*1959 г. март—апрель* *т. XIV, вып. 2 (86)*
*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

# ВПЕЧАТЛЕНИЯ ОТ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОНГРЕССА В ЭДИНБУРГЕ

Для меня наиболее интересным в конгрессе было то, что он подтвердил и еще обострил чувство, складывавшееся и раньше под влиянием математической литературы,—что в последние 10 лет в математике произошли принципиальные изменения, не просто продвинувшие ее вперед по тому направлению, по которому она раньше развивалась, но изменившие само направление ее развития. В разнообразных областях математики достигнуты успехи, опирающиеся на очень близкие друг другу идеи и начал вырабатываться некий общий для всех этих областей язык.

Области, которые я имею в виду,—это алгебраическая теория чисел, алгебраическая геометрия, теория аналитических многообразий (в частности, теория аналитических функций многих переменных), теория дифференцируемых многообразий и топология. Эти области имеют много точек соприкосновения с аналитической теорией чисел, группами Ли и функциональным анализом.

Мне кажется особенно важным, что, несмотря на разнообразие конкретного материала, который здесь охвачен, можно все же говорить об одном направлении в математике, основывающемся на небольшом числе новых идей и понятий. Этой основой, которая связывает все это новое направление, является гомологическая алгебра. Такие понятия, как группы когомологий модулей и групп, спектральные последовательности и группы когомологий пучков, которых еще не существовало лет 10—15 назад, сейчас превратились в стандартный аппарат.

По-видимому, эти новые идеи оказывают косвенное влияние и на такие исследования, в которых они непосредственно не применяются (например, в работах Ботта и Мильнора о порядках гомотопических групп сфер связь с числами Бернулли устанавливается при помощи техники, разработанной Хирцебрухом в связи с его исследованиями по теории гомологий пучков и теореме Римана—Роха).

Дальше я хочу рассказать о тех из доложенных на съезде результатах, которые показались мне особенно интересными. Конечно, далеко не все они непосредственно связаны с гомологической алгеброй, но мне кажется, что то обстоятельство, которое особенно ярко было заметно на конгрессе,— а именно, что как общее количество, так и значительность работ в этих областях возросли в последние годы, находится в связи с появлением идей гомологической алгебры.

Наиболее плодотворно когомологические методы применяются сейчас, пожалуй, в алгебраической геометрии. На съезде когомологической теории алгебраических многообразий был посвящен обзорный доклад Гротендика. В своем докладе Гротендик сообщил, что ему удалось «разумным образом» определить понятие групп Бетти для алгебраических многообразий, определенных над произвольным полем. «Разумность» понимается в том смысле, что сохраняются обычные теоремы о поведении групп Бетти при непрерывных (в данном случае рациональных) отображениях, в частности теорема Лефшеца о неподвижных точках. По-видимому, из этой теории должны следовать для произвольных алгебраических многообразий результаты, аналогичные тем, которые получил Вейль для алгебраических кривых. Это привело бы к очень интересным следствиям в теории сравнений со многими неизвестными.

Другой интересный результат Гротендика был изложен в обзорном докладе Хирцебруха. Речь идет об обобщении теоремы Римана—Роха. Обобщение заключается в том, что находится закон преобразования рода Тодда при рациональных отображениях. Первоначальная теорема Римана—Роха в формулировке Хирцебруха получается из этого результата, если рассматривать отображения многообразия в точку. Доказательство этого обобщения оказывается значительно проще, чем доказательство теоремы Римана—Роха, найденное Хирцебрухом. В частности, оно алгебраическое, так что приложимо к многообразиям над произвольным полем и не использует теории внутренних гомологий Томá, на которой основывалось доказательство Хирцебруха.

Разумеется, на съезде можно было услышать о многих результатах, которые на докладывались. В числе таких результатов было новое обоснование теории пересечений алгебраических многообразий, построенное Серром при помощи теории гомологий локальных колец.

Методы гомологической алгебры в топологии были темой обзорного доклада Эйленберга. Он рассказал об очень красивом способе индуктивного вычисления групп когомологий пространств $K(\Pi,\ n)$. Оказывается, что группы когомологий пространства $K(\Pi,\ n)$ могут быть выражены в терминах теории гомологий колец (так называемой относительной теории гомологий), причем за кольцо берется кольцо когомологий пространства $K(\Pi,\ n-1)$.

Очень большое впечатление произвел доклад молодого тополога Адамса. Основываясь на теории вторичных когомологических операций, он показал, что отображения с хопфовским инвариантом 1 могут существовать только у сфер размерности 2, 4 и 8. Отсюда следует доказательство знаменитой гипотезы: над полем действительных чисел существуют алгебры с делением только размерностей 1, 2, 4 и 8. Интересно, что последний результат был независимо получен и также доложен на съезде Кервайром, который получил его исходя из более слабого топологического результата—он доказал непараллелезуемость сфер размерностей, отличных от 2, 3 и 7.

Сенсацией было сообщение Мюррея о том, что любое компактное аналитическое вещественное $n$-мерное многообразие аналитически вкладывается в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство. До сих пор не было известно даже, существует ли на таком многообразии непостоянная аналитическая функция. Об очень сильных теоремах вложения дифференцируемых многообразий сообщил Хирш. Так, он доказал, что трехмерное компактное многообразие можно вложить в четырехмерное евклидово пространство и шестимерное проективное пространство в семимерное евклидово.

