*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2004. Том 45, № 2*

*УДК 512.542*

# О $p$–ДЛИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП ШМИДТА

**В. Н. Княгина, В. С. Монахов**

**Аннотация:** Устанавливается, что конечная $p$-разрешимая группа, представимая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет $p$-длину не более 2.

**Ключевые слова:** конечная группа, $p$-разрешимая группа, $p$-длина.

*Посвящается профессору В. Д. Мазурову*
*в связи с его 60-летием*

*Группой Шмидта* называют ненильпотентную конечную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Строение конечной группы $G = AB$, представимой в виде произведения двух подгрупп Шмидта $A$ и $B$, исследовалось в работах В. Д. Мазурова, В. С. Монахова и С. А. Сыскина [1–4]. В частности, в этих работах доказаны следующие утверждения.

*Если $G$ — неразрешимая группа, то $G/S(G) \simeq PSL(2,5)$, $PSL(2,11)$, $SL(2,8)$,* $\mathrm{Aut}\,SL(2,8)$ (см. [3, теорема 3.7]).

*Если $A$ и $B$ — сверхразрешимые подгруппы, то группа $G$ разрешима и ее производная длина не выше* 3 (см. [4, следствие 3]).

Здесь $S(G)$ — разрешимый радикал группы $G$.

В работе А. Х. Журтова и С. А. Сыскина [5] установлено, что *если $G$ — $p$-разрешимая группа с силовской $p$-подгруппой, изоморфной силовской подгруппе из группы Шмидта, то $p$-длина группы $G$ не выше* 1.

Отсюда, в частности, вытекает, что *разрешимая группа $G = AB$, где $A$ и $B$ — подгруппы Шмидта взаимно простых порядков, имеет единичную $p$-длину для всех $p \in \pi(G)$* (см. [3]). Но если условие взаимной простоты порядков подгрупп Шмидта $A$ и $B$ отбросить, то $p$-длина может быть больше 1. Например, симметрическая группа $S_4$ имеет 2-длину, равную 2, и является произведением двух подгрупп Шмидта $A_4$ и $S_3$.

В настоящей заметке доказывается следующая

**Теорема.** *Если $A$ и $B$ — подгруппы Шмидта конечной $p$-разрешимой группы $G$ и $G = AB$, то $p$-длина группы $G$ не выше* 2.

Используются стандартные обозначения, соответствующие [6]. Свойства групп Шмидта перечислены в [3], см. также [6, 7]. Группу Шмидта с нормальной силовской $p$-подгруппой $P$ и циклической ненормальной силовской $q$-подгруппой $Q$ будем обозначать через $S = [P]Q$. Приведем формулировки наиболее часто используемых утверждений. Рассматриваются только конечные группы.

**Лемма 1** [5, теорема 3]. *Если $G$ — $p$-разрешимая группа с силовской $p$-подгруппой, изоморфной силовской подгруппе из группы Шмидта, то $l_p(G) \leq 1$.*

**Лемма 2** [6, теорема VI.6.6]. *Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа. Тогда $l_p(G) \leq c_p(G)$, где $c_p(G)$ — ступень нильпотентности силовской $p$-подгруппы группы $G$.*

**Лемма 3** [6, теорема VI.4.4]. *Если группа $G = AB$, где $A$ и $B$ — абелевы подгруппы, то $G$ метабелева.*

**Лемма 4** [4, леммы 5, 7]. *Пусть в $p$-разрешимой группе $G$ силовская $p$-подгруппа является произведением двух циклических подгрупп. Тогда*

(1) *если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$;*

(2) *если $p = 2$, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна $S_3$. В частности, $l_2(G) \leq 2$.*

Пусть $\pi$ — множество простых чисел. У каждой $\pi$-разрешимой группы существует нормальный ряд, факторы которого являются $\pi$-группами или $\pi'$-группами. Такой ряд называют $(\pi, \pi')$-*рядом*. $\pi$-*Длиной* $\pi$-разрешимой группы $G$ называют наименьшее число $\pi$-факторов среди всех $(\pi, \pi')$-рядов группы $G$. $\pi$-Длина $\pi$-разрешимой группы $G$ обозначается через $l_\pi(G)$. Как обычно, $\Phi(G)$ и $F(G)$ — подгруппы Фраттини и Фиттинга группы $G$, а $O_{\pi'}(G)$ и $O_\pi(G)$ — наибольшие нормальные $\pi'$- и $\pi$-подгруппы группы $G$ соответственно.

