(x)$ и первые производные $b_p(x)$ — непрерывные комплекснозначные функции. Через D_0 обозначим множество функций φ, на которых имеет смысл дифференциальное выражение l (то есть существуют частные производные от функций φ, $a_{pj}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ по x_p ($p, j = 1, 2, \ldots, n$) в обычном смысле), $l\varphi \in L_2(W)$ и равных нулю вне некоторого ω_k $(k = k(\varphi))$.

Представим дифференциальное выражение l в виде

$$l = \frac{l + l^*}{2} + i\,\frac{l - l^*}{2} = l_1 + il_2,$$

где l_1 и l_2 самосопряженные дифференциальные выражения

$$l_1 = -\sum_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{a_{pj}(x)+\overline{a}_{jp}(x)}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\sum_p\left(i\,\mathrm{Im}\,b_p(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_p}\overline{b}_p(x)\right)+\mathrm{Re}\,c(x),$$

$$l_2 = -\sum_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{a_{pj}(x)-a_{jp}(x)}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-i\sum_p\left(\mathrm{Re}\,b_p(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_p}\overline{b}_p(x)\right)=\mathrm{Im}\,c(x).$$

Дифференциальными выражениями l, l_1 и l_2 определяем операторы L_0, L_1, L_2 на D_0.

Обозначим через P_k проекторы из $L_2(W)$ на $L_2(\omega_k)$. Очевидно, условия 1) — 3) выполнены. Так же, как в п. 1, определяются D_0^k, R_0^k, $L_i^{(k)}$, $\tilde{L}_i$, $A_i^{(k)}$ $(i=0,\ 1)$.

Для выполнения условий 4) — 8) потребуются дополнительные ограничения на коэффициенты дифференциального выражения.

Теорема 4. *Если для любой системы комплексных чисел $\{\xi_p\}$ и любого $x\in\omega_k$ найдется $\alpha=\alpha(k)>0$, что*

$$\mathrm{Re}\sum_{p,j} a_{pj}(x)\,\xi_p\overline{\xi}_j \geqslant \alpha\sum_p|\xi_p|^2, \tag{13}$$

то выполняется условие 4).

Заметим, что из (13) следует

$$\mathrm{Re}\,a_{pj}(x)>0. \tag{14}$$

Доказательство. Так как в области ω_k функции $|b_p(x)|$ ограничены, то по любому $\alpha_1\in(0,\ \alpha)$ найдется $C>0$, что

$$|b_p(x)|^2\leqslant\alpha_1 C. \tag{15}$$

Используя (13), получаем, что для любого $u\in D_0^k$

$$(L_1u,\ u)=\mathrm{Re}\,(L_0u,\ u)\geqslant\alpha\int_{\omega_k}\sum_p\left|\frac{\partial u}{\partial x_p}\right|^2dx+$$

$$+\mathrm{Re}\int_{\omega_k}b_p(x)\frac{\partial u}{\partial x_p}\overline{u}dx+\int_{\omega_k}\mathrm{Re}\,c(x)\,|u|^2dx.$$

Воспользовавшись неравенством (15) и неравенством Коши — Буняковского, легко получить из последнего неравенства, что

$$(L_1u,\ u)\geqslant(\alpha-\alpha_1)\int_{\omega_k}\sum_p\left|\frac{\partial u}{\partial x_p}\right|^2dx+\int_{\omega_k}(\mathrm{Re}\,c(x)-C)\,|u|^2dx,\quad U\in D_0^k.$$

Отсюда следует, что условие 4) выполняется, если за $\overline{M}_1^{(k)}$ взять минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$m = -\alpha_2 \sum_p \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \operatorname{Re} c(x) - C$$

в $L_2(\omega_k)$, где $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 > 0$.

