N. A. Shirokov, Some consequences of the Lindelöf conjecture, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1992, Volume 201, 164–176

Н.А.Широков

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ГИПОТЕЗЫ ЛИНДЕЛЁФА

Гипотеза Линделёфа состоит в том, что для ζ -функции Римана справедлива следующая оценка роста на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$:

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=O\left(|t|^{\varepsilon}\right),\quad |t|\longrightarrow\infty, \tag{I}$$

для любого $\varepsilon>0$ - см. [I], гл.I3. В терминах относящихся к распределению нулей ζ -функции (I) эквивалентно соотношению, справедливому при $\frac{1}{2}<\sigma<1$:

$$N(\sigma,t)=o(\log|t|),\quad |t|\longrightarrow\infty,$$

где $N(\sigma,t)$ - количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\{s=\gamma+i\tau:\ \sigma\leqslant\gamma\leqslant1,\ t<\tau\leqslant t+1\}$. При этом также справедливы оценки [I], гл. 9:

$$c_1^*\log|t|\leqslant N(0,t)\leqslant c_2^*\log|t| \tag{2}$$

с некоторыми абсолютными постоянными c_1^* и c_2^*. Понятно, что в случае справедливости гипотезы Линделёфа существует функция $\varepsilon(t)\longrightarrow0$ и постоянная c_0 такие, что

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|\leqslant c_0|t|^{\varepsilon(|t|)} \tag{3}$$

Целью данной работы является получение некоторой информации о распределении нулей $\zeta(s)$ в предположении (3).

<u>Предположения о функции</u> $\varepsilon(t)$:

(i) функция $\varepsilon(t)$ монотонно убывает на $[1,\infty)$ и

$$\varepsilon(2t)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon(t);$$

(ii) $$\varepsilon(t)\geqslant\frac{1}{(\log t)^{1/2}},\quad t\geqslant2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (i) некоторой регулярности поведения $\varepsilon(t)$ накладывается с учетом вида большинства оценок, связанных с ростом ζ -функции; ограничение (ii) $\varepsilon(t)$ снизу естественно с учетом имеющихся Ω -теорем [I], п.8, которые влекут соотношение

$$\varlimsup_{t\to\infty}\log^{\beta}t\cdot\varepsilon(t)=\infty$$

для любого $\beta > \frac{1}{2}$, если имеется неравенство (3).

Итак, в нижеследующих теоремах I и 2 предполагаем удовлетворение (3) с функцией $\varepsilon(t)$, для которой справедливы (i) и (ii).

ТЕОРЕМА I. Если $\frac{1}{2} \geqslant \vartheta \geqslant \varepsilon^{1/2}(|t|)$ то при $|t| \geqslant T_1(\varepsilon(t), c_0)$ в круге $\{s : |s - \frac{1}{2} - it| \leqslant \vartheta\}$ имеется не более $20\vartheta \log|t|$ нулей $\zeta(s)$.

ТЕОРЕМА 2. Существует абсолютная постоянная A_1 такая, что при $|t| \geqslant T_2(\varepsilon(t), c_0)$ в круге $\{s : |s - \frac{1}{2} - it| \leqslant A_1\varepsilon^{1/2}(t)\}$ имеется по крайней мере один нуль $\zeta(s)$.

Условие теоремы I и 2 интересно сопоставить с оценками (2) и с тем фактом [I], гл.9, что при $|t| \geqslant T_0$ в прямоугольнике $\left\{s = \sigma + i\tau : 0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ t \leqslant \tau \leqslant t + \frac{A}{\log\log\log|t|}\right\}$ существует хоть один нуль $\zeta(s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Вначале установим некоторые вспомогательные факты, доказательства которых включают стандартные оценки и потому лишь намечаются.

ЛЕММА I. Предположим, что выполнены условия теоремы I. Тогда при $|t| \geqslant T_0^*$ при $s = \sigma + i\tau$, $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 14\frac{1}{2}$, $t - 7 \leqslant \tau \leqslant t + 7$ имеем $|\zeta(s)| \leqslant |t|^{4\varepsilon(|t|)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(s) = \frac{s-1}{s}\zeta(s)$, $F(s)$ – внешняя часть φ в факторизации Неванлинны в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2}\}$. Тогда $|\varphi(s)| \leqslant |F(s)|$, $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$; $|\zeta(s)| \leqslant 2|\varphi(s)|$, $|\mathrm{Im}\, s| \geqslant 2$, $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2}$; и $|F(\frac{1}{2} + it)| = |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$, поэтому при $|\tau| \geqslant 2$ имеем