**Лемма 5.** *Пусть $G$ — $\pi$-разрешимая группа. Если силовские $p$-подгруппы группы $G$ циклические для всех $p \in \pi(G)$, то $l_\pi \leq 1$.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы $G$. Ясно, что $\Phi(G) = O_{\pi'}(G) = 1$, $F = F(G) = O_p(G)$ и $F$ является минимальной нормальной подгруппой группы $G$, причем $C_G(F) = F$. Понятно также, что силовская $p$-подгруппа $G_p$ совпадает с $F$, а так как группа автоморфизмов циклической группы абелева, то фактор-группа $G/F$ абелева. Поэтому $l_\pi(G) \leq 1$.

**Лемма 6.** *Пусть $G = AB$ — $p$-разрешимая группа, где $A$ и $B$ — $p$-замкнутые $pd$-подгруппы Шмидта. Если $G$ не $p$-замкнута, то $p = 3$, $\pi(G) = \{2, 3\}$ и $l_3(G) \leq 1$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $A = [P_1]Q$, $B = [P_2]R$, где $P_1$ и $P_2$ — силовские $p$-подгруппы из $A$ и $B$ такие, что $P_1P_2$ — силовская $p$-подгруппа из $G$ (см. лемму VI.4.7 в [6]), $Q$ — силовская $q$-подгруппа из $A$, $R$ — силовская $r$-подгруппа из $B$. Поскольку $\pi(G) = \{p, q, r\}$ и $G$ $p$-разрешима, то группа $G$ разрешима и по лемме VI.4.7 из [6] можно считать, что $QR$ — $\{q, r\}$-холлова подгруппа при $q \neq r$ или $QR$ — силовская $q$-подгруппа при $q = r$.

Предположим, что $q \neq r$, и пусть $\pi = \{q, r\}$. Тогда $l_\pi(G) \leq 1$ по лемме 5 и $K = O_p(G)(QR)$ нормальна в $G$. Теперь $Q \leq A \cap K \lhd A$ и $R \subseteq B \cap K \lhd B$. По свойствам групп Шмидта $A \leq K$ и $B \leq K$, т. е. $G = O_p(G)(QR)$ — $p$-замкнутая группа.

Пусть $q = r$. Если $l_q(G) \leq 1$, то опять $G = O_{p,q}(G)$ — $p$-замкнутая группа. Пусть $l_q(G) > 1$. Так как силовская $q$-подгруппа группы $G$ является произведением двух циклических подгрупп $Q$ и $R$, по лемме 4 получаем, что $q = 2$ и $p = 3$. Теперь $|P_1| = |P_2| = 3$ и $l_3(G) \leq 1$. Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа, $A$ и $B$ — $p$-нильпотентные $pd$-подгруппы Шмидта и $G = AB$. Если группа $G$ не $p$-нильпотентна, то $p = 2$, $3 \in \pi(G)$ и $l_2(G) \leq 2$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $A = [Q]P_1$, $B = [R]P_2$, где $P_1$ и $P_2$ — силовские $p$-подгруппы из $A$ и $B$ такие, что $P_1P_2$ является силовской $p$-подгруппой группы $G$ (см. [6, лемма VI.4.7]), $Q$ — силовская $q$-подгруппа из $A$, $R$ — силовская $r$-подгруппа из $B$. Если $p > 2$, то $P_1P_2$ — метациклическая группа по лемме III.11.5 из [6] и $l_p(G) \leq 1$ по лемме 4. Теперь $K = O_{p'}(G)(P_1P_2)$ нормальна в $G$, поэтому $A \cap K \supseteq P_1$ и $A \cap K$ нормальна в $A$. По свойствам групп Шмидта получаем, что $A \leq K$. Аналогично $B \subseteq K$ и $K = G$ — $p$-нильпотентная группа.

Пусть $p = 2$. Тогда $|Q| = q$, $|R| = r$ и силовская 2-подгруппа $P_1P_2$ в группе $G$ является произведением двух циклических подгрупп. По лемме 4 либо фактор-группа $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок, либо она изоморфна $S_3$ и $l_2(G) \leq 2$.