Замечание 3. Из (14) вытекает следующий факт: если $y \in D_0$, то существует $\frac{\partial^2 y}{\partial x_p^2}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 5. *Если выполнено условие (13) и условия 5), 6), то выполняется также условие 7).*

Доказательство. Очевидно, если $\mu_0 \in C(A_0^{(k)})$, то $\mu_0 \in C(\tilde{L}_0)$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mu_0 \in C(\tilde{L}_0)$, тогда по лемме 2*) найдется некомпактная нормированная последовательность $\{u_i\} \subset D(\tilde{L}_0)$, что выполнены соотношения (7). Построим гладкую функцию $\tau_1(x)$ такую, что $\tau_1(x) = 1$, когда $x \in \omega_{k-1}$, $\tau_1(x) = 0$, если $x \bar{\in} \omega_k$ и $|\tau_1(x)| \leqslant 1$, а $\left|\frac{\partial \tau_1}{\partial x_p}\right| < C_1$ (через C_i и α_i будем обозначать положительные постоянные) при любом $x \in W$. Обозначим $v_i = (1 - \tau_1) u_i$. Очевидно, $v_i = \widetilde{R_0^{(k-1)}}$. Докажем, что

$$\lim_{i \to \infty} (\tilde{L}_0 v_i - \mu_0 v_i) = 0, \tag{16}$$

тогда $\mu_0 \in C(A_0^{(k-1)})$.

Действительно,

$$\tilde{L}_0 v_i - \mu_0 v_i = (\tilde{L}_0 u_i - \mu_0 u_i) - \tilde{L}_0(\tau_1 u_i) - \mu_0 \tau_1 u_i.$$

Так как выполнены соотношения (7), то достаточно доказать, что

$$\tilde{L}_0(\tau_1 u_i) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{17}$$

Но

$$\tilde{L}_0 \tau_1 u_i = \tau_1 \tilde{L}_0 u_i + u_i \left[-\sum_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(a_{pj}(x) \frac{\partial \tau_1}{\partial x_j} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_p b_p(x) \frac{\partial \tau_1}{\partial x_p} \right] - \sum_{p,j} (a_{pj}(x) + a_{jp}(x)) \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial x_j}. \tag{18}$$

Первые два слагаемые правой части (18) в силу соотношений (7) стремятся к нулю при $i \to \infty$. Так как на ω_k функции $|a_{pj}(x)|$ ограничены, то найдется такое $C_2 > 0$, что

$$\left\| \sum_{p,j} (a_{pj}(x) + a_{jp}(x)) \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial x_j} \right\| \leqslant C_2 \int_{\omega_k} \sum_p \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \right|^2 dx = C_2 \Phi_i,$$

поэтому достаточно доказать, что

$$\Phi_i \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{19}$$

Введем функцию $\tau_2(x)$, обладающую такими же свойствами, как $\tau_1(x)$, но вместо k взято $k+1$. Имея ввиду (7), получим

$$(\tilde{L}_0 u_i, \tau_2^2 u_i) = \int \sum_{p,j} a_{pj}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \tau_2^2 dx +$$

*) Справедливость условия 6′) доказывается почти так же, как ниже соотношение (17).

$$+\int\sum_{p,j} a_{pj}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\bar{u}_i\frac{\partial \tau_2}{\partial x_j}2\tau_2 dx+\int\sum_p b_p(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\bar{u}_i\tau_2^2 dx+$$

$$+\int c(x)|u_i|^2\tau_2^2 dx\to 0, \qquad (20)$$

когда $i\to\infty$. Так как функция $c(x)\tau_2^2(x)$ ограничена и равна нулю вне ω_{k+1}, то по (7) четвертый интеграл правой части последнего соотношения стремится к нулю при $i\to\infty$.