$$\log|\zeta(\sigma + i\tau)| \leqslant \log 2 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{(\tau - x)^2 + (\sigma - \frac{1}{2})^2} \log\left(c_0|x|^{\varepsilon(|x|)}\right)dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{\log c_3 \cdot (\sigma - \frac{1}{2})}{(\tau - x)^2 + (\sigma - \frac{1}{2})^2}\,dx \leqslant \log c_4 + \varepsilon(|\tau|)\log|\tau| +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{[|\tau|, -\frac{|\tau|}{2}] \cup [\frac{|\tau|}{2}, |\tau|]} \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{(\tau - x)^2 + (\sigma - \frac{1}{2})^2} \log\left(x^{\varepsilon(\tau)}\right)dx + \frac{2}{\pi}\int_{2}^{\frac{|\tau|}{2}} \log\left(c_4 x^{A_0}\right)\frac{\sigma - \frac{1}{2}}{(\tau - x)^2 + (\sigma - \frac{1}{2})^2}\,dx <$$

$$< \frac{3}{2}\varepsilon(|\tau|)\log|\tau| + \log c_3',$$

откуда, в силу свойства (i) функции $\varepsilon(t)$, следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\chi(s)$ взята из функционального уравнения $\zeta(1-s)=\chi(s)\zeta(s)$, и Φ – внешняя функция в круге $K=\{s:|s-\frac{1}{2}-it|\leq\rho\}, \vartheta<\rho<\frac{1}{2}$, модуль которой на окружности ∂K определяется так:

$$|\Phi(s)|=\begin{cases}|t|^{4\varepsilon}, & s=\sigma+i\tau\in\partial K,\ \sigma\geq\frac{1}{2};\\ |t|^{4\varepsilon}|\chi(1-\sigma+i\tau)|, & s=\sigma+i\tau\in\partial K,\ \sigma<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Тогда при $|s-\frac{1}{2}-it|\leq\vartheta$ справедлива оценка

$$|\Phi(s)|\leq\left[c|t|^{(4\varepsilon+\frac{\rho}{\pi})}\right]^{\frac{\rho+\vartheta}{\rho-\vartheta}},\quad \varepsilon\overset{\mathrm{def}}{=}\varepsilon(|t|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя то, что при $0\leq \operatorname{Re}s\leq 1$ имеется оценка $|\chi(1-\sigma+i\tau)|\leq c_1|\tau|^{1/2-\sigma}$, $0\leq\sigma\leq\frac{1}{2}$ ([I], стр.96), элементарные вычисления дают

$$\log|F(\tfrac{1}{2}+it)|\leq\log(c'|t|^{4\varepsilon+\frac{\rho}{\pi}})$$

а затем, в силу того, что $|F(s)|\geq 1$, можем к функции $\log|F(s)|$ применить неравенство Гарнака и получим

$$\log|F(s)|\leq\frac{\rho+|s-s_0|}{\rho-|s-s_0|}\log|F(s_0)|\leq\frac{\rho+\vartheta}{\rho-\vartheta}\left(\left(4\varepsilon+\frac{\rho}{\pi}\right)\log|t|+\log c'\right),$$

где $s_0=\frac{1}{2}+it, |s-s_0|\leq\vartheta$, что и требуется.

Завершим теперь доказательство теоремы I. Пусть N –количество нулей $\zeta(s)$ в круге $K=\{s:|s-s_0|\leq\vartheta\}$, где $s_0=\frac{1}{2}+it$, $\frac{1}{2}\geq\vartheta\geq\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon=\varepsilon(|t|)$. Положим $\rho=2e\vartheta$ и пусть $B(s)$ – произведение Бляшке, построенное для круга $K_0=\{s:|s-s_0|\leq\rho\}$ по нулям $s_1,\dots,s_N$ ζ -функции в круге K. Тогда при $|s-s_0|\leq\vartheta$ имеем

$$|B(s)|=\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{\rho(s-s_n)}{\rho^2-(s-s_0)(\bar{s}_n-\bar{s}_0)}\right|\leq\left(\frac{2\rho\vartheta}{\rho^2+\vartheta^2}\right)^N<\left(\frac{2\vartheta}{\rho}\right)^N. \qquad (4)$$

Функциональное уравнение $\zeta(1-s)=\chi(s)\zeta(s)$ и соотношение $\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)}$ влекут $|\zeta(\sigma+i\tau)|=|\chi(1-\sigma+i\tau)||\zeta(1-\sigma+i\tau)|$, поэтому лемма I дает

$$|\zeta(s)|\leq\begin{cases}|t|^{4\varepsilon}, & s\in\partial K_0,\ \operatorname{Re}s\geq\frac{1}{2},\\ |t|^{4\varepsilon}|\chi(1-\sigma+i\tau)|, & s=\sigma+i\tau\in\partial K_0,\ \sigma<\frac{1}{2}.\end{cases} \qquad (5)$$

Пусть Φ –внешняя в K_0 функция, для которой $|\Phi||_{\partial K_0}$ определён в (5). По лемме 2 при $|s-s_0|\leq\vartheta$ имеем

$$|\Phi(s)|\leq\left[c|t|^{4\varepsilon+\frac{\rho}{\pi}}\right]^{\frac{\rho+\vartheta}{\rho-\vartheta}}, \qquad (6)$$