Из области топологии я хочу в заключение упомянуть о двух результатах Мильнора. Первый результат был сообщен в обзорном докладе Хирцебруха. Он заключается в том, что дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы набор целых чисел был набором чисел Черна некоторого компактного комплексного многообразия. Ввиду роли, которую играют числа Черна в алгебраической геометрии ясна значительность этой теоремы. Второй результат относится к порядкам гомотопических групп сфер. Он показывает, что порядок определенной подгруппы этой группы (образа гомоморфизма Уайтхеда) делится на целое число, которое я не буду выписывать и которое определяется исходя из бернуллиевых чисел. Вероятно даже, что порядок указанной подгруппы равен этому числу. Таким образом, появляется надежда, что хотя бы порядки гомотопических групп сфер могут быть вычислены явным образом.

Теория функции многих комплексных переменных была представлена обзорными докладами Картана и Грауерта. В докладе Картана речь шла о таком обобщении понятия комплексного аналитического многообразия, которое соответствует переходу от алгебраического многообразия без особых точек к многообразию с особенностями. Таким образом приходят к так называемым аналитическим пространствам, которые локально эквивалентны не области $n$-мерного комлексного пространства, а подмножеству этого пространства, определенному конечным числом аналитических уравнений. Аналитические пространства часто встречаются в качестве фактор-пространств аналитических многообразий по дискретным группам, если преобразования этих групп имеют неподвижную точку. Картан рассказал о ряде результатов, связанных с трудностями, которые вызывает переход от аналитических многообразий к аналитическим пространствам, например, в связи с интегрированием дифференциальных форм (в виду «особенностей» интегралы расходятся) и с погружением одних пространств в другие.

Доклад Грауерта был посвящен теории аналитических пучков и аналитических косых произведений с комплексной группой Ли в качестве структурной группы. Интересно, что в виде очень частного случая его теории получаются результаты Биркгофа—Лаппо-Данилевского о существовании систем дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии.

Промежуточное место между теорией функций многих переменных и одной переменной занимал доклад Берса. В этом докладе речь шла о таком фундаментальном и в то же время неисследованном понятии, как пространство всех компактных римановых поверхностей заданного рода $p$. После результатов Римана, доказавшего, что это пространство имеет размерность $6p—6$ (при $p>1$), в этой области не было получено почти никаких принципиальных результатов, но сейчас она, видимо, снова оживает. Так, Берс показал, как ввести в этом пространстве структуру аналитического и даже келерового многообразия.

Переходя к алгебре, естественно упомянуть в первую очередь сенсационный результат Нагата—отрицательное решение XIV проблемы Гильберта. Именно Нагата построил пример такой группы $G$ линейных преобразований от 32-х переменных $x_1, \ldots, x_{32}$, что в кольце многочленов от $x_1, \ldots, x_{32}$ те многочлены, которые инвариантны относительно преобразований $G$ образуют подкольцо с бесконечным числом образующих.

В докладе Шевалле был дан обзор области, которой сейчас очень много занимаются—теории алгебраических групп. Под этим подразумеваются группы, являющиеся в то же время алгебраическими многообразиями, причем групповой закон должен выражаться рациональными функциями от координат переменных точек. Согласно теореме Шевалле—Барсотти—Розенлихта, в каждой такой группе есть наибольший нормальный делитель, являющийся алгебраической подгруппой матриц (линейные группы), причем фактор-группа по нему является абелевым многообразием (в случае комплексного основного поля это значит, что она компактна). Абелевы многообразия за последние 15 лет были глубоко изучены Вейлем и его школой. В семинаре, который Шевалле вел в прошлом году, были исследованы простые линейные алгебраические группы. Доказано, что если основное поле «достаточно мощное», то получаются группы, в точности соответствующие классическим простым группам. Этот результат можно применить к исследованию групп под конечным полем, которые приводят к конечным простым группам. Как показал Хертциг, таким образом получаются известные до сих пор простые конечные группы и две новые.

Из области теории чисел я хочу упомянуть о теории неопределенных уравнений, число переменных в которых достаточно велико сравнительно со степенью. Этому вопросу был посвящен обзорный доклад Дэвенпорта. Большое количество кулуарных разговоров на эту тему создало впечатление, что этим вопросом сейчас многие интересуются. Здесь имеются три гипотезы возрастающей трудности: I. Уравнение $f(x_1, \ldots, x_m)=0$, где $f$—целочисленная форма степени $n$ и $m>n^2$ имеет ненулевое решение как сравнение по любому модулю. II. Если форма $f$—неопределенная, то при тех же предположениях уравнение $f=0$ имеет целочисленное ненулевое решение. III. Если коэффициенты формы $f$—вещественные, а остальные предположения те же, что и в II, то неравенство $|f|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$ имеет целочисленное ненулевое решение. Гипотеза I доказана при $n=2$ и 3, гипотеза II только при $n=2$, а гипотеза III ни для какого $n$. Дэвенпорт доказал II при любом $n$, но с заменой условия $m>n^2$ условием «$m$ достаточно велико сравнительно с $n$», и получил аналогичный результат для III при $n=2$.

В заключение я хочу подчеркнуть, что эти поневоле отрывочные впечатления никак не могут дать достаточно полной картины работы конгресса хотя бы в тех областях, которых я касался. Это объясняется, не говоря уже об неизбежной субъективности точки зрения, просто невозможностью достаточно внимательно следить за деятельностью большого числа параллельно работающих секцией. Я не упомянул также и о докладах советских математиков, так как их работы у нас и так хорошо известны.

*И. Р. Шафаревич*