При выполнении (5.6) система (5.5) эквивалентна системе (1.1), а условия (B) совпадают с условиями (4.6). Так как $L=L^*\geqslant 0$, то теорема 5.2 получается в результате применения теоремы 4.4 к оператору L. Теорема доказана.

Отметим, что к системам (5.5) приводятся уравнения вида

$$\omega''_{tt}(t, x)+\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{\alpha}(x) a_{ij}(x) \overline{\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial x_j}}\right)=\mu\omega(t, x),$$

где $\mu=\mu_1+i\mu_2$, $\omega=u+iv$.

В случае $\mu_2=0$ система (5.5) распадается на независимые друг от друга уравнения эллиптического и гиперболического типов.

Смешанная задача для гиперболического уравнения с вырождением была исследована в работах [2, 3] автора.

Литература

1. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
2. Байкузиев К. // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1962. № 2. С. 83—85.
3. Байкузиев К. Основные смешанные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными. Ташкент, 1984.

Кокандский педагогический институт им. Мукими

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.

УДК 517.9:532

А. ГАРАДЖАЕВ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ УПРУГОМ СОСУДЕ

В настоящей работе приводятся подробные доказательства результатов, сформулированных в [1]. Работа посвящена изучению структуры спектра задачи о нормальных колебаниях идеальной жидкости, находящейся в упругом сосуде, равномерно вращающемся вокруг фиксированной оси с малой угловой скоростью ε.

Пусть в упругом теле, занимающем область Ω, находится идеальная жидкость, заполняющая область Ω_0. Пусть $\Sigma=\partial\Omega_0$ — граница области Ω_0, а $\Sigma_1=\partial\Omega\setminus\Sigma$ — внешняя часть границы области Ω. Предположим, что Σ, $\Sigma_1\in C^2$. Пусть n — нормаль к $\partial\Omega$, внешняя относительно области Ω. Будем рассматривать декартову систему координат (x_1, x_2, x_3), вращающуюся вместе с телом вокруг оси Ox_3, k — орт этой оси. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение точки $x\in\Omega$ в момент времени t. Аналогично $w(x, t)$ — отклонение точки $x\in\Omega_0$ в момент времени t. Пусть ρ_0 — плотность идеальной жидкости, $\rho(x)$ — плотность упругого тела, $p(x, t)$ — отклонение от равновесного давления в жидкости. Мы предполагаем, что упругое тело изотропно, поэтому тензор напряжения этого тела имеет вид $\sigma_{jk}(u)=\Lambda\delta_{jk}\operatorname{div} u+\mathrm{M}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$, где δ_{jk} — символ Кронекера, а Λ и M — константы Ляме. Пусть $(Lu)_j\equiv-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{jk}(u)}{\partial x_k}$ $(j=1, 2, 3)$.

Рассматривая движения вида $u(x, t)=\exp(i\lambda t)u(x)$, $\rho_0 w(x, t)=\exp(i\lambda t)w(x)$, $p(x, t)=\exp(i\lambda t)p(x)$, придем к следующей задаче на собственные значения относительно спектрального параметра λ:

$$Lu-\rho\lambda^2 u=0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \sigma(u)n|_{\Sigma_1}=0, \tag{0.1}$$

$$\lambda^2 w+2i\varepsilon\lambda w\times k-\nabla p=0, \quad \operatorname{div} w=0 \quad (\text{в } \Omega_0), \tag{0.2}$$

$$\sigma(u)n|_\Sigma=pn|_\Sigma, \quad (w, n)|_\Sigma=\rho_0(u, n)|_\Sigma. \tag{0.3}$$

Систематическое изучение задачи о малых движениях идеальной жидкости во вращающемся твердом сосуде начато в [2]. Изучение спектральных свойств этой задачи было продолжено в [3—7] и других работах. Наши исследования отличаются от указанных тем, что мы рассматриваем жидкость, находящуюся в упругом сосуде. Это приводит, как будет указано ниже, к появлению дополнительной серии точек дискретного спектра.

В работах ряда авторов ранее изучались также малые колебания жидкости, находящейся в неподвижном упругом сосуде. Из этих работ отметим результаты, полученные в [8—10] и ряде других работ. В этих случаях возникал лишь дискретный спектр. В отличие от указанной серии работ мы исследуем вращающуюся жидкость. Это приводит, как будет указано ниже, к появлению дополнительной серии точек непрерывного спектра.

§ 1. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К КВАДРАТИЧНОМУ ПУЧКУ

Покажем, что задача (0.1)—(0.3) может быть сведена к квадратичному пучку. Воспользуемся разложением $L_2(\Omega_0)=H_1(\Omega_0)\oplus H_2(\Omega_0)\oplus \oplus H_3(\Omega_0)$, где $H_1=\{w=\nabla\varphi,\ \varphi\in W_2^1(\Omega_0),\ \varphi|_\Sigma=0\}$, $H_2=\{w=\nabla\varphi,\ \varphi\in W_2^1(\Omega_0),\ \Delta\varphi=0 \ (\text{в } \Omega_0),\ \int\limits_\Sigma \varphi ds=0\}$, $H_3=\{w\in L_2(\Omega_0) : \operatorname{div} w=0 \ (\text{в } \Omega_0),\ (w, n)|_\Sigma=0\}$ *). Отметим, что $H_1\oplus H_2$ — множество всех потенциальных векторных полей, H_3 — множество соленоидальных векторных полей.