потому (4) и (6) при $s \in K$ дают оценку

$$|\zeta(s)| \leqslant |B(s)|\,|\Phi(s)| < \left(\frac{2\vartheta}{\rho}\right)^N \left[c\,|t|^{4\varepsilon+\frac{\rho}{\pi}}\right]^{\frac{\rho+\vartheta}{\rho-\vartheta}}. \qquad (7)$$

Пусть теперь γ – окружность радиуса I, проходящая через точки $s_0 - i\vartheta$ и $s_0 + i\vartheta$, центр которой 0_1 лежит в полуплоскости $\{s : \mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2}\}$. Длина дуги $\gamma \cap K$ больше 2ϑ, поэтому (7) и лемма I влекут

$$\log|\zeta(0_1)| \leqslant \frac{2\vartheta}{2\pi} \log\left[\left(\frac{2\vartheta}{\rho}\right)^N \left(c\,|t|^{4\varepsilon+\frac{\rho}{\pi}}\right)^{\frac{\rho+\vartheta}{\rho-\vartheta}}\right] + \log|t|^{4\varepsilon}. \qquad (8)$$

Поскольку $\mathrm{Re}\, 0_1 \geqslant \frac{5}{4}$ и $\rho = 2e\vartheta$, из (8) находим оценку

$$N \leqslant \left[\left(4\varepsilon + \frac{2e}{\pi}\vartheta\right)\frac{2e+1}{2e-1} + \frac{4\pi\varepsilon}{\vartheta}\right] \log|t| + \frac{\pi}{\vartheta}\left(\log \zeta\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2e+1}{2e-1}\log c\right). \qquad (9)$$

Наконец, принимая во внимание условия $\vartheta \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}} = (\varepsilon(|t|))^{\frac{1}{2}}$ и $\varepsilon(|t|) \geqslant \frac{1}{(\log|t|)^{\frac{1}{2}}}$, из (9) при $|t| \geqslant T_1$ получим

$$N \leqslant 20\,\vartheta \log|t|,$$

что и требуется. Теорема I доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы 2. Нам потребуется ещё ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3. Пусть L – круг $\{s : |s - \frac{1}{2} - 2e\vartheta - it| \leqslant \vartheta\}$, $\frac{1}{100} \geqslant \vartheta \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}(|t|)$, $n(t, w)$ – количество корней уравнения $\zeta(s) = w$ в круге L. Тогда в предположениях теоремы 2 справедливо неравенство

$$n(t, w) \leqslant c_1 \frac{\varepsilon}{\vartheta} \log|t|,$$

где c_1 – абсолютная постоянная, $\varepsilon = \varepsilon(|t|)$, $|t| \geqslant T_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|w| > |t|^{4\varepsilon}$, то по лемме I $n(t,w) = 0$. Если $|w| \leqslant |t|^{4\varepsilon}$, то для функции $\varphi(s) = \zeta(s) - w$ в круге $L_0 = \{s : |s - \frac{1}{2} - 2e\vartheta - it| \leqslant 2e\vartheta\}$ имеем оценку $|\varphi(s)| \leqslant 2|t|^{4\varepsilon}$. Выберем $a > 2$ таким, что

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} < \frac{\log 2}{2^a};$$

тогда

$$|\zeta'(a + i\tau)| \geqslant \frac{\log 2}{2^a} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^a} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta_0,$$

$$|\zeta''(a + i\tau)| \leqslant \zeta''(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} b,$$

поэтому

$$|\zeta(a+i(\tau+h))-\zeta(a+i\tau)|=\left|h\,\frac{\partial\zeta(a+i\tau)}{\partial\tau}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2\operatorname{Re}\zeta(a+i\tau_1)}{\partial\tau^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,i\,\frac{\partial^2\operatorname{Im}\zeta(a+i\tau_2)}{\partial\tau^2}\right)\right|\geqslant\delta_0 h-bh^2\geqslant\frac{1}{2}\delta_0 h$$

при $0<h\leqslant\frac{\delta_0}{2b}$; в частности, при $h_0=\min\left(\frac{\delta_0}{2b},\frac{1}{2}\right)$, $\Delta\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2}\delta_0 h_0$ выполняется

$$\left|\varphi\left(a+it+i\frac{h_0}{2}\right)-\varphi\left(a+it-i\frac{h_0}{2}\right)\right|=\left|\zeta\left(a+it+i\frac{h_0}{2}\right)-\zeta\left(a+it-i\frac{h_0}{2}\right)\right|\geqslant\Delta\ ,$$

