



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Карпук, А. В. Метельский, С. А. Минюк, Задачи идентифицируемости и управляемости для линейных автономных систем нейтрального типа второго порядка,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 455–463

<https://www.mathnet.ru/de11256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

28 апреля 2025 г., 19:15:07



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ
И УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ
СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2005 г. В. В. Карпук, А. В. Метельский, С. А. Минюк

Введение. Исследуемая система (назовем ее Σ) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in H^- = [-h, 0], \quad (2)$$

$$y(t) = g'x(t), \quad t \in T = [0, t_1]. \quad (3)$$

Здесь $x = \text{col}(x_1, x_2)$ – 2-вектор-столбец фазовых переменных решения [1, с. 36] уравнения (1); $0 < h$ – постоянное запаздывание; $A = (a_{ij})$, $A_1 = (a_{ij}^1)$, $A_2 = (a_{ij}^2)$ ($i, j = 1, 2$) – постоянные 2×2 -матрицы; b – постоянный 2-вектор-столбец; $u(t)$, $t \in T$, – суммируемое с квадратом управление; g' – постоянная 2-вектор-строка (штрих обозначает операцию транспонирования матрицы (столбца)); y – скалярная наблюдаемая величина (выход); $0 < t_1$ – фиксированный момент времени. Начальные функции φ считаем непрерывно дифференцируемыми: $\varphi \in C$, где $C = C(H^-, R^2)$ – банахово пространство непрерывных функций.

Следуя работам [1, 2], под состоянием x_t системы Σ в момент времени $t \geq 0$ будем понимать [2, с. 150] “отрезок решения” $x_t = x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in H^-$.

Рассмотрим задачу полной идентифицируемости системы Σ , а также двойственные задачи конструктивной идентифицируемости и полной управляемости.

Полную идентифицируемость будем понимать в смысле Р. Калмана [3, с. 65] как взаимно-однозначное соответствие между множествами выходов и текущих состояний системы Σ , а конструктивную идентифицируемость – как возможность вычисления проекций текущего состояния x_{t_1} системы Σ по выходу (3) посредством интегральной операции. Это соответствует подходу Н.Н. Красовского [4, с. 269]. Под управляемостью системы Σ понимаем [4, с. 359] возможность успокоения системы выбором подходящего управления. Для уравнения (1) запаздывающего типа ($A_2 = 0$) эта задача впервые исследована в работах [5, 6].

Цель настоящей работы – доказательство параметрических критериев разрешимости перечисленных выше задач для системы Σ нейтрального типа. Обратим внимание на принципиальные моменты, которые отличают эту работу, например, от работ [8–16] по системам с запаздыванием. В данной статье

1) показано, что спектральный критерий полной управляемости [16], справедливый для линейных автономных систем с запаздыванием и других линейных объектов, “не работает” для линейных автономных систем нейтрального типа: указанное условие не достаточно для полной управляемости таких объектов;

2) для линейных автономных систем нейтрального типа второго порядка дано конструктивное решение комплекса из трех важных задач: полной идентифицируемости, конструктивной идентифицируемости и полной управляемости на основе нового предложенного нами подхода.

1. Основные определения. В задачах идентификации считаем управление $u(t)$, $t \in T$, известным. В силу линейности системы Σ можно положить $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Пусть $Y = \{y \mid \varphi \in C\}$ – совокупность всех выходов системы Σ . Один и тот же выход y может порождаться, вообще говоря, несколькими начальными функциями (2). Поэтому выходу y может отвечать несколько текущих состояний x_{t_1} , совместимых [7, с. 153] с выходом y . Множество всех таких состояний обозначим через $\{x_{t_1}\}_y$.

На многообразии Y гильбертова пространства $L_2 = L_2(T, R)$ рассмотрим оператор $L_{t_1} : y \rightarrow \{x_{t_1}\}_y$, который назовем оператором восстановления класса текущих состояний $\{x_{t_1}\}_y$.

Определение 1. Систему Σ назовем полностью идентифицируемой, если для любого $y \in Y$ класс $\{x_{t_1}\}_y$ состоит из одного элемента.

Другими словами, полная идентифицируемость системы Σ подразумевает биекцию между множеством выходов и множеством ее текущих состояний.