Пусть $H_0=L_2(\Sigma)\ominus\{1\}$. Рассмотрим оператор $C: H_0\to H_0$, действующий по следующему правилу: для любого $\alpha\in H_0$ рассмотрим обобщенное из класса $W_2^1(\Omega_0)$ решение задачи $\Delta\beta=0$ (в Ω_0), $\left.\frac{\partial\beta}{\partial n}\right|_\Sigma=\alpha$, $\int\limits_\Sigma \beta ds=0$ и положим $C\alpha=\beta|_\Sigma$. В дальнейшем функцию $\beta(x)$ будем характеризовать следующим образом: $\nabla\beta\in H_2$, $\left.\frac{\partial\beta}{\partial n}\right|_\Sigma=\alpha$. Известно (см., например, [11]), что $C>0$, $C=C^*$, $C\in\sigma_\infty$.

В пространстве $H=H_3\oplus H_0$ рассмотрим всюду плотное подмножество H', состоящее из элементов $y=(v, \eta)$, где $v\in H_3$, $\eta\in D(C^{-1/2})$. Для произвольного $y\in H'$ построим функцию $w(x)\in H_2\oplus H_3$ по следующему правилу:

$$w=\nabla\Phi+v, \quad \text{где } v\in H_3, \text{ а } \nabla\Phi\in H_2 \text{ и } \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\Sigma=C^{-1/2}\eta. \tag{1.1}$$

Можно показать, что существует единственный линейный непрерывный оператор $\mathcal{A}: H\to H$, $D(\mathcal{A})=H$, такой, что

$$(\mathcal{A}y, y_1)_H=-i\int\limits_{\Omega_0}(w\times k, w_1)dx \tag{1.2}$$

для любых y, $y_1\in H'$, где w и w_1 — построенные по ним в соответствии с правилом (1.1) функции. Для этого оператора справедливо $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$, $\|\mathcal{A}\|\leqslant 1$. Такой подход к определению оператора $\mathcal{A}$ нам представляется более предпочтительным, чем традиционный его вывод с помощью орто-

* Если $w\in H_3\cap W_2^1(\Omega_0)$, то условия $\operatorname{div} w=0$, $(w, n)|_\Sigma=0$ выполняются дословно. Если же w лишь элемент $L_2(\Omega_0)$, принадлежащий H_3, то условия понимаются в том смысле, что $\int\limits_{\Omega_0}(w, \nabla\varphi)dx=0$ для любой функции $\varphi\in W_2^1(\Omega_0)$. Можно показать, что множество $H_3\cap W_2^1(\Omega_0)$ плотно в H_3.

проекторов в $L_2(\Omega_0)$. Представив $\mathcal{A}y$ в форме $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix}$, положим в (1.2) $\eta=\eta_1=0$ и обозначим символом P ортопроектор $L_2(\Omega_0)$ на H_3, получим в результате

$$\mathcal{A}_{11}v=-iP[v\times k], \quad \mathcal{A}_{11}: H_3\to H_3.$$

Этот оператор называется гироскопическим. Очевидно, что $\mathcal{A}_{11}=\mathcal{A}^*_{11}$, $\|\mathcal{A}_{11}\|\leqslant 1$. В работе [7] доказано, что для производной области Ω_0 с достаточно гладкой границей спектр оператора $\mathcal{A}_{11}$ является лишь непрерывным и заполняет целиком отрезок $[-1; 1]$.

Перейдем теперь к рассмотрению решения уравнений (0.2). Из условия $\operatorname{div} w=0$ и определения H_3 вытекает, что

$$w=\nabla\Phi+v\,(\nabla\Phi\in H_2,\ v\in H_3),\quad \nabla p=\nabla q+\nabla\varphi(\nabla q\in H_1,\ \nabla\varphi\in H_2). \tag{1.3}$$

Будем искать эти функции в предположении, что $\nabla\Phi$, $\nabla\varphi\in H_2\cap W^1_2(\Omega_0)$. В этом случае существуют следы $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\Sigma$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Sigma\in H_0$. Положим $\eta=C^{1/2}\left(\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\Sigma\right)$ и рассмотрим $y=(v,\eta)\in H'$, тогда w можно интерпретировать как функцию, построенную по y в соответствии с правилом (1.1). Для произвольного $y_1\in H'$ построим по тому же правилу функцию w_1 и умножим на нее скалярно в $L_2(\Omega_0)$ первое из уравнений (0.2). Используя (1.2), равенство $(w, w_1)_{L_2(\Omega_0)}=(y, y_1)_H$ и произвольность $y_1\in H$, приходим к соотношению

$$(\lambda^2E-2\varepsilon\lambda\mathcal{A})\begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1/2}\varphi \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Итак, мы свели вопрос о нахождении функции w, представимой в виде (1.3), к решению уравнения (1.4), где $\eta=C^{1/2}\left(\left.\frac{d\Phi}{dn}\right|_\Sigma\right)$. Используя (1.3), перепишем краевые условия (0.3) в виде

$$\sigma(u)n|_\Sigma=\varphi n|_\Sigma,\quad \eta=\rho_0C^{1/2}(u, n)|_\Sigma. \tag{1.5}$$

Перейдем к изучению функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям (0.1). Введем в рассмотрение [12] квадратные матрицы a_{pq} третьего порядка ($p, q=1, 2, 3$) с элементами

$$a_{pq,\,ij}=\Lambda\delta_{ip}\delta_{jq}+\mathrm{M}(\delta_{ij}\delta_{pq}+\delta_{iq}\delta_{jp}),$$