поэтому $\left|\varphi\left(a+it+i\frac{h_0}{2}\right)\right|\geqslant\frac{\Delta}{2}$ или $\left|\varphi\left(a+it-i\frac{h_0}{2}\right)\right|\geqslant\frac{\Delta}{2}$. Ту из точек $a+it\pm i\frac{h_0}{2}$, для которой вышеуказанное неравенство выполняется, обозначим через O_2 , и пусть γ –окружность с центром в точке $a+it$, проходящая через точки $s_0-i\vartheta$ и $s_0+i\vartheta$, $s_0=\frac{1}{2}+2e\vartheta+it$, $\omega_\Gamma(z)$ – гармоническая мера дуги $\Gamma=\partial\gamma\cap L$ относительно круга $\operatorname{int}\gamma$, $s_1,\dots,s_N$ – нули функции $\varphi(s)$ в круге L , $N=n(t,\vartheta)$, B – произведение Бляшке, построенное для круга L_0 и точек $s_1,\dots,s_N$. Тогда, как при доказательстве теоремы I, имеем оценки

$$|B(s)|<\left(\frac{2\vartheta}{2e\vartheta}\right)^N=e^{-N},\quad s\in L\ ,$$

$$|\varphi(s)|<2|t|^{4\varepsilon}e^{-N},\quad s\in L\,,\quad \varepsilon=\varepsilon(|t|),$$

и потому

$$\log|\varphi(O_2)|\leqslant\omega_\Gamma(O_2)\log\left(2|t|^{4\varepsilon}e^{-N}\right)+\omega_{\gamma\setminus\Gamma}(O_2)\log\left(2|t|^{4\varepsilon}\right),$$

$$N\leqslant 4\varepsilon\log|t|+\frac{4\varepsilon}{\omega_\Gamma(O_2)}\log|t|+\frac{\log\frac{4}{\Delta}}{\omega_\Gamma(O_2)}+\log 2\leqslant\frac{c_1\varepsilon}{\vartheta}\log|t|,\ |t|\geqslant T_3\,,$$

поскольку длина Γ больше 2ϑ , радиус γ меньше a и $|O_2-a-it|\leqslant\frac{1}{4}$. Лемма доказана.

Две следующие леммы стандартны и приводятся для удобства ссылки.

ЛЕММА 4. Пусть функция φ аналитична в круге $\{z:|z-z_0|\leqslant\rho\}$. Тогда

$$|\varphi'(z_0)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\rho^2}\sqrt{\iint\limits_{|z-z_0|<\rho}|\varphi(z)|^2\,dx\,dy}\ .$$

ЛЕММА 5. Пусть функция f аналитична в квадрате $\{z=x+iy:\ a\leqslant x\leqslant a+14,\ b\leqslant y\leqslant b+14\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)|\leqslant M$.

Тогда существует абсолютная постоянная $\widetilde{C}_0$ такая, что для нулей $z_n = x_n + i y_n$ функции f, лежащих в прямоугольнике $\{a \le x_n \le a + \frac{1}{2}, b+1 \le y_n \le b+13\}$ справедливо соотношение

$$\sum (x_n - a) \le \widetilde{C}_0 \log \frac{M}{|f(z_*)|},$$

где $z_* = a + 7 + i(b+7)$

Для последующего существенную роль играют треугольники $\Delta_+(t) = \{s = \sigma + i\tau : \frac{1}{2} \le \sigma \le 1, |\tau - t| \le 12(\sigma - \frac{1}{2})\}$ и $\Delta_-(t) = \{s = \sigma + i\tau : 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, |\tau - t| \le 12(\frac{1}{2} - \sigma)\}$. Треугольники $\Delta_+(t)$ и $\Delta_-(t)$ симметричны относительно прямой $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$, как и нули $\zeta(s)$ в критической полосе, поэтому всякому $s_+ \in \Delta_+(t)$, $\zeta(s_+) = 0$, соответствует $s_- = 1 - \bar{s}_+ \in \Delta_-(t)$, $\zeta(s_-) = 0$, и наоборот.

ЛЕММА 6. Пусть s_ν – нули ζ-функции в полосе $\{0 < \operatorname{Re} s < 1\}$. В предположениях теоремы 2 существует абсолютная постоянная A_2 такая, что при $|t| \ge T_4(\varepsilon(\cdot), C_0)$, $0 < w < \frac{1}{100}$ и $|s_* - s_0| \le w$ будет справедлива оценка

$$\sum_{\substack{s_\nu \in \Delta_+(t) \cup \Delta_-(t) \\ |s_\nu - s_0| \ge 6w}} \frac{1}{|s_* - s_\nu|^2} \le A_2 \frac{\varepsilon \log |t|}{w^3},$$

где $s_0 = \frac{1}{2} + it$, $\varepsilon = \varepsilon(|t|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s_\nu \in \Delta_+(t) \cup \Delta_-(t)$, $|s_\nu - s_0| \ge 6w$, $|s_* - s_0| \le w$, то $|s_* - s_\nu| \le \frac{7}{6}|s_0 - s_\nu| < 20|\operatorname{Re} s_\nu - \frac{1}{2}|$, $|s_* - s_\nu| \ge 5w$, поэтому, комбинируя леммы I и 5, находим

$$\sum_{\substack{s_\nu \in \Delta_+(t) \cup \Delta_-(t) \\ |s_\nu - s_0| \ge 6w}} \frac{1}{|s_* - s_\nu|^2} = \sum_{\dots} \frac{|s_* - s_\nu|}{|s_* - s_\nu|^3} < \frac{20}{125} \frac{1}{w^3} \sum_{\substack{s_\nu \in \Delta_+(t) \cup \Delta_-(t) \\ |s_\nu - s_0| \ge 6w}} |\operatorname{Re} s_\nu - \tfrac{1}{2}| \le$$

$$\le \frac{40}{125} \frac{1}{w^3} \sum_{s_\nu \in \Delta_+(t)} (\operatorname{Re} s_\nu - \tfrac{1}{2}) \le \frac{A_2 \varepsilon \log |t|}{w^3}, \quad |t| \ge T_4,$$

что и требуется.