Замечание 1. В силу линейности система Σ полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда

$$y = 0 \Rightarrow x_{t_1} = 0. \quad (4)$$

Определение 2. Систему Σ назовем конструктивно идентифицируемой в направлении $p(\tau)$, $\tau \in H^-$ ($p \in C$), если найдется такая суммируемая с квадратом скалярная функция (назовем ее разрешающей) $v(t)$, $t \in T$, что для любого текущего состояния x_{t_1} выполняется соотношение

$$\int_0^{t_1} v(t)y(t) dt = (p'(0) - p'(-h)A_2)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+h} p(t_1 - t)(A_1x(t - h) + A_2\dot{x}(t - h)) dt. \quad (5)$$

Систему Σ назовем конструктивно идентифицируемой, если разрешающая функция $v(t)$, $t \in T$, существует для любого направления p ($p \in C$).

Замечание 2. Легко видеть, что полная идентифицируемость необходима для конструктивной идентифицируемости системы Σ . Если допустить, что конструктивно идентифицируемая система Σ не является полностью идентифицируемой, то, согласно замечанию 1, найдется текущее состояние $x_{t_1}^0$, совместимое с нулевым выходом. Тогда левая часть равенства (5) есть нуль. В то же время можно указать направление $p = p^0 \in C$, для которого правая часть равенства (5) будет отлична от нуля, так как $x_{t_1}^0 \neq 0$.

Определение 3. Начальное состояние (2) назовем управляемым, если существует допустимое управление (назовем его успокаивающим) $u(t)$, $t \in T$, такое, что выполняются соотношения

$$x(t_1) = 0, \quad A_1x(t) + A_2\dot{x}(t) = 0, \quad t \in [t_1 - h, t_1].$$

Систему Σ назовем полностью управляемой, если успокаивающее управление найдется для любой начальной функции (2).

Замечание 3. Если система Σ полностью управляема, то, считая, что успокаивающее управление $u(t) \equiv 0$, $t > t_1$, получаем тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$.

2. Критерий полной идентифицируемости. Обозначим через $W(\lambda) = \lambda E - A - A_1\mu - A_2\lambda\mu$, $\mu = e^{-\lambda h}$, характеристическую матрицу уравнения (1). Здесь E – единичная матрица; λ – комплексная величина; $\lambda \in \mathbb{C}$, где \mathbb{C} – множество комплексных чисел. Докажем следующий спектральный критерий полной идентифицируемости системы Σ .

Теорема 1. Система Σ полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[g, W'(\lambda)]' = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Доказательство. Необходимость условия (6) доказывается так же, как при обосновании аналогичного критерия в [8] для линейной автономной системы запаздывающего типа ($A_2 = 0$).

Достаточность. Пусть выполнено условие (6). Согласно замечанию 1, достаточно установить справедливость (4). Выделим два случая.

1) $\text{rank}[g, A_2'g]' = 1$. С помощью невырожденного преобразования переменных $x = T\tilde{x}$, $\det T \neq 0$, перейдем к системе $\tilde{\Sigma}$, которая полностью идентифицируема ввиду замечания 1 тогда и только тогда, когда полностью идентифицируема система Σ . Для простоты сохраним прежние обозначения и будем говорить о системе Σ .

Замечание 4. Условие (6) для системы $\tilde{\Sigma}$ выполнено, очевидно, тогда и только тогда, когда оно выполнено для системы Σ .

Матрицу T выберем так, чтобы $g' = [1 \ 0]$. Поскольку

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g' \\ g'A_2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 \end{bmatrix} = 1,$$

отсюда следует, что $a_{12}^2 = 0$. Допустим, что $y(t) = x_1(t) = 0, t > 0$. Тогда из уравнения (1) получим

$$0 = a_{12}x_2 + a_{12}^1x_2(t-h), \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{22}^1x_2(t-h) + a_{22}^2\dot{x}_2(t-h), \quad t > h. \quad (7)$$

Согласно замечанию 1, система Σ полностью идентифицируема в том и только в том случае, когда полностью идентифицируема система Σ_1 с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

1.1) Если $a_{22}^2 = 0$, то система Σ_1 запаздывающего типа. Поэтому условие (6) достаточно [9] для полной идентифицируемости системы Σ .