Воспользовавшись условием (13), находим

$$\operatorname{Re}\int\sum_{p,j} a_{pj}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\tau_2^2 dx\geqslant\alpha\int\sum_p\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\right|^2\tau_2^2 dx=\alpha\Phi_i'. \qquad (21)$$

Оценим, далее, второй и третий интегралы правой части (20). Обозначим $\psi(x)=\max\limits_p\left[\left|\frac{\partial\tau_2}{\partial x_p}\right|\right]$; в силу ограниченности $|a_{pj}(x)|$ в ω_{k+1} и неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\int\sum_{p,j} a_{pj}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\tau_2\frac{\partial\tau_2}{\partial x_j}\bar{u}_i dx\right|\leqslant C_3\int\limits_{\omega_{k+1}}\sum_p\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\right||\tau_2|\times$$

$$\times|u_i|\psi dx\leqslant C_4\sqrt{\Phi_i'}\beta_i, \qquad (22)$$

где $\beta_i=\int\limits_{\omega_{k+1}}|u_i|^2|\psi|^2 dx\to 0$ при $i\to\infty$.

Аналогичным образом доказывается, что

$$\left|\int\sum_p b_p(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\bar{u}_i\tau_2^2 dx\right|\leqslant C_5\sqrt{\Phi_i'}\gamma_i, \qquad (23)$$

где $\gamma_i\to 0$ при $i\to\infty$.

Допустим, что из последовательности $\{\Phi_i'\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\Phi_{i_\nu}'\}=\{\Phi_\nu'\}$ такую, что $\Phi_\nu'\geqslant\alpha_3>0$; тогда оценки (21) — (23) противоречат соотношению (20). Таким образом $\Phi_i'\to 0$ при $i\to\infty$. А так как $\Phi_i'\geqslant\Phi_i\geqslant 0$, то $\Phi_i\to 0$ при $i\to\infty$, поэтому доказано, что $C(\tilde{L}_0)=C(A_0^{(k)})$. Очевидно, из доказанного можно получить, что также $C(\tilde{L}_1)=C(A_1^{(k)})$. При дополнительных условиях $a_{pj}(x)=\bar{a}_{jp}(x)=a_{jp}(x)$, $b_p(x)=0$ и $\operatorname{Im} c(x)=0$ теорема 5 была доказана М. М. Бирманом [1] (см. n° 20).

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы 5, то выполняется условие 8).*

Для доказательства потребуется

Лемма 3. *Если оператор $\tilde{L}_1$ обладает последовательностью собственных значений λ_n, сходящихся к $-\infty$ и $\{\varphi_n\}$ — соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций, то для любого k имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\|P_k\varphi_n\|=0. \qquad (24)$$

Доказательство леммы. Допустим, что для некоторого k найдется такая подпоследовательность $\{\varphi_{n_\nu}\}=\{\varphi_\nu\}$, что

$$\|P_k\varphi_\nu\| \geqslant \alpha > 0. \tag{25}$$

Пусть $\tau_2(x)$ — функция, введенная при доказательстве теоремы 5, тогда ввиду 5) $\tau_2\varphi_\nu \in D(\overline{L}_1^{(k+1)})$ и в силу полуограниченности $L_1^{(k+1)}$

$$(\tilde{L}_1\tau_2\varphi_\nu,\ \tau_2\varphi_\nu) \geqslant -C_6(\tau_2\varphi_\nu,\ \tau_2\varphi_\nu) \geqslant -C_7. \tag{26}$$

Но

$$\tilde{L}_1\tau_2\varphi_\nu = \tau_2\tilde{L}_1\varphi_\nu + \varphi_\nu\tilde{L}_1\tau_2 - \operatorname{Re} c(x)\,\varphi_\nu\tau_2 - $$
$$-\sum_{p,j}[\operatorname{Re}(a_{pj}(x)+a_{jp}(x))]\,\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial\tau_2}{\partial x_j}.$$

Откуда

$$(\tilde{L}_1\tau_2\varphi_\nu,\ \tau_2\varphi_\nu) = \lambda_\nu\int|\varphi_\nu|^2\tau_2^2\,dx + \int|\varphi_\nu|^2\tilde{L}_1\tau_2\,dx -$$
$$-\int\operatorname{Re} c(x)\,\tau_2^2\,|\varphi_\nu|^2\,dx - \int\sum_{p,j}[\operatorname{Re}(a_{pj}(x)+a_{jp}(x))]\,\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial\tau_2}{\partial x_j}\tau_2\overline{\varphi}_\nu\,dx. \tag{27}$$