где i — номер строки; j — номер столбца, и перепишем тензор деформации и оператор L в виде $\delta_{ip}(u)=\sum\limits_{q,\,j=1}^{3}a_{pq,\,ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_q}$, $Lu=-\sum\limits_{p=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_p}\times\left(\sum\limits_{q=1}^{3}a_{pq}\frac{\partial u}{\partial x_q}\right)$. Пусть $f(x)$ и $\psi(x)$ — вектор-функции из классов $L_2(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$ соответственно. Обобщенным из класса $W^1_2(\Omega)$ решением задачи

$$(L+E)u=f\ \ (\text{в }\Omega),\quad \sigma(u)n|_{\partial\Omega}=\psi \tag{1.6}$$

назовем вектор-функцию $u(x)\in W^1_2(\Omega)$ такую, что

$$\sum_{p,\,q=1}^{3}\int\limits_\Omega\left(a_{pq}\frac{\partial u}{\partial x_q},\ \frac{\partial\tau}{\partial x_p}\right)dx+\int\limits_\Omega(u,\tau)dx=\int\limits_\Omega(f,\tau)dx+\int\limits_{\partial\Omega}(\psi,\tau)ds \tag{1.7}$$

для любой вектор-функции $\tau(x)\in W^1_2(\Omega)$. Известно [12], что эта задача однозначно разрешима. Пусть $u_1=\mathcal{A}^{-1}f$ — решение задачи (1.6) при

$\psi=0$, а $u_2=T\psi$ — решение этой задачи при $f=0$, $\psi|_{\Sigma_1}=0$. Можно показать, что $T: L_2(\Sigma)\to W_2^1(\Omega)$ — ограниченный линейный оператор, а $\mathscr{A}^{-1}: L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ обладает следующими свойствами: $\mathscr{A}^{-1}>0$, $\mathscr{A}^{-1}=(\mathscr{A}^{-1})^*$, $\mathscr{A}^{-1}\in\sigma_\infty$, $D(\mathscr{A}^{1/2})=W_2^1(\Omega)$.

С помощью введенных операторов перепишем соотношения (0.1) и (1.5) в виде

$$u-\mathscr{A}^{-1}u-\lambda^2\mathscr{A}^{-1}(\rho u)-T(\varphi n)=0,\quad \eta=\rho_0 C^{1/2}(u,n)|_\Sigma. \tag{1.8}$$

Совершив замену $u=\mathscr{A}^{-1/2}\xi$, $\varphi=C^{1/2}\zeta$ и применив оператор $\mathscr{A}^{1/2}$ к левой части (1.8), получим с учетом (1.4) следующую систему:

$$\xi-\mathscr{A}^{-1}\xi-\lambda^2\mathscr{A}^{-1/2}(p\mathscr{A}^{-1/2}\xi)-Q\zeta=0,$$

$$(\lambda^2E-2\varepsilon\lambda\mathscr{A})\begin{pmatrix} v\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \zeta\end{pmatrix},$$

$$\eta=\rho_0Q^*\xi,$$

где $Q^*\xi=C^{1/2}(\mathscr{A}^{-1/2}\xi|_\Sigma, n)$, $Q^*: L_2(\Omega)\to H_0$; $Q\zeta=\mathscr{A}^{1/2}T(C^{1/2}\zeta n)$, $Q: H_0\to L_2(\Omega)$. Можно показать, что Q и Q^* — взаимно сопряженные вполне непрерывные операторы. Взяв от левой части второго уравнения оператор $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$, приходим к квадратичному пучку $\mathscr{L}(\lambda)$ в пространстве $\mathfrak{H}=L_2(\Omega)\oplus H_3(\Omega_0)$

$$\mathscr{L}(\lambda)z=0,\quad z\in\mathfrak{H},\quad \mathscr{L}(\lambda)\equiv A_0+2\varepsilon\lambda A_1-\lambda^2A_2, \tag{1.9}$$

где $A_0=\begin{pmatrix}E-A^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}\rho_0QA_{22}Q^* & QA_{21}\\ A_{12}Q^* & \rho_0^{-1}A_{11}\end{pmatrix}$,

$$A_2=\begin{pmatrix}A^{-1/2}\rho A^{-1/2}+\rho_0QQ^* & 0\\ 0 & \rho_0^{-1}E\end{pmatrix}.$$

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА

Перейдем к изучению пучка $\mathscr{L}(\lambda)$. Так как A_0, A_1 и A_2 — самосопряженные операторы, то $\mathscr{L}^*(\lambda)=\mathscr{L}(\bar\lambda)$. Такие пучки принято называть самосопряженными. В частности, при любом действительном λ оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ самосопряжен. Основные определения, связанные со спектром этого пучка, будем вводить так же, как и для обычного оператора. Будем говорить, что λ — регулярная точка, если существует ограниченный обратный оператор $\mathscr{L}^{-1}(\lambda)$, все остальные точки образуют спектр этого пучка; λ — точка дискретного спектра, если выполнимы два условия: $0<\dim\operatorname{Ker}\mathscr{L}(\lambda)<\infty$, $\operatorname{Im}\mathscr{L}(\lambda)=\overline{\operatorname{Im}\mathscr{L}(\lambda)}$ *); λ — точка непрерывного спектра, если выполнимо хотя бы одно из следующих условий: $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{L}(\lambda)=\infty$, $\operatorname{Im}\mathscr{L}(\lambda)\neq\overline{\operatorname{Im}\mathscr{L}(\lambda)}$.