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия теоремы 2, s_ν – нули ζ-функции в полосе $\{0 < \operatorname{Re} s < 1\}$. Положим $s_0 = \frac{1}{2} + it$, $\varepsilon = \varepsilon(|t|)$, $w \ge \varepsilon^{1/3}$,

$$R(s)=\sum_{\nu}\frac{1}{(s-s_\nu)^2}.$$

Тогда существуют абсолютные постоянные $A_3>6$ и $A_4>0$, такие, что для $|s-s_0|\leqslant w$ и $|t|\geqslant T_5(\varepsilon(\cdot),c_0)$ справедливо утверждение

$$\operatorname{Re}R(s)\leqslant -A_4\log|t| \tag{I0}$$

в случае, если в круге $\{s:|s-s_0|\leqslant A_3 w\}$ нет точек s_ν.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_\pm(t)$ – треугольники, введенные перед леммой 6. Геометрические рассмотрения показывают, что при $w<\frac{1}{100}$, $0<\operatorname{Re}s_\nu<1$, $s_\nu\notin\Delta_+(t)\cup\Delta_-(t)$, $|s_\nu-s_0|\geqslant 6w$, $|s-s_0|\leqslant w$ наименьший неориентированный угол между отрезком $[s,s_\nu]$ и мнимой осью не превосходит $\frac{\pi}{6}$. Поэтому $s-s_\nu=\rho_\nu i e^{i(\delta_\nu\pi+\varphi_\nu)}$, где $\delta_\nu=1$ или $\delta_\nu=0$, $\rho_\nu>0$ и $|\varphi_\nu|\leqslant\frac{\pi}{6}$, тогда для таких s и s_ν имеем

$$\frac{1}{(s-s_\nu)^2}=-\frac{1}{\rho_\nu^2}e^{-2i\delta_\nu\pi-2i\varphi_\nu}=-\frac{e^{-2i\varphi_\nu}}{\rho_\nu^2}$$

и

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(s-s_\nu)^2}\leqslant-\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\rho_\nu^2}=-\frac{1}{2\rho_\nu^2} \tag{II}$$

Используя (II), лемму 7 и левое неравенство в (2), находим

$$\operatorname{Re}R(s)\leqslant\sum_{s_\nu\in\Delta_+(t)\cup\Delta_-(t)}\frac{1}{|s-s_\nu|^2}+\sum_{s_\nu\notin\Delta_+(t)\cup\Delta_-(t)}\operatorname{Re}\frac{1}{(s-s_\nu)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_2\varepsilon\log|t|}{w^3}-\frac{1}{2}\sum_{s_\nu\notin\Delta_+(t)\cup\Delta_-(t)}\frac{1}{\rho_\nu^2}\leqslant\frac{A_2\log|t|}{A_3^3}-\frac{1}{2\cdot100}\sum_{7\leqslant|s_\nu-s_0|\leqslant9}1\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{A_2}{A_3^3}-\frac{c_1^*}{200}\right)\log|t|=-A_4\log|t|,\quad |t|\geqslant T_5,$$

если $\frac{A_2}{A_3^3}=\frac{c_1^*}{400}$, $A_4=\frac{c_1^*}{400}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Если $0<\operatorname{Re}s<1$ $s\neq s_\nu$, то

$$\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)'=-\sum_{\nu}\frac{1}{(s-s_\nu)^2}+O(1),\quad |\operatorname{Im}s|\to\infty$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись формулой (7) на стр.4I в [I], получим

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=b-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}+\sum_{\gamma}\left(\frac{1}{s-s_{\gamma}}+\frac{1}{s_{\gamma}}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)'=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\right)'-\sum_{\gamma}\left(\frac{1}{s-s_{\gamma}}\right)^2.$$

Учитывая [2], стр.22, что при рассматриваемом s справедливо

$$\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\right)'=o(1),$$

получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 9. Предположим, что выполнены условия леммы 7, абсолютные постоянные A_3 и A_4 и число $\mathfrak{w}$ взяты из неё. Существует $T_6(\varepsilon(\cdot),c_0)=T_6$ такое, что при $|t|\geqslant T_6$ на любой хорде круга $\{s:|s-s_0|\leqslant\mathfrak{w}\}$, параллельной мнимой оси, функция $\log|\zeta(s)|$ будет вогнутой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что при $|t|\geqslant T_6$ выполнено

$$\frac{\partial^2\log|\zeta(s)|}{\partial\tau^2}<0,\ |s-s_0|\leqslant\mathfrak{w},\ s=\sigma+i\tau,\ s_0=\frac{1}{2}+it. \qquad (12)$$

Поскольку предполагается, что в круге $\{s:|s-s_0|\leqslant A_3\mathfrak{w}\}$ нет нулей $\zeta(s)$, то, применяя леммы 7 и 8, получаем, что

$$\frac{\partial^2\log|\zeta(s)|}{\partial\tau^2}=-\frac{\partial^2\log|\zeta(s)|}{\partial\sigma^2}=-\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2\log\zeta(s)}{\partial\sigma^2}=-\mathrm{Re}\left(\log\zeta(s)\right)''=$$

$$=-\mathrm{Re}\left(-R(s)+o(1)\right)=\mathrm{Re}\,R(s)+o(1)\leqslant-A_4\log|t|+o(1)<0,\ |t|\geqslant T_6,$$

что доказывает (12) и лемму.

ЛЕММА 10. Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Возьмём абсолютные постоянные A_3 и A_4 из леммы 7, абсолютную постоянную c_1 из леммы 3, пусть $\varepsilon=\varepsilon(|t|)$, $s_0=\frac{1}{2}+it$. Пусть, далее, $A_5\geqslant 1$, $\frac{1}{100}\geqslant\mathfrak{v}=A_5\varepsilon^{1/3}$, $\mathfrak{w}=5e\mathfrak{v}$ и предположим, что в круге $\{s:|s-s_0|\leqslant A_3\mathfrak{w}\}$ нет нулей $\zeta(s)$, а постоянная A_6 связана с A_5 соотношением

$$\frac{2\sqrt{2c_1A_6}}{A_5^{5/2}}=\frac{A_4}{2}, \qquad (13)$$

причём A_5 достаточно велика, чтобы $A_6 \geqslant 1$. Тогда при $|t| \geqslant T_7$ в круге $L = \{s : |s-\frac{1}{2}-2e\vartheta - it| \leqslant \vartheta\}$ выполняется соотношение

$$\min_{s \in L} |\zeta(s)| < |t|^{-A_6 \varepsilon^{2/3}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. предположим, наряду с выполнением условия леммы, выполнение соотношения

$$\min_{s \in L} |\zeta(s)| \geqslant |t|^{-A_6 \varepsilon^{2/3}}. \qquad (14)$$

Применим лемму 4 с $z_0 = \frac{1}{2} + 2e\vartheta + it$, $\rho = \vartheta$, $\varphi = \frac{\zeta'}{\zeta}$, получим

$$\left| \left(\frac{\zeta'(z_0)}{\zeta(z_0)} \right)' \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\vartheta^2} \sqrt{\iint_L \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|^2 d\sigma\, d\tau} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\vartheta^2} \sqrt{\iint_L \left| (\log \zeta(s))' \right|^2 d\sigma\, d\tau} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\vartheta^2} \sqrt{\mathrm{Area}(z_0;\vartheta)}, \qquad (15)$$

где в соотношении (15) через $\mathrm{Area}(z_0;\vartheta)$ обозначена площадь части римановой поверхности, на которую функция $\log \zeta(s)$ (одна из её ветвей) отображает круг L с центром в z_0 и радиусом ϑ. Если

$$M = \max_L \log |\zeta(s)|, \quad m = \min_L \log |\zeta(s)|,$$

то

$$\mathrm{Area}(z_0;\vartheta) = \int_m^M dp \int_{-\infty}^{\infty} \nu(p+iq)\, dq,$$

где $\nu(p+iq)$ – кратность, с которой точка $p+iq$ покрывается образом круга L при отображении $\log \zeta(s)$. Пусть

$$N(p+iq) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(p+iq+2k\pi i), \quad 0 \leqslant q < 2\pi,$$

тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu(p+iq)\, dq = \int_0^{2\pi} N(p+iq)\, dq; \quad \mathrm{Area}(z_0;\vartheta) = \int_m^M dp \int_0^{2\pi} N(p+iq)\, dq. \qquad (16)$$

Отметим, что $N(p+iq)$, $0 \leqslant q < 2\pi$, означает суммарную кратность покрытия всех точек вида $p+iq+2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ с которыми они входят в образ L при отображении $\lambda = \log \zeta(s)$. Но если $\omega = p+iq+2k\pi i$, то $e^{\omega} = e^{p+iq}$, поэтому $N(p+iq)$ есть количество корней уравнения $\zeta(s) = e^{p+iq}$ в круге L, поэтому по лемме

$$N(p+iq) < C_1 \frac{\varepsilon}{v} \log|t|, \quad \varepsilon = \varepsilon(|t|),$$

а тогда (I6) влечет

$$\operatorname{Area}(z_0; v) \leqslant 2\pi C_1 \frac{\varepsilon}{v} \log|t| \cdot (M - m).$$

Далее, лемма I даёт

$$M \leqslant \log|t|^{4\varepsilon} = 4\varepsilon \log|t|$$

а предположение (I4)

$$m \geqslant \log|t|^{-A_6\varepsilon^{2/3}} = -A_6 \varepsilon^{2/3} \log|t|$$

поэтому при $|t| \geqslant T_7$ с учетом $A_6 \geqslant 1$ получаем

$$M - m \leqslant (4\varepsilon + A_6 \varepsilon^{2/3}) \log|t| \leqslant 2 A_6 \varepsilon^{2/3} \log|t|,$$

значит, при $|t| \geqslant T_7$

$$\operatorname{Area}(z_0; v) \leqslant 2\pi C_1 \frac{\varepsilon}{v} \log|t| \cdot 2 A_6 \varepsilon^{2/3} \log|t| = 4\pi C_1 A_6 \frac{\varepsilon^{5/3}}{v} \log^2|t|. \tag{I7}$$

Используя (I5) и (I7), получаем неравенство

$$\left|\left(\frac{\zeta'(z_0)}{\zeta(z_0)}\right)'\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{v^2} \sqrt{4\pi C_1 A_6 \frac{\varepsilon^{5/3}}{v} \log^2|t|},$$

или, вспоминая, что $v = A_5 \varepsilon^{1/3}$, с учетом (I3) имеем

$$\left|\left(\frac{\zeta'(z_0)}{\zeta(z_0)}\right)'\right| \leqslant \frac{2\sqrt{2C_1A_6}}{A_5^{5/2}} = \frac{A_4}{2} \log|t|. \tag{I8}$$

Однако мы можем применить леммы 7 и 8, в обозначениях которых получим

$$\left|\left(\frac{\zeta'(z_0)}{\zeta(z_0)}\right)'\right| = \left|R(z_0) + o(1)\right| \geqslant \left|\operatorname{Re} R(z_0)\right| - o(1) \geqslant \tag{I9}$$

$$\geqslant A_4 \log|t| - o(1).$$

Неравенства (I8) и (I9) противоречивы при $|t| \geqslant T_6'$, значит, наше изначальное предположение (I4) неверно. Лемма доказана.

Закончим теперь доказательство теоремы 2. Предполагаем, что выполняется её условие, а также предположим, что в круге $\{s:|s-s_0|\leqslant A_3 w\}$ нет нулей $\zeta(s)$, где $s_0=\frac{1}{2}+it$, A_3 взята из леммы 7. При этом $w=5e\vartheta$, $\vartheta=A_5\varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon=\varepsilon(|t|)$, постоянные A_5 и A_6 удовлетворяют равенству (I3), в котором C_1 и A_4 описаны в лемме I0, причем полагаем, что A_5 достаточно велика, чтобы выполнялось условие $A_6>1$. Тогда лемма I0 утверждает, что в круге $L=\{s:|s-\frac{1}{2}-2e\vartheta-it|\leqslant\vartheta\}$ при $|t|\geqslant T_7$ существует точка s_1, для которой

$$|\zeta(s_1)|<|t|^{-A_6\varepsilon^{2/3}}.$$

Поскольку $s_1\in L$, то из геометрических соображений (в силу выбора $w=5e\vartheta$) ясно, что в круге $K=\{s:|s-s_0|\leqslant w\}$ хорда $[a,b]$, параллельная мнимой оси, проходящая через точку s_1, делится точкой s_1 на отрезки $[a,s_1]$ и $[s_1,b]$, длина каждого из которых $\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{5e}\right)w\geqslant\frac{3}{4}w$. В нашей ситуации применима лемма 9, и мы получаем, что на хорде $[a,b]$ функция $\log|\zeta(s)|$ будет вогнутой, поэтому по крайней мере на одном из отрезков $[a,s_1]$ или $[s_1,b]$ будет справедливо неравенство $\log|\zeta(s)|\leqslant\log|\zeta(s_1)|$. Не умаляя общности, именно такую часть $[a,b]$ обозначим через $[a,s_1]$. Итак, при $s\in[a,s_1]$ выполнено соотношение

$$\log|\zeta(s)|\leqslant\log|\zeta(s_1)|<\log|t|^{-A_6\varepsilon^{2/3}},$$

т.е.

$$|\zeta(s)|<|t|^{-A_6\varepsilon^{2/3}},\quad s\in[a,s_1]. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь квадрат Q со сторонами, параллельными осям координат, со стороной 2, лежащий в полуплоскости $\{\operatorname{Re}s\geqslant\frac{1}{2}\}$, середина одной из сторон которого совпадает с серединой отрезка $[a,s_1]$. Пусть O_2 – центр квадрата Q; тогда $\operatorname{Re}O_2\geqslant\frac{3}{2}$ и $|\zeta(O_2)|\geqslant\frac{1}{\zeta(\frac{3}{2})}$. Если $\omega_{[a,s_1]}(z)$ – гармоническая мера $[a,s_1]$ относительно Q, то понятно, что существует абсолютная постоянная $\alpha_0>0$, такая, что справедливо неравенство