1.2) Считаем, что $a_{22}^2 \neq 0$. Условие (6) вычитанием первой строки, умноженной на число, из первой и второй строк матрицы $W(\lambda)$ приводится к виду

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_{12} - a_{12}^1\mu \\ 0 & \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu - a_{22}^2\lambda\mu \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

В силу (8) система уравнений

$$a_{12} + a_{12}^1\mu = 0, \quad \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu - a_{22}^2\lambda\mu = 0 \quad (9)$$

относительно $\lambda \in \mathbb{C}$ несовместна.

1.2.1) Пусть $a_{12}^1 \neq 0$, тогда из системы уравнений (9) имеем

$$\mu = -a_{12}/a_{12}^1, \quad \lambda(a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2) = a_{12}^1a_{22} - a_{12}a_{22}^1. \quad (10)$$

Аналогично из системы дифференциально-разностных уравнений (7) получаем

$$x_2(t-h) = -\frac{a_{12}}{a_{12}^1}x_2(t), \quad (a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2)\dot{x}_2(t) = (a_{12}^1a_{22} - a_{12}a_{22}^1)x_2(t), \quad t > h. \quad (11)$$

1.2.1.1) Если $a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2 = 0$, то ввиду несовместности системы (10) $a_{12}^1a_{22} - a_{12}a_{22}^1 \neq 0$, и из (11) следует, что $x_2(t) \equiv 0, t > h$. Система Σ полностью идентифицируема.

1.2.1.2) Если $a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2 \neq 0$, то ввиду (11)

$$x_2(t) = x_2^0(t) = e^{\lambda_0 t}x_2^0, \quad t > h, \quad \lambda_0 = (a_{12}^1a_{22} - a_{12}a_{22}^1)/(a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2).$$

Подставляя $x_2^0(t)$ в первое уравнение (7), имеем $(a_{12} + a_{12}^1\mu_0)e^{\lambda_0 t}x_2^0 \equiv 0, \mu_0 = e^{-\lambda_0 h}$.

Допустим, что $x_2^0 \neq 0$, тогда $a_{12} + a_{12}^1\mu_0 = 0$, что противоречит несовместности системы (9). Значит, $x_2(t) \equiv 0, t > h$, и система Σ полностью идентифицируема.

1.2.2) Пусть $a_{12}^1 = 0$, тогда ввиду несовместности (9) $a_{12} \neq 0$. Из первого уравнения системы (7) получаем $x_2(t) \equiv 0, t > h$. Система Σ полностью идентифицируема.

2) Пусть $\text{rank}[g, A_2'g]' = 2$.

Согласно теореме Гамильтона-Кэли, $(A_2')^2 = \alpha A_2' + \beta E$. Выполним преобразование переменных $x = T\tilde{x}$, где $T = [g, A_2'g - \alpha g]$. Так как $T^{-1}T = E$, то $[T^{-1}g, T^{-1}(A_2'g - \alpha g)] = E$, следовательно,

$$T^{-1}g = [1, 0]', \quad T^{-1}(A_2'g - \alpha g) = [0, 1]'$$

Матрица A_2' в новом базисе такова:

$$T^{-1}A_2'T = T^{-1}[A_2'g, ((A_2')^2g - \alpha A_2'g)] = T^{-1}[A_2'g, \beta g] = [T^{-1}A_2'g, T^{-1}\beta g] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и ранее, сохраним обозначения и рассмотрим систему Σ с матрицей $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 1 \\ a_{21}^2 & 0 \end{bmatrix}$ и нулевым выходом $y(t) = x_1(t) = 0$, $t > 0$. Покажем, что $x_2(t) \equiv 0$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$. Из уравнения (1) получим

$$0 = a_{12}x_2 + a_{12}^1x_2(t-h) + \dot{x}_2(t-h), \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{22}^1x_2(t-h), \quad t > h. \quad (12)$$

Согласно замечанию 1, система Σ полностью идентифицируема в том и только в том случае, когда полностью идентифицируема система Σ_2 с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Условие (6) равносильно следующему:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_{12} - a_{12}^1\mu - \lambda\mu \\ 0 & \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

что означает несовместность системы уравнений

$$a_{12} + a_{12}^1\mu + \lambda\mu = 0, \quad \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu = 0. \quad (14)$$

2.1) Пусть $a_{22}^1 = 0$. Аналогично случаю 1.2.1.2) из несовместности системы (14) следует полная идентифицируемость системы Σ .

2.2) Пусть $a_{22}^1 \neq 0$, тогда из системы дифференциальных уравнений (12) получаем

$$x_2(t-h) = (a_{22}^1)^{-1}(\dot{x}_2(t) - a_{22}x_2(t)), \quad (15)$$

$$\ddot{x}_2(t) + (a_{12}^1 - a_{22})\dot{x}_2(t) + (a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1a_{22})x_2(t) = 0, \quad t > h.$$

Определяя $x_2(t) = \sum_{i=1}^2 Q_i(t)e^{\lambda_i t}$, $t > h$, где $Q_i(t)$ ($i = 1, 2$) – полиномы не выше первой степени, из второго уравнения системы (15) и подставляя в первое уравнение этой системы, получаем

$$\lambda_i^2 + (a_{12}^1 - a_{22})\lambda_i + a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1a_{22} = 0, \quad \lambda_i - a_{22} - a_{22}^1\mu_i = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (16)$$

если компонента $x_2(t) \neq 0$, $t > h$. Равенства (16) противоречат несовместности системы (14), значит, $x_2(t) \equiv 0$, $t > h$, и система Σ_2 вместе с системой Σ полностью идентифицируема. Теорема доказана.

3. Двойственность задач управляемости и конструктивной идентифицируемости. Наряду с системой наблюдения Σ рассмотрим систему управления в обратном времени (обозначим ее Σ^*)

$$\dot{z}(t) = -A'z(t) - A_1'z(t+h) + A_2'\dot{z}(t+h) - gu(t_1-t), \quad t < t_1, \quad (17)$$

$$z(t) = q(t_1-t), \quad t \in [t_1, t_1+h], \quad \dot{q} \in C. \quad (18)$$

Определение 4. Систему управления Σ^* назовем двойственной системе наблюдения Σ .

Теорема 2 [10]. Если система Σ конструктивно идентифицируема в направлении p ($\dot{p} \in C$), то начальное состояние (18) двойственной системы управления Σ^* , где $q(\tau) = p(\tau)$, $\tau \in H^-$, полностью управляемо функцией $u(t_1-t) = -v(t)$, $t \in T$. Если начальное состояние (18) системы Σ^* полностью управляемо функцией $u(t_1-t)$, $t \in T$, то система Σ конструктивно идентифицируема в направлении $p(\tau) = q(\tau)$, $\tau \in H^-$, причем разрешающая функция $v(t) = -u(t_1-t)$, $t \in T$.

Доказательство основано на формуле интегрирования по частям

$$\int_0^{t_1} d((z'(t) - z'(t+h)A_2)x(t)) = (z'(t) - z'(t+h)A_2)x(t)|_0^{t_1}, \quad (19)$$

где левая часть вычисляется в силу уравнений (1), (17).

Из (5), (19) с учетом равенств $z(t_1) = q(0) = p(0)$, $z(t_1+h) = q(-h) = p(-h)$ получаем

$$\int_0^{t_1} v(t)g'x(t) dt = z'(0)(\varphi(0) - A_2\varphi(-h)) + \int_{-h}^0 (z'(t+h)A_1 - z'(t+h)A_2)\varphi(t) dt - \int_0^{t_1} u(t_1-t)g'x(t) dt.$$

Полагая здесь $u(t_1-t) = -v(t)$, $t \in T$, для произвольной функции $\varphi \in C$ будем иметь

$$z'(0)(\varphi(0) - A_2\varphi(-h)) + \int_{-h}^0 (z'(t+h)A_1 - z'(t+h)A_2)\varphi(t) dt = 0. \quad (20)$$

Согласно рассуждениям, аналогичным доказательству леммы Лагранжа (основной леммы вариационного исчисления), из (20) заключаем, что

$$z'(0) = 0, \quad z'(t+h)A_1 - z'(t+h)A_2 = 0, \quad t \in H^-. \quad (21)$$

По определению 3 это означает полную управляемость двойственной системы Σ^* . Теорема доказана.

Переходя от системы Σ^* к системе в прямом времени заменой переменных $\tau = t_1 - t$, $w(\tau) = z(t_1 - \tau)$, $\tau \in [-h, t_1]$, получаем систему управления Σ'

$$\dot{w}(\tau) = A'w(\tau) + A'_1w(\tau - h) + A'_2\dot{w}(\tau - h) + gu(\tau), \quad \tau \in T, \quad w(\tau) = q(\tau), \quad \tau \in H^-. \quad (22)$$

Согласно теореме 2, успокаивающее управление для системы Σ' равно $u(\tau) = -v(t_1 - \tau)$, $\tau \in T$.