Теорема 2.1. *Отрезок $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ целиком заполнен точками непрерывного спектра пучка $\mathscr{L}(\lambda)$.*

Доказательство. Так как отрезок $[-1; 1]$ целиком заполнен точками непрерывного спектра самосопряженного оператора $A_{11}: H_3\to H_3$, то (см. [13]) для любого $\lambda\in[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ найдется ортонормированная система функций $v_n\in H_3$ такая, что $\left(A_{11}-\frac{\lambda}{2\varepsilon}E\right)v_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Построим ортонормированную в $\mathfrak{H}$ систему $e_n=(0, v_n)$. Тогда

$$\mathscr{L}(\lambda)e_n=2\varepsilon\lambda\begin{pmatrix}QA_{21}v_n\\ \frac{1}{\rho_0}\left(A_{11}-\frac{\lambda}{2\varepsilon}E\right)v_n\end{pmatrix}.$$

*) Символами Ker и Im обозначаем соответственно ядро и образ оператора.

Так как QA_{21} — вполне непрерывный оператор: $H_3(\Omega_0)\to L_2(\Omega)$, а $\{v_n\}$ — ортонормированная система, то $QA_{21}v_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Следовательно, $\mathscr{L}(\lambda)e_n\to 0$ $(n\to\infty)$, т. е. [13, с. 3—7] λ — точка непрерывного спектра. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Спектр пучка $\mathscr{L}(\lambda)$ действительный. Любая точка спектра из множества $R\setminus[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ является точкой дискретного спектра.*

Доказательство. 1) Умножая уравнение $\mathscr{L}(\lambda)z=0$ в области $\Omega_\varepsilon=$ $=C\setminus[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ слева на обратимый оператор $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 2\varepsilon\lambda\rho_0^{-1}\left(A_{11}-\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}E\right)^{-1}\end{pmatrix}$, приходим к уравнению $[E-\mathscr{L}_1(\lambda)]z=0$, где $\mathscr{L}_1(\lambda)$ — вполне непрерывный оператор при любом $\lambda\in\Omega_\varepsilon$. Поэтому λ — либо регулярная точка, либо точка дискретного спектра, и критерием принадлежности в Ω_ε точки λ спектру является условие $\operatorname{Ker}\mathscr{L}(\lambda)\neq 0$.

2) Покажем, что любая точка спектра из области Ω_ε является действительным числом. Пусть $\lambda\in\Omega_\varepsilon$, $\operatorname{Ker}\mathscr{L}(\lambda)\neq 0$, тогда найдется отличный от нуля элемент $z\in\mathfrak{H}$, такой, что $\mathscr{L}(\lambda)z=0$, следовательно,

$$(\mathscr{L}(\lambda)z,\ z)_{\mathfrak{H}}=0. \tag{2.1}$$

Покажем, что пучок $\mathscr{L}(\lambda)$ является гиперболическим, т. е. при любом $z\neq 0$ уравнение (2.1) имеет лишь действительные корни λ. Гиперболические пучки систематически изучались в работе [14]. Пусть $z=(\xi,\ v)$, вводя замену $u=A^{-1/2}\xi$ и обозначая символом $\langle u,\ \tau\rangle$ скалярное произведение в $W_2^1(\Omega)$, задаваемое левой частью (1.7), получим

$$(A_0z,\ z)_{\mathfrak{H}}=(\xi,\ \xi)_{L_2(\Omega)}-(A^{-1}\xi,\ \xi)_{L_2(\Omega)}=(A^{1/2}u,\ A^{1/2}u)_{L_2(\Omega)}-$$

$$-(u,\ u)_{L_2(\Omega)}=(Au,\ u)_{L_2(\Omega)}-(u,\ u)_{L_2(\Omega)}=\langle u,\ u\rangle-(u,\ u)_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\sum_{p,\,q=1}^{3}\int_\Omega\left(a_{pq}\frac{\partial u}{\partial x_p},\ \frac{\partial u}{\partial x_q}\right)dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{M}{2}\sum_{i,\,j=1}^{3}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2dx\geqslant 0,$$

т. е.

$$A_0\geqslant 0. \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь $(A_2z,\ z)_{\mathfrak{H}}$, где $z\neq 0$,

$$(A_2z,\ z)_{\mathfrak{H}}=(A^{-1/2}\rho A^{-1/2}\xi,\ \xi)_{L_2(\Omega)}+\rho_0(QQ^*\xi,\ \xi)_{L_2(\Omega)}+\frac{1}{\rho_0}(v,\ v)_{L_2(\Omega_0)}=$$

$$=(\rho A^{-1/2}\xi,\ A^{-1/2}\xi)_{L_2(\Omega)}+\rho_0(Q^*\xi,\ Q^*\xi)_{L_2(\Sigma)}+\frac{1}{\rho_0}(v,\ v)_{L_2(\Omega_0)}\geqslant$$

$$\geqslant\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho(x)(A^{-1/2}\xi,\ A^{-1/2}\xi)_{L_2(\Omega)}+\frac{1}{\rho_0}(v,\ v)_{L_2(\Omega)}>0,$$

т. е.

$$A_2>0. \tag{2.3}$$

Так как (2.1) является квадратным уравнением относительно λ с действительными коэффициентами, то из (2.2) и (2.3) вытекает, что оно имеет два действительных корня, т. е. рассматриваемый пучок является гиперболическим. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Любая точка спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ из множества $R\setminus[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ является изолированной.*