Так как левая часть и первый интеграл правой части вещественны, то сумма последних трех интегралов равна сумме их вещественных частей. Далее,

$$-\operatorname{Re}\int\sum_{p,j}[\operatorname{Re}(a_{pj}(x)+a_{jp}(x))]\,\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial\tau_2}{\partial x_j}\,\tau_2\overline{\varphi}_\nu\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\sum_{p,j}[\operatorname{Re}(a_{pj}(x)+a_{jp}(x))]\,\frac{\partial|\varphi_\nu|^2}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial\tau_2}{\partial x_j}\,\tau_2\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int|\varphi_\nu|^2\frac{\partial}{\partial x_p}\left[\operatorname{Re}(a_{pj}(x)+a_{jp}(x))\,\tau_2\frac{\partial\tau_2}{\partial x_j}\right]dx.$$

Из последнего соотношения следует, что вещественная часть четвертого интеграла правой части (27) ограничена. Ограниченность второго и третьего интеграла очевидна. Но в силу (25) первый интеграл правой части (27) стремится к 0 при $\nu\to\infty$, тогда из (27) и ограниченности суммы последних трех интегралов правой части (27) следует, что последовательность чисел $\{(\tilde{L}_1\tau_2\varphi_\nu,\ \tau_2\varphi_\nu)\}$ не ограничена снизу; однако последнее противоречит соотношению (26) и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из теоремы 5 следует, что если $A_1^{(k)}$ полуограничен снизу некоторой постоянной, то той же постоянной ограничен снизу непрерывный спектр оператора $\tilde{L}_1$. Таким образом, если предположить, что оператор $A_1^{(k)}$ полуограничен снизу, а $\tilde{L}_1$ не полуограничен, то найдется последовательность собственных значений $\lambda_\nu\to-\infty$ при $\nu\to\infty$.

Пусть $\theta(x)=1-\tau_2(x)$ и $\psi_\nu=\theta(x)\varphi_\nu$. Очевидно, $\psi_\nu\in D(A_1^{(k)})$. Для последовательности $\{\psi_\nu\}$, как и при доказательстве предыдущей леммы, получаем

$$(A_1^{(k)}\psi_\nu,\ \psi_\nu) = (\tilde{L}_1\psi_\nu,\ \psi_\nu) = \lambda_\nu\int|\varphi_\nu|^2\,\theta(x)\,dx + \mu_\nu, \tag{28}$$

где последовательность μ_ν ограничена. Из леммы 3 следует, что

$$\int |\varphi_\nu|^2 \theta(x)\, dx \to 1 \quad \text{при} \quad \nu \to \infty,$$

тогда (28) противоречит полуограниченности снизу оператора $A_1^{(k)}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, доказано: если оператор L_0 порожден дифференциальным выражением l и выполняется условие (13), а также 5), 6), то выполнены условия 1) — 4), 7), 8). Заметим: если расширения операторов $\bar{L}_0$, $\bar{L}_1$ (операторы $\tilde{L}_0$, $\tilde{L}_1$) задаются с помощью граничных условий на конечной части границы, причем $\tilde{L}_1$ самосопряжен, а $\tilde{L}_0$ имеют точку регулярности, то все остальные требования 5), 6), очевидно, выполнены. Заметим, что изложенный выше метод обоснования принципа расщепления может быть применен для дифференциальных операторов в частных производных любого четного порядка. В следующей статье автора будут даны условия существования точки регулярности оператора $\bar{L}_0$ и полуограниченности и самосопряженности оператора $\bar{L}_1$, а также указано применение теорем 1 — 3, 3'.

Литература

1. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, 1963.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», 1969.

Поступила в редакцию 4 мая 1970 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова