А. Л. Кузьмина, Знакопостоянные многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в $C(E_m)$,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 40–42

А. Л. Кузьмина УДК 517.518

ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В $C(E_m)$

Пусть $E_m=[-1, 1]\setminus\bigcup_{i=1}^{m}(\alpha_i, \beta_i)$, (α_i, β_i), $i=\overline{1, m}$, дизъюнктны, $C_m\equiv C(E_m)$ — пространство непрерывных на E_m функций с max-нормой.

Рассмотрим следующую задачу: найти

$$\mu_n^{\pm}(E_m)=\min_{P_n\in \mathbf{P}^{\pm}}\|P_n\|_{C_m}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{P}_n^{\pm}=\{P_n(x)=x^n+\ldots \mid \pm P_n(x)\geqslant 0, \ x\in E_m\}$$

— множества неотрицательных и неположительных на E_m многочленов соответственно, и многочлены $P^{\pm}(x)\in\mathbf{P}_n^{\pm}$, наименее уклоняющиеся от нуля в C_m, т. е.

$$\|P_n^{\pm}\|_{C_m}=\mu_n^{\pm}(E_m). \tag{2}$$

Существование и единственность решения задачи (1) — (2) следует из общей теории наилучших приближений в $C(K)$, K — компакт (см. [1]).

Дадим решение задачи (1) — (2), не используя при этом представления знакопостоянных многочленов на E_m.

Пусть $P_n^*(x)=x^n+\ldots$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в C_m. Так как многочлены $Q_n^{\pm}(x)=P_n^*(x)\pm\|P_n^*\|_{C_m}\in\mathbf{P}_n^{\pm}$ соответственно, и $\|Q_n^{\pm}\|_{C_m}=2\|P_n^*\|_{C_m}$, то $\mu_n^{\pm}(E_m)\leqslant 2\|P_n^*\|_{C_m}$. Но $\mu_n^{\pm}(E_m)<2\|P_n^*\|_{C_m}$ быть не может, т. к. тогда многочлены $P_n^{\pm}(x)\mp\frac{1}{2}\|P_n^{\pm}\|_{C_m}$, $\|P_n^{\pm}\|_{C_m}=\mu_n^{\pm}(E_m)$, со старшими коэффициентами, равными единице, имели бы норму, равную $(1/2)\mu_n^{\pm}(E_m)<\|P_n^*\|_{C_m}$, что невозможно.

Таким образом, найдены $\mu_n^{\pm}(E_m)=2\|P_n^*\|_C$ и многочлены

$$P_n^{\pm}(x)\equiv Q_n^{\pm}(x)=P_n^*(x)\pm\|P_n^*\|_{C_m}\in\mathbf{P}_n^{\pm},$$

следовательно, задача (1) — (2) сведена к нахождению многочлена, наименее уклоняющегося от нуля в C_m, и его нормы.

Заметим также, что единственность решения задачи (1) — (2) следует из единственности многочлена, наименее уклоняющегося от нуля в C_m, равного

$$P_n^{\pm}(x)\mp(1/2)\|P_n^{\pm}\|_{C_m}.$$

Приведем решение задачи (1) — (2) в случае, когда $E\equiv E_1=[-1, 1]\setminus(-\alpha, \alpha)$, $0<\alpha<1$.

При $n=2k$ имеем

$$\mu_n^{\pm}(E)=\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^k\frac{1}{2^{k-2}},$$

$$P_n^*(x)=\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^k\widetilde{T}_k\left(\frac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

$$\widetilde{T}_k(t)=\frac{1}{2^{k-1}}\cos k\arccos t.$$

А тогда

$$P_n^{+}(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-\alpha^2}{2}\right)^{2r}\widetilde{T}_r^2\left(\dfrac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right), & k=2r;\\ \left(\dfrac{1-\alpha^2}{2}\right)^{2r}(x^2-\alpha^2)\left[\widetilde{J}_r^{(-1/2,\ 1/2)}\left(\dfrac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\right]^2, & k=2r+1,\end{cases}$$

и

$$P_n^-(x)=\begin{cases}\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{2r-2}(x^2-1)(x^2-\alpha^2)\,\widetilde{U}_{r-1}^2\left(\frac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right), & k=2r;\\ \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{2r}(x^2-1)\left[\widetilde{J}_r^{(1/2,\,-1/2)}\left(\frac{2x^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\right]^2, & k=2r+1,\end{cases}$$

где $\widetilde{J}_r^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлены Якоби со старшими коэффициентами, равными единице, ортогональные с весом $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $(\alpha>-1,\ \beta>-1)$, $\widetilde{U}_r(t)\equiv$ $\equiv\widetilde{J}_r^{(1/2,\,1/2)}(t)$.

При $n=2k+1$ имеем

$$\mu_n^{\pm}(E)\sim\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{k+1/2}\frac{1}{2^{k-2}}\sqrt{-\frac{\widetilde{T}_{k+1}(-\xi)}{\widetilde{T}_k(-\xi)}},$$

$\xi=(1+\alpha^2)/(1-\alpha^2)$ $(\xi>1)$, т. к.

$$\|P_n^*\|_{C_1}=\min_{\widetilde{P}_n}\max_{x\in E}|\widetilde{P}_n(x)|=\min_{\widetilde{Q}_k}\max_{x\in[\alpha,1]}x\,|\widetilde{Q}_k(x^2)|=$$

$$=\min_{\widetilde{Q}_k}\max_{|t|\leqslant1}\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}t+\frac{1+\alpha^2}{2}}\left|\widetilde{Q}_k\left(\frac{1-\alpha^2}{2}t+\frac{1+\alpha^2}{2}\right)\right|=$$

$$=\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)^{k+1/2}\min_{\widetilde{R}_k}\max_{|t|\leqslant1}\sqrt{t+\xi}\,|\widetilde{R}_k(t)|,\quad \xi=(1+\alpha^2)/(1-\alpha^2)\quad(\xi>1),$$

$$\min_{\widetilde{R}_k}\max_{|t|\leqslant1}\sqrt{t+\xi}\,|\widetilde{R}_k(t)|\sim\sqrt{2/\pi}\,\|\widetilde{S}_k\|_{L_{2,q}},$$

где многочлены

$$\widetilde{S}_k(t)=\frac{1}{t+\xi}\left(\widetilde{T}_{k+1}(t)-\frac{\widetilde{T}_{k+1}(-\xi)}{\widetilde{T}_k(-\xi)}\widetilde{T}_k(t)\right)$$

ортогональны с весом $q(t)=(t+\xi)/\sqrt{1-t^2}$ на $[-1,1]$,

$$\|\widetilde{S}_k\|_{L_{2,q}}^2=-\frac{\pi}{2^{2k-1}}\frac{\widetilde{T}_{k+1}(-\xi)}{\widetilde{T}_k(-\xi)},$$

асимптотически наименее уклоняются от нуля в $C_{\sqrt{t+\xi}}[-1,1]$ (см. [2], с. 91).

Замечание 1. Задача (1)—(2) в $C[-1,1]$ исследована как на основе представления знакопостоянных многочленов, так и, как здесь, без использования его в [3].

Замечание 2. Установленная асимптотика для $\mu_n^{\pm}(E)$ в сравнении с асимптотикой, которая следует из [4]:

$$\mu_n^{\pm}(E)\sim\frac{1}{2^{n-2}}\left[\frac{\theta_1(0,\varkappa)}{\theta_1(\rho,\varkappa)}\right]^{4n},$$

где

$$\rho=\int_0^{\sqrt{(1-\alpha)/2}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}},\quad \varkappa^2=\frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2},$$

значительно проще.

Так как многочлены $P_n^*(x)$ в зависимости от α и n представимы с помощью эллиптических, тригонометрических или автоморфных функций (см.

[5], с. 23—28), то выписать многочлены $P_n^{\pm}(x)$ при произвольном α для любого n не представляется возможным.

Замечание 3. Знакопостоянные многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на системе из двух симметричных отрезков в пространстве $L_p(1 \leqslant p < \infty)$, изучались в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.— 184 с.
2. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Соч.— Т. II. Конструктивная теория функций.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.— 627 с.
3. Кузьмина А. Л. О неотрицательных многочленах, наименее уклоняющихся от нуля в $C[-1, 1]$ // Конструктивн. теория функций и функц. анализ.— Казань, 1987.— Вып. 6.— С. 83—91.
4. Ахиезер Н. И. Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах // Изв. АН СССР. ОМЕН.— 1930.— С. 161—178.
5. Achyeser N. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 3.— 1928.— Т. 3.— Вып. 2.— С. 1—69.
6. Тырыгин И. Я. О знакопостоянных полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на системе отрезков в пространствах L_p // Теория приближения и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев, 1987.— С. 88—93.

г. Казань

Поступила 24.10.1988

С. В. Никитин

УДК 517.54

О ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Неравенство для логарифмической площади и некоторые следствия

Пусть S — класс регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, нормированных разложением $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ Если $f(z) \in S$, то обозначим

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k z^k \tag{1}$$

и будем называть числа $2\gamma_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ логарифмическими коэффициентами функции $f(z)$, а площадь образа круга $|z| \leqslant r$ при отображении функцией $\log(f(z)/z)$ — логарифмической площадью. Величина логарифмической площади $\sigma(r, \log(f(z)/z))$ может быть представлена в виде

$$\sigma\left(r, \log \frac{f(z)}{z}\right) = \iint\limits_{|z|<r} \left|\left(\log \frac{f(z)}{z}\right)'\right|^2 d\sigma = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k\,|\gamma_k|^2 r^{2k}.$$

При любом $p > 0$ положим

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{p/2} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(p)\, z^k, \quad I_p(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta. \tag{1'}$$

Теорема 1 (Л. де Бранж [1]). *Для каждой функции $f(z) \in S$ и любой последовательности чисел $\{\sigma_k\}_1^{n+1}$, подчиненной условиям невозрастания и выпуклости:*

$$\begin{aligned} &1)\ \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_n \geqslant \sigma_{n+1} = 0 \quad (n \geqslant 1), \\ &2)\ \sigma_k - \sigma_{k+1} \geqslant \sigma_{k+1} - \sigma_{k+2} \quad (k = \overline{1, n-1};\ n \geqslant 2), \end{aligned} \tag{2}$$