Замечание 5. Как видно из доказательства леммы Лагранжа, при переходе от (20) к (21) можно ограничиться достаточно гладкими функциями φ , удовлетворяющими граничным условиям

$$\varphi^{(j+1)}(0) = A\varphi^{(j)}(0) + A_1\varphi^{(j)}(-h) + A_2\varphi^{(j+1)}(-h), \quad j = \overline{0, \nu-1}, \quad \nu \geq 1.$$

Линейное многообразие таких функций обозначим $\tilde{C}^\nu = \tilde{C}^\nu(H^-, R^2)$.

4. Вычисление текущего состояния системы Σ с характеристическим квазиполиномом запаздывающего типа. Для полностью идентифицируемой системы Σ_2 с матрицами (13) построим интегральную операцию

$$x_{t_1} = x(t_1 + \tau) = \int_0^{t_1} V(\tau, t)y(t) dt, \quad \tau \in H^-, \quad (23)$$

восстанавливающую текущее состояние по выходу $y(t)$, $t \in T$. Здесь $V(\tau, t)$ – некоторая кусочно-непрерывная функция. Это необходимо для последующего решения задачи полной управляемости системы Σ на основе теоремы 2.

Очевидно, что наличия операции (23) достаточно для конструктивной идентифицируемости системы Σ . Разрешающая функция $v(t)$ для заданного направления $p \in C$ находится из формулы (5) после подстановки выражения (23).

Замечание 6. Если система запаздывающего типа ($A_2 = 0$) полностью идентифицируема (удовлетворяет спектральному критерию (6)), то операция (23) всегда существует [11]. Для систем нейтрального типа это не так, что будет показано ниже (см. п. 6) на примере 2.

Для достаточно гладких начальных функций (2) выход $y(t)$ удовлетворяет [12, с. 73] дифференциально-разностному уравнению

$$y^{(2)}(t) + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 r_{ij} y^{(2-i)}(t-jh) = 0, \quad t > 2h, \quad (24)$$

где r_{ij} – коэффициенты характеристического уравнения $W(\lambda) = 0$. В случае системы Σ_2 (см. (13)) $\det W(\lambda)$ – квазиполином запаздывающего типа, и уравнение (24) имеет вид

$$\ddot{y}(t) - a_{22}\dot{y}(t) - a_{22}^1\dot{y}(t-h) = 0, \quad t > h. \quad (25)$$

Анализ уравнений системы Σ_2

$$\dot{x}_1(t) = a_{12}x_2(t) + a_{12}^1x_2(t-h) + \dot{x}_2(t-h), \quad \dot{x}_2(t) = a_{22}x_2(t) + a_{22}^1x_2(t-h), \quad t > 0, \quad (26)$$

показывает, что при $t \neq kh$, $k = 0, 1, \dots$, гладкость решения повышается: если $t \in (kh, (k+1)h)$, то функция $x(t)$ $(k+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Имея в виду замечание 5, ограничимся начальными функциями (2) из класса C^1 . Тогда [13] при $t = kh$, $k = 0, 1, \dots$, производная $\dot{x}(t)$ непрерывна и

$$\dot{x}_t(0) = Ax_t(0) + A_1x_t(-h) + A_2\dot{x}_t(-h), \quad t > 0. \quad (27)$$

Из системы (26) имеем

$$x_2(t-h) = (a_{22}^1)^{-1}(\dot{x}_2(t) - a_{22}x_2(t)),$$

$$\ddot{x}_2(t) + (a_{12}^1 - a_{22})\dot{x}_2(t) + (a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1a_{22})x_2(t) = a_{22}^1\dot{x}_1(t), \quad t \geq h.$$

Поэтому компонента $x_2(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$, текущего состояния x_{t_1} , $t_1 \geq 2h$, находится [13] по выходу $y(t) = x_1(t)$, $t \in T$, как решение граничной задачи

$$\ddot{x}_2(t) + (a_{12}^1 - a_{22})\dot{x}_2(t) - (a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1a_{22})x_2(t) = a_{22}^1\dot{y}(t), \quad t \in [t_1 - h, t_1], \quad (28)$$

$$\dot{y}(t_1) = a_{12}x_2(t_1) + a_{12}^1x_2(t_1-h) + \dot{x}_2(t_1-h), \quad \dot{x}_2(t_1) = a_{22}x_2(t_1) + a_{22}^1x_2(t_1-h).$$

Отсюда найдем $x_2(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$, в виде линейной операции от $\dot{y}(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$. Чтобы прийти к выражению (23), получим интегральное представление выхода $y(t) = x_1(t)$, $t \geq h$.