Пусть $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок. Тогда $P_1P_2 \subseteq O_{2',2}(G)$ и $A \cap O_{2',2}(G)$ — нормальная подгруппа в группе $A$, причем $P_1 \subseteq A \cap O_{2',2}(G)$. Это возможно, лишь когда $A \subseteq O_{2',2}(G)$. Аналогично $B \subseteq O_{2',2}(G)$ и $G = O_{2',2}(G)$ — 2-нильпотентная группа.

Пусть $G/O_{2',2}(G) \simeq S_3$. Тогда $3 \in \pi(G)$ и $l_2(G) \leq 2$. Лемма доказана.

Пример. Пусть $p$ — простое нечетное число и $C_p$ — циклическая группа порядка $p$. Эта группа обладает автоморфизмом $\alpha$ порядка 2. Зададим отображение $\phi : S_4 \to \langle\alpha\rangle$ следующим образом: $\phi(\tau) = \alpha$, если $\tau$ — нечетная перестановка, и $\phi(\tau) = 1$, если $\tau$ — четная перестановка. Тогда $\phi$ — гомоморфизм группы $S_4$ на $\langle\alpha\rangle$, ядро которого совпадает с $A_4$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [C_p]S_4$ относительно гомоморфизма $\phi$. Тогда $G = S_3([C_p]\langle(1234)\rangle)$ есть произведение двух 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четных порядков, причем $G$ — не 2-нильпотентная группа и $l_2(G) = 2$. При $p = 3$ построенная группа не 3-замкнута.

Приведенный пример показывает, что в лемме 6 группа может быть не 3-замкнутой, а в лемме 7 — не 2-нильпотентной.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы. Если одна из подгрупп $A$ или $B$ является $p'$-подгруппой, то $l_p(G) \leq 1$ по лемме 1. Поэтому считаем в дальнейшем, что $A$ и $B$ — $pd$-подгруппы. Теперь из условия теоремы получаем, что $|\pi(G)| \leq 3$ и $G$ $p$-разрешима, поэтому $G$ разрешима.

Если $1 \neq N \lhd G$, то $G/N = (AN/N)(BN/N)$ — $p$-разрешимая группа. Если $AN/N$ и $BN/N$ — $pd$-подгруппы, то они являются подгруппами Шмидта и по индукции $l_p(G/N) \leq 2$. Если один из факторов не является $pd$-группой, то $l_p(G/N) \leq 1$ по лемме 1. Итак, $l_p(G/N) \leq 2$ для любой подгруппы $1 \neq N \lhd G$. По лемме VI.6.9 из [6] получаем, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $N = F(G) = O_p(G) = C_G(O_p(G))$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$.

По леммам 6 и 7 одна из подгрупп $A$ или $B$ должна быть $p$-замкнутой, а другая $p$-нильпотентной. Пусть $A$ — $p$-замкнутая подгруппа Шмидта, а $B$ — $p$-нильпотентная подгруппа Шмидта. Зафиксируем обозначения: $A = [P_1]Q, B = [R]P_2$, где $P_1$ и $P_2$ — силовские $p$-подгруппы из $A$ и $B$ соответственно, $Q$ — силовская $q$-подгруппа из $A$, $R$ — силовская $r$-подгруппа из $B$. Если подгруппа $P_1$ абелева, то по лемме VI.4.7 из [6] силовская $p$-подгруппа $G_p$ группы $G$ является произведением абелевых подгрупп. По лемме 3 ступень нильпотентности подгруппы $G_p$ не выше 2, поэтому $l_p(G) \leq 2$ по лемме 2. Значит, в дальнейшем следует считать, что подгруппа $P_1$ неабелева, поэтому $q > 2$.

Проверим, что $A \cap B = 1$. Так как $P_1$ неабелева, а $P_2$ циклическая, то $P_1$ не содержится в $P_2$. Если $P_2$ содержится в $P_1$, то $l_p(G) \leq 1$ по лемме 1.

Пусть $P_2$ не содержится в $P_1$. Предположим, что $D = P_1 \cap P_2 \neq 1$. Тогда $D$ — собственная подгруппа в $P_2$ и из свойств групп Шмидта получаем, что $D \leq Z(B)$. Теперь $D^G = D^{BA} = D^A \leq P_1^A = P_1$. Так как $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа, то $N \leq P_1$. Если $N \neq P_1$, то из свойств групп Шмидта следует, что $N \leq Z(A)$; противоречие с тем, что $N = C_G(N)$. Если $N = P_1$, то в фактор-группе $G/N$ силовская $p$-подгруппа циклическая, поэтому $l_p(G/N) \leq 1$ и $l_p(G) \leq 2$, т. е. теорема верна. Поэтому следует считать, что $P_1 \cap P_2 = 1$.