Доказательство. Сведем, как и при доказательстве первой части теоремы 2.2, уравнение $\mathcal{L}(\lambda)z=0$ к виду $[E-\mathcal{L}_1(\lambda)]z=0$, где $\mathcal{L}_1(\lambda)$ — голоморфная в области Ω_ε операторная функция, значения которой являются вполне непрерывными операторами. Пусть λ_0 — точка спектра из области Ω_ε, тогда [15, с. 37] существует $\delta>0$ такое, что $\dim\operatorname{Ker}(E-\mathcal{L}_1(\lambda))\equiv\mathrm{const}$ для любых $\lambda: 0<|\lambda-\lambda_0|<\delta$. Так как любое не действительное λ' является регулярной точкой, то $\dim\operatorname{Ker}(E-\mathcal{L}_1(\lambda'))=0$, т. е. $\dim\operatorname{Ker}(E-\mathcal{L}_1(\lambda))\equiv 0$ для любых $\lambda: 0<|\lambda-\lambda_0|<\delta$. Из результатов теоремы 2.2 вытекает, что все такие λ являются регулярными точками. Теорема доказана.

§ 3. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ

Лемма 3.1. *Для любых $r>2\varepsilon$ и $\delta>0$ в области $\Omega_{r,\delta}=\{\lambda: r<|\lambda|,\ \delta<|\arg\lambda|<\pi-\delta\}$ выполнима оценка резольвенты*

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\|\leqslant C(\delta, r). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $z=(\xi, v)\in\mathfrak{H}$, рассмотрим выражение $(\mathcal{L}(\lambda)z, z) = (A_0z, z) + 2\varepsilon\lambda(A_1z, z) - \lambda^2(A_2z, z) = -(A_2z, z)(\lambda-\lambda_1)\times(\lambda-\lambda_2)$, где λ_1 и λ_2 — корни (действительные ввиду гиперболичности пучка $\mathcal{L}(\lambda)$) уравнения $(\mathcal{L}(\lambda)z, z)=0$. Следовательно,

$$|(\mathcal{L}(\lambda)z, z)| = (A_2z, z)|\lambda-\lambda_1||\lambda-\lambda_2|\geqslant(A_2z, z)|\operatorname{Im}\lambda|^2, \tag{3.2}$$

где $\operatorname{Im}\lambda$ — мнимая часть λ.

Введя обозначение $\mu=1/\lambda$, перепишем выражение $(\mathcal{L}(\lambda)z, z)$ в виде $(\mathcal{L}(\lambda)z, z)=\lambda^2[(A_0z, z)\mu^2+2\varepsilon\mu(A_1z, z)-(A_2z, z)]=\lambda^2(A_0z, z)(\mu-\mu_1)\times(\mu-\mu_2)$, где $\mu_1=1/\lambda_1$, $\mu_2=1/\lambda_2$ — действительные числа, т. е.

$$|(\mathcal{L}(\lambda)z, z)|\geqslant|\lambda|^2(A_0z, z)|\operatorname{Im}\mu|^2=(A_0z, z)|\operatorname{Im}\lambda|^2/|\lambda|^2. \tag{3.3}$$

Из соотношений, фигурирующих при выводе (2.2) и (2.3), вытекает, что $(A_0z, z)=(\xi, \xi)_{L_2(\Omega)}-(A^{-1}\xi, \xi)_{L_2(\Omega)}$; $(A_2z, z)\geqslant\min\{1/\rho_0, \min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\rho(x)\}\times[(A^{-1}\xi, \xi)_{L_2(\Omega)}+(v, v)_{L_2(\Omega_0)}]$. Из этих соотношений, (3.2) и (3.3) следует справедливость оценки

$$\|z\|^2=\|\zeta\|^2_{L_2(\Omega)}+\|v\|^2_{L_2(\Omega_0)}\leqslant\frac{C_0(1+|\lambda|^2)}{|\operatorname{Im}\lambda|^2}|(\mathcal{L}(\lambda)z, z)|, \tag{3.4}$$

где C_0 — положительная константа, зависящая лишь от ρ_0 и $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\rho(x)$. Так как $|(\mathcal{L}(\lambda)z, z)|\leqslant\|\mathcal{L}(\lambda)z\|\|z\|$, то из (3.4) вытекает, что

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\|\leqslant C_0(1+|\lambda|^2)/|\operatorname{Im}\lambda|^2\leqslant C_0(1+r^{-2})\sin^2\delta=C(\delta, r).$$

Лемма доказана.

Разрешим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\begin{pmatrix}\xi\\ v\end{pmatrix}=0$ относительно ξ и $v: e(\xi)=0$, $v=-2\varepsilon\rho_0(2\varepsilon A_{11}-\lambda E)^{-1}A_{12}Q^*\xi$, где

$$e(\lambda): L_2(\Omega)\to L_2(\Omega),\ e(\lambda)\equiv E-A^{-1}+2\varepsilon\rho_0\lambda QA_{22}Q^*-\lambda^2(A^{-1/2}\rho A^{-1/2}+$$
$$+\rho_0QQ^*)-4\varepsilon^2\rho_0\lambda QA_{21}(2\varepsilon A_{11}-\lambda E)^{-1}A_{12}Q^*. \tag{3.5}$$

Собственные значения пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в области Ω_ε и первые координаты отвечающих им собственных функций являются соответственно собственными значениями и собственными функциями пучка $e(\lambda)$.

Теорема 3.1. *Система собственных функций пучка $e(\lambda)$ двукратно полна в $L_2(\Omega)$, быть может, с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. Представим пучок $e(\lambda)$ при $|\lambda|>2\varepsilon$ в виде ряда $e(\lambda)=E-\sum_{n=-\infty}^{2} B_n\lambda^n$, где B_n — самосопряженные, вполне непрерывные операторы. Этот ряд сходится абсолютно, т. е. $\sum_{n=-\infty}^{2} |\lambda|^n\|B_n\|<\infty$. Выберем какое-либо $r>2\varepsilon$, не являющееся точкой спектра пучка $e(\lambda)$, так как при любом $\lambda: |\lambda|=r$ оператор $e(\lambda)$ обратим, то, применяя факторизационную теорему [16], получим

$$e(\lambda)=(E-T_-(\lambda))P(\lambda)(E-T_+(\lambda)),\ |\lambda|=r, \tag{3.6}$$

где оператор-функция (о. ф.) $T_+(\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^nT_n^+$ аналитична при $|\lambda|<r$ и непрерывна при $|\lambda|\leqslant r$, $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\|T_n^+\|<\infty$, а о. ф. $T_-(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{0}\lambda^nT_n^-$ аналитична при $|\lambda|>r$ и непрерывна при $|\lambda|\geqslant r$, $\sum_{n=-\infty}^{0} r^n\|T_n^-\|<\infty$; $(E-T_\pm(\lambda))^{-1}=E-Q_\pm(\lambda)$, причем операторы $Q_+(\lambda)$ и $Q_-(\lambda)$ обладают теми же указанными свойствами, что и операторы $T_+(\lambda)$ и $T_-(\lambda)$ соответственно. Существует разложение $L_2(\Omega)$ в прямую сумму подпространств G_k $(k=0, 1, \ldots, N)$ такое, что $\dim G_k<\infty$ при $k\neq 0$ и $P(\lambda)=$ $=\sum_{k=0}^{N} r^{-\alpha_k}\lambda^{\alpha_k}P_k$, где P_k — ортопроектор $L_2(\Omega)$ на G_k, α_k — некоторые целые (возможно, и отрицательные) числа, $\alpha_0=0$.

Пусть

$$\Phi_+(\lambda)=\begin{cases} P(\lambda)(E-T_+(\lambda)), & |\lambda|\leqslant r,\\ (E-Q_-(\lambda))e(\lambda), & |\lambda|>r,\end{cases} \tag{3.7}$$

из (3.6) $\Phi_+(\lambda)$ — голоморфная при $\lambda\neq 0$ о. ф. Так как при $|\lambda|>r$ $e(\lambda)=$ $=(E-T_-(\lambda))\Phi_+(\lambda)$ и $(E-T_-(\lambda))$ — обратимая о. ф., а $\Phi_+(\lambda)$ обратима при $|\lambda|\leqslant r$, то система собственных функций пучка $e(\lambda)$ при $|\lambda|>r$ совпадает с системой собственных функций о. ф. $\Phi_+(\lambda)$ *). Теорема будет доказана, если мы покажем, что система собственных функций о. ф. $\Phi_+(\lambda)$ двукратно полна в $L_2(\Omega)$, быть может, с точностью до конечного дефекта. Предположим, что это не так. Так как операторы проецирования P_k $(k\neq 0)$ конечномерны, то из [17] вытекает существование ненулевого вектора $(\xi_0, \xi_1)\in L_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)$, такого, что вектор-функция $y(\lambda)=[\Phi_+^*(\bar\lambda)]^{-1}(\xi_0+\lambda\xi_1)$ будет целой. Следовательно, для произвольного $\varphi\in L_2(\Omega)$ функция $F_\varphi(\lambda)=(y(\lambda), \varphi)=(e^{-1}(\lambda)(\xi_0+\lambda\xi_1), (E-$ $-T_-(\bar\lambda))\varphi)$ будет целой. Из леммы 3.1 вытекает, что в области $\Omega_{r,\delta}$

$$|F_\varphi(\lambda)|=O(\lambda) \text{ при } |\lambda|\to\infty. \tag{3.8}$$

Так как $D(A)\subset W_2^1(\Omega)$ (см. § 1), то из [18] вытекает, что оператор $A^{-1}\in\sigma_p$, $p>0$. Следовательно, и операторы Q и Q^* также имеют конечный порядок. Из (3.5), (3.7) с привлечением результатов работ [17, 19] вытекает, что $F_\varphi(\lambda)$ имеет конечный порядок роста. Применяя теорему Фрагмена — Линделефа [20] в области $C\backslash\Omega_{r,\delta}$ для достаточно малого δ, убеждаемся в справедливости соотношения (3.8) в C, из которого в свою очередь (см. [20]) вытекает, что $F_\varphi(\lambda)=C_0+\lambda C_1$, где C_0, C_1 — константы, зависящие от φ. Следовательно, $y(\lambda)=y_0+\lambda y_1$, где y_0, y_1 — постоянные векторы, т. е.

$$\Phi_+^*(\bar\lambda)(y_0+\lambda y_1)=\xi_0+\lambda\xi_1. \tag{3.9}$$

---

*) Подчеркнем, что так как $\operatorname{Ker} e(\lambda)=0$ при недействительных λ, а при действительных λ $e(\lambda)$ — самосопряженный оператор, то о. ф. $e(\lambda)$, а стало быть, и $\Phi_+(\lambda)$ не имеют присоединенных функций.