$$\omega_{[a,s_1]}(O_2)\geqslant\alpha_0|s_1-a|. \tag{2I}$$

Учитывая (20) и лемму I, при $|t|\geqslant T_*$ функцию $\log|\zeta(s)|$ на границе ∂Q можно оценить так:

$$\left.\begin{aligned}\log|\zeta(s)|&\leqslant-A_6\varepsilon^{2/3}\log|t|,\quad s\in[a,s_1],\\ \log|\zeta(s)|&\leqslant4\varepsilon\log|t|,\quad s\in\partial Q\setminus[a,s_1]\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Используя естественное обозначение $\omega_{\partial Q\setminus[a,s_1]}(z)$, из (2I) и (22) выводим, что

$$\log|\zeta(O_2)|\leqslant(-A_6\varepsilon^{1/3}\log|t|)\omega_{[a,s_1]}(O_2)+4\varepsilon\log|t|\omega_{\partial Q\setminus[a,s_1]}(O_2)\leqslant$$
$$\leqslant -A_6\varepsilon^{2/3}\alpha_0|s_1-a|+4\varepsilon\log|t|\leqslant\left(-A_6\varepsilon^{2/3}\alpha_0\cdot\frac{3}{4}w+4\varepsilon\right)\log|t|=$$
$$=\left(-A_6\varepsilon^{2/3}\alpha_0\cdot\frac{3}{4}\cdot 5eA_5\varepsilon^{1/3}+4\varepsilon\right)\log|t|. \tag{23}$$

Применяя оценку снизу для $|\zeta(O_2)|$, из (23) находим, что

$$\left(-\frac{15}{4}e\alpha_0A_5A_6+4\right)\varepsilon\log|t|\geqslant\log\frac{1}{\zeta(\frac{3}{2})}. \tag{24}$$

Если постоянные A_5 и A_6 таковы, что

$$\frac{15}{4}e\alpha_0A_5A_6\geqslant 5\ , \tag{25}$$

то из (24) следовало бы, с учетом предположения (ii)

$\varepsilon=\varepsilon(|t|)\geqslant\frac{1}{\sqrt{\log|t|}}$, что

$$-\sqrt{\log|t|}\geqslant\log\frac{1}{\zeta(\frac{3}{2})}\ ,$$

что невозможно при $|t|>e^{\log^2\zeta(\frac{3}{2})}$.

Таким образом оказывается, что в случае, если удаётся выбрать постоянные A_5 и A_6 так, чтобы они удовлетворяли условиям $A_6\geqslant 1$, (I3) и (25), то предположение о том, что в круге $\{s:|s-s_0|<A_3w\}$ при $|t|>T_7$ нет нулей ζ -функции, ведет к противоречию, $w=5eA_5\varepsilon^{1/3}(|t|)$. Следовательно, осталось проверить, что A_5 и A_6 так выбрать можно. Действительно, (I3) и (25) эквиваленты, соответственно, (I3') и (25'):

$$\frac{A_6}{A_5^5}=q_1,\quad q_1=\frac{A_4^2}{32C_1}\ , \tag{I3'}$$

$$A_5A_6\geqslant q_2,\quad q_2=\frac{4}{3e\alpha_0}\ , \tag{25'}$$

и $A_6\geqslant 1$; пусть $A_5A_6=q_2^*\geqslant q_2$, тогда $A_6=q_1^{1/6}q_2^{*5/6}$, $A_5=q_2^{*1/6}q_1^{-1/6}$. Выберем теперь $q_2^*=\max\left(q_2,\frac{1}{q_1^{1/5}}\right)$ и затем определим A_5 , A_6 . Теорема 2 доказана.

Литература

I. Т и т ч м а р ш Е.К. Теория дзета-функции Римана. I953, М.

2. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, том II. 1963., М.

N.A.Shirokov. Some consequences of the Lindelöf conjecture.

Summary

Suppose that the Lindelöf conjecture is valid in the following quantitative form:

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)| \leqslant c_0 |t|^{\varepsilon(|t|)}$$

where $\varepsilon(t)$ is a decreasing function, $\varepsilon(2t) > \frac{1}{2}\varepsilon(t), \varepsilon(t) > \frac{1}{\sqrt{\log t}}$. Then it is proved that for $|t| \geqslant T_0$ the disc $\{s : |s-\frac{1}{2}-it| \leqslant v\}$ contains at most $20 v \log|t|$ zeros of $\zeta(s)$ if $\frac{1}{2} \geqslant v \geqslant \sqrt{\varepsilon(t)}$. There exists an absolute constant A such that for $|t| \geqslant T_1$ the disc $\{s : |s-\frac{1}{2}-it| < A\varepsilon^{1/3}(t)\}$ contains at least one zero of $\zeta(s)$.

N.A.Shirokov. One a type of automorphic forms.

Summary

The aim of the paper is to construct a Γ-automorphic form of weight $-2K$ for a given finitely generated Fuchsian group Γ of the second kind. The construction heavily relies on important properties of the outer function introduced by Widom that have been established by the author. The Γ-automorphic form constructed possesses the highest possible smoothness for the weight $-2K$.