Предположим, что $L = A \cap B \neq 1$. Если $Q \leq R$ или $R \leq Q$, то $l_q(G) \leq 1$ по лемме 1, поэтому $l_p(G) \leq 2$. Пусть $Q$ не содержится в $R$ и $R$ не содержится в $Q$. Тогда $L$ — собственная подгруппа в $Q$ и $L \leq Z(A)$. Теперь $L^G = L^{AB} = L^B \leq R^B = R$ и в группе $G$ появилась нормальная $p'$-подгруппа. Это невозможно. Значит, всегда $A \cap B = 1$.

Предположим, что подгруппа $R$ циклическая. Тогда $|R| = r > 2$. Если $q = r$, то $l_q(G) \leq 1$ по лемме 4 и $l_p(G) \leq 2$. Если $q \neq r$, то $l_{\{q,r\}}(G) \leq 1$ по лемме 5 и опять $l_p(G) \leq 2$. Итак, подгруппа $R$ нециклическая, поэтому $p > 2$ и подгруппа $B$ не сверхразрешима.

Ясно, что $N \leq P_1P_2$. Если $P_2$ не содержится в $N_G(P_1)$, то $N_G(P_1) \cap P_2 \subseteq Z(B)$, а так как $P_1 \neq N_G(P_1)$, то $D = N_G(P_1) \cap P_2 \neq 1$. Теперь $D^G = D^{BA} = D^A \leq N_G(P_1)$ и $N \leq N_G(P_1)$. Если $P_2 \subseteq N_G(P_1)$, то $N \leq P_1P_2 \leq N_G(P_1)$. Итак, в любом случае $N \leq N_G(P_1)$.

Если $N \cap P_1 = 1$, то

$$N \simeq NP_1/P_1 \leq P_1P_2/P_1 \simeq P_2$$

и $N$ имеет простой порядок $p$. Так как $N = C_G(N)$, то $G/N$ изоморфна подгруппе из группы $\operatorname{Aut} N$, которая является циклической группой порядка $p-1$; противоречие. Значит, $N \cap P_1 = N_1 \neq 1$, и по теореме Машке $N = N_1 \times N_2$, где $N_G(N_2) \geq Q$. Предположим, что $N_2 \neq 1$, т. е. $N$ не содержится в $P_1$. Так как $N$ — элементарная абелева $p$-группа и $N/N_1 \simeq NP_1/P_1 \leq P_1P_2/P_1 \simeq P_2$, то $|N/N_1| = p$ и $|N_2| = p$. Поскольку $P_1$ неабелева, по свойствам групп Шмидта показатель числа $p$ по модулю $q$ четен. Значит, $q$ не делит $p-1$. Поэтому подгруппа $[N_2]Q = N_2 \times Q$ нильпотентна и

$$Q \subseteq C_G(N_1) \cap C_G(N_2) \leq C_G(N) = N.$$

Имеем противоречие. Следовательно, $N \leq P_1$. Теперь $N$ — нормальная $p$-подгруппа группы Шмидта $A$, значит, $N = P_1$ или $N \leq Z(A)$. Второе исключается равенством $N = C_G(N)$. Поэтому $N = P_1$ и в фактор-группе $G/N$ силовская $p$-подгруппа циклическая. Следовательно, $l_p(G/N) \leq 1$ и $l_p(G) \leq 2$. Теорема доказана полностью.

**Следствие.** *Если $A$ и $B$ — подгруппы Шмидта разрешимой группы $G$ и $G = AB$, то $l_p(G) \leq 2$ для всех $p \in \pi(G)$.*

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.
2. *Монахов В. С.* Произведение двух групп Шмидта // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 1. С. 8–11.
3. *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.

**4.** *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимых групп Шмидта // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 1999. № 1. С. 41–46.
**5.** *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 36, № 3. С. 74–78.
**6.** *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
**7.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

*Статья поступила 28 апреля 2003 г.*

*Князина Виктория Николаевна,* *Монахов Виктор Степанович*
*Гомельский университет им. Ф. Скорины, кафедра алгебры и геометрии*
*ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь*

monakhov@gsu.unibel.by