Из (3.5) и (3.7) вытекает, что $\Phi_+^*(\bar\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{2}\lambda^k\Phi_k^{*'}$, где $\Phi_2^*=$ $=-(A^{-1/2}\rho A^{-1/2}+\rho_0QQ^*)(E-Q_0^*)$, Q_0^* — операторный коэффициент при λ^0 в разложении $Q_-^*(\lambda)$. Так как $\operatorname{Ker}(E-Q_0^*)=0$, то $\operatorname{Ker}\Phi_2^{*'}=0$. Приравнивая нулю коэффициенты при λ^2 и λ^3 в левой части (3.9), получим систему уравнений

$$\Phi_2^*(y_1)=0,\ \Phi_2^*(y_0)+\Phi_1^*(y_1)=0,$$

из которой вытекает, что $y_0=y_1=0$, а значит, и $\xi_0=\xi_1=0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Так как нами была сделана в § 1 замена $u=A^{-1/2}\xi$, то полученные в § 2, 3 результаты можно переформулировать в следующем виде:

Теорема 3.2. *Спектр задачи (0.1)—(0.3) действительный. Отрезок* $[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ *целиком заполнен точками непрерывного спектра. На лучах* $R\backslash[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ *спектр состоит из изолированных собственных значений (с. з.)* λ_n *конечной алгебраической кратности. Если с. з.* λ_n *отвечает собственная функция (с. ф.)* $(u_n,\ w_n)$, *то число* $-\lambda_n$ *также будет с. з. с с. ф.* $(\bar u_n,\ \bar w_n)$. *Система всех векторов* $(u_n,\ \lambda_n u_n)$, *отвечающих с. з.* $\lambda_n \in R\backslash[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$, *полна в пространстве* $W_2^1(\Omega)\oplus W_2^1(\Omega)$, *быть может, с точностью до конечного дефекта.*

§ 4. ЖИДКОСТЬ В УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ

В предыдущих параграфах рассматривался тот случай, когда сосуд являлся упругим телом. Пусть теперь замкнутая упругая оболочка $\Sigma\in C^4$ постоянной малой толщины h ограничивает область Ω_0, заполненную идеальной несжимаемой жидкостью. Пусть, как и ранее, сосуд вращается с постоянной угловой скоростью εk вокруг фиксированной оси Ox_3. Подставляя в уравнение свободных колебаний [21, с. 77] этой механической системы решения вида $u(\alpha,\ \beta,\ t)=\exp(i\lambda t)u(\alpha,\ \beta)$, $\rho_0 w(x,\ t)\equiv$ $\equiv\exp(i\lambda t)w(x)$, $p(x,\ t)=\exp(i\lambda t)p(x)$, придем к задаче на собственные значения

$$\frac{Eh}{1-\mu^2}Lu-\rho h\lambda^2u-pn=0\quad(\text{на }\Sigma),\tag{4.1}$$

$$\lambda^2w+2i\varepsilon\lambda w\times k-\nabla p=0,\ \operatorname{div}w=0\quad(\text{в }\Omega_0),\tag{4.2}$$

$$(w,\ n)|_\Sigma=\rho_0(u,\ n)|_\Sigma.\tag{4.3}$$

Здесь уравнение (4.1) выписано в ортогональной криволинейной системе координат $(\alpha,\ \beta)$, заданной на Σ, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, $0<\mu<1/2$, L — эллиптический, по Дугласу — Ниренбергу, оператор (по поводу уравнения (4.1) см. [22]).

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\left(\frac{Eh}{1-\mu^2}L+E\right)u=f\ (\text{на }\Sigma),\ f\in L_2(\Sigma).$$

Ее решение существует и определяется однозначно: $u=A^{-1}f$. При этом $A^{-1}>0$ в $L_2(\Sigma)$ и $D(A^{1/2})=W_2^{1,\,1,\,2}(\Sigma)$. Совершая замену $u=A^{-1/2}\xi$ и используя обозначения из § 1, перепишем систему (4.1)—(4.3) в виде

$$\xi-A^{-1}\xi-h\lambda^2A^{-1/2}(\rho A^{-1/2}\xi)-Q_0\zeta=0,$$

$$(\lambda^2E-2\varepsilon\lambda A)\begin{pmatrix}v\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \zeta\end{pmatrix},\ \eta=\rho_0Q_0^*\zeta\ (\text{на }\Sigma),$$

где $Q=A^{-1/2}nC^{1/2}$; $Q_0^*=C^{1/2}nA^{-1/2}$, эти операторы взаимно сопряжены в $L_2(\Sigma)$. Проводя дальнейшие преобразования этой системы по схеме, приведенной в § 1, приходим к аналогу (1.9): $\mathscr{L}_0(\lambda)\begin{pmatrix}\xi\\ v\end{pmatrix}=0$, где в отличие от (1.9) вместо операторов Q и Q^* берутся операторы Q_0 и Q_0^* соответственно, и оператор A^{-1} имеет указанный в этом параграфе смысл.

Результаты о структуре спектра пучка $\mathscr{L}_0(\lambda)$ формулируются и доказываются так же, как и в § 2, 3. В частности, справедлива

Теорема 4.1. *Спектр задачи (4.1)—(4.3) действительный. Отрезок* $[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ *целиком заполнен точками непрерывного спектра. На лучах* $R\setminus[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$ *спектр состоит из изолированных с. з.* λ_n *конечной алгебраической кратности. Если с. з.* λ_n *отвечает с. ф.* $(u_n,\ w_n)$, *то число* $-\lambda_n$ *также будет с. з. с с. ф.* $(\bar{u}_n,\ \bar{w}_n)$. *Система всех векторов* $(u_n,\ \lambda_n u_n)$, *отвечающих с. з.* $\lambda_n\in R\setminus[-2\varepsilon;\ 2\varepsilon]$, *полна в пространстве* $W_2^{1,1,2}(\Sigma)\oplus\oplus W_2^{1,1,2}(\Sigma)$, *быть может, с точностью до конечного дефекта.*

Перейдем теперь к выяснению вопроса об асимптотике дискретного спектра задачи (4.1)—(4.3) на бесконечности. Пусть

$$n(r)=\sum_{r_0<|\lambda_n|<r}1,$$

где r_0 — какое-либо фиксированное число ($r_0>2\varepsilon$), λ_n — с. з. задачи (4.1)—(4.3), выписанные с учетом кратности. Положим $n(r,\ L)=\sum_{|\tau_n|<r}1$, где τ_n — с. з. задачи $E(1-\mu^2)^{-1}Lu-\rho\tau^2u=0$ (на Σ).

Теорема 4.2. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$n(r)=n(r,\ L)(1+o(1)),\quad r\to\infty. \tag{4.4}$$

Доказательство. Введем аналогично § 3 пучок

$$e_0(\lambda)=E-A^{-1}+2\varepsilon\rho_0\lambda Q_0A_{22}Q_0^*-\lambda^2(hA^{-1/2}\rho A^{-1/2}+$$

$$+\rho_0Q_0Q^*)-4\varepsilon^2\rho_0\lambda Q_0A_{21}(2\varepsilon A_{11}-\lambda E)^{-1}A_{12}Q_0^*.$$

В области $\Omega'_{r_0,\delta}=\{\lambda: r_0<|\lambda|,\ |\arg\lambda|<\delta,\ \pi-\delta<|\arg\lambda|\}$, где $2\varepsilon<r_0$, $0<\delta$, преобразуем этот пучок к виду

$$e_0(\lambda)=E+\lambda C_0(\lambda)-\lambda^2A_0^{-1}, \tag{4.5}$$

где $A_0^{-1}=A^{-1/2}\rho A^{-1/2}+\rho_0Q_0Q^*$, $C_0(\lambda)=-\lambda^{-1}A^{-1}+2\varepsilon\rho_0Q_0A_{22}Q_0^*-$ $-4\varepsilon\rho_0Q_0A_{21}(2\varepsilon A_{11}-\lambda E)^{-1}A_{12}Q_0^*$.

Введя в рассмотрение $F(\lambda)=\lambda(E-i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}C_0(\lambda)(E+i\lambda A_0^{-1/2})^{-1}$, перепишем (4.5) в виде

$$e_0(\lambda)=(E-i\lambda A_0^{-1/2})(E+F(\lambda))(E+i\lambda A_0^{-1/2})-2\lambda^2A_0^{-1},$$

$F(\lambda)$ аналитична в $\Omega'_{r_0,\delta}$, и так как (см. [17]) $\|(E\pm i\lambda A^{-1/2})^{-1}A_0^{-\beta/2}\|=$ $=o(|\lambda|^{-\beta})$; $0<\beta<1$, $\lambda\in\Omega'_{r_0,\delta}$, $\lambda\to\infty$, то, учитывая вид операторов Q_0 и Q_0^*, получим

$$\|F(\lambda)\|\to0,\quad \lambda\in\Omega'_{r_0,\delta},\quad \lambda\to\infty. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) с использованием [23] получаем, что

$$n(r,\ e)=2n(r^2,\ A_0^{-1})(1+o(1)). \tag{4.7}$$

Из вида операторов Q_0 и Q_0^* несложно заключить, что правая часть (4.7) может быть записана в виде правой части (4.4). Теорема доказана.

Автор глубоко признателен В. А. Ильину и М. Б. Оразову за полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Гараджаев А. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 2. С. 277—281.

2. Соболев С. Л. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3—50.

3. Александрян Р. А. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 455—505.

4. Зеленяк Т. И. Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Новосибирск, 1970.

5. Зеленяк Т. И., Капитонов Б. В., Сказка В. В., Фокин М. В. О проблеме С. Л. Соболева в теории малых колебаний вращающейся жидкости. Новосибирск, 1983. (Препринт: № 471).

6. Копачевский Н. Д. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. Харьков, 1978. (Препринт: № 38—77).

7. Ralston J. V. // J. of math. anal. and appl. 1973. Vol. 44. P. 366—383.

8. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., 1965.

9. Рапопорт И. М. Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью. М., 1967.

10. Оразов М. Б. // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1980. С. 148—151.

11. Копачевский Н. Д. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 5. С. 1065—1068.

12. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М., 1974.

13. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, 1978. Т. 2.

14. Оразов М. Б., Радзиевский Г. В. // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 572—587.

15. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.

16. Гохберг И. Ц. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 5. С. 1055—1082.

17. Радзиевский Г. В. // Мат. сб. 1973. Т. 91, № 3. С. 310—335.

18. Параска В. И. // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 4. С. 621—631.

19. Гасымов М. Г. // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. 1971. Т. 6, № 2—3. С. 131—147.

20. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., 1984.

21. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979.

22. Рапопорт И. М. Колебание упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М., 1967.

23. Радзиевский Г. В. // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. С. 396—420.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.

УДК 517.95

В. Н. ДЕНИСОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ ОТ РАЗНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая работа посвящена выяснению необходимых и достаточных условий стабилизации средних Чезаро — Рисса по времени от решения задачи Коши для волнового уравнения, уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (ЭПД) и итерированного волнового уравнения.

Необходимые и достаточные условия стабилизации средних Рисса по времени от решения задачи Коши для уравнения ЭПД при $u(x, 0) =$