Проинтегрировав дважды обе части уравнения (25) от h до $t > h$, получим

$$y(t) - y(h) - (t-h)(\dot{y}(h) - a_{22}y(h) - a_{22}^1y(0)) - a_{22} \int_h^t y(\tau) d\tau - a_{22}^1 \int_h^t y(\tau-h) d\tau = 0.$$

Пусть $\delta_0(t) = 1$, $\delta_1(t) = t-h$, $t \in [h, 2h]$, δ_{ij} – символ Кронекера. Выберем функции $\alpha_i(t)$, $i = 0, 1$, $t \in [h, 2h]$, из условий $\int_h^{2h} \delta_i(t)\alpha_j(t) dt = \delta_{ij}$. Обозначим $b_0 = y(h)$, $b_1 = \dot{y}(h) - a_{22}y(h) - a_{22}^1y(0)$, тогда [11]

$$b_i = -a_{22}^1 \int_0^h \int_{\tau+h}^{2h} \alpha_i(s) ds y(\tau) d\tau + \int_h^{2h} \left(\alpha_i(\tau) - a_{22} \int_{\tau}^{2h} \alpha_i(s) ds \right) y(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1,$$

и интегральное представление выхода (3) имеет вид

$$y(t) = b_0 + (t - h)b_1 + a_{22}^1 \int_0^{t-h} y(\tau) d\tau + a_{22} \int_h^t y(\tau) d\tau, \quad t \geq h. \quad (29)$$

Таким образом, граничная задача (28) в совокупности с $x_1(t) = y(t)$, $t \geq h$, и представлением (29) приводит к восстанавливающей операции вида (23).

Подставляя выражение (23) для $x(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$, в правую часть соотношения (5), получаем, что система Σ_2 конструктивно идентифицируема.

5. Исследование полной управляемости системы Σ . Без потери общности можно считать, что в уравнении (1) $b = \text{col}(1, 0)$. Этого можно достичь подходящей заменой переменных $x = T\tilde{x}$, $\det T \neq 0$. Кроме того, можно за новое управление $\tilde{u}(t)$, $t \in T$, принять

$$\tilde{u}(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{11}^1x_1(t-h) + a_{12}^1x_2(t-h) + a_{11}^2\dot{x}_1(t-h) + a_{12}^2\dot{x}_2(t-h) + u(t), \quad t \in T.$$

Тогда система Σ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t), \quad \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{21}^1x_1(t-h) + a_{22}^1x_2(t-h) + \\ &+ a_{21}^2\dot{x}_1(t-h) + a_{22}^2\dot{x}_2(t-h), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь, как и ранее, сохранены исходные обозначения. Прежде всего отметим, что спектральное условие

$$\text{rank}[W(\lambda), b] = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (31)$$

необходимо для полной управляемости системы Σ . Это вытекает из теоремы 2, замечания 2 и теоремы 1. Для системы Σ запаздывающего типа ($A_2 = 0$) условие (31) и достаточно [14–16] для полной управляемости. Критерий полной управляемости системы Σ нейтрального типа второго порядка ($n = 2$) выражает следующая

Теорема 3. *Для того чтобы система Σ была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы одновременно 1) выполнялось спектральное условие (31) и 2) $\text{rank}[b, A_2b] = \text{rank}[b, A_2b]$.*

Доказательство. Как и при исследовании полной идентифицируемости в п. 2, выделим два основных случая.

1) $\text{rank}[b, A_2b] = 1$. Если $\text{rank}[b, A_2b] = 1$, то $a_{21}^2 = 0$.

1.1) Пусть $a_{22}^2 = 0$, тогда система (30) запаздывающего типа. Поэтому спектральное условие (31) необходимо и достаточно для ее полной управляемости. Условие 2) теоремы 3 здесь также выполнено.

1.2) В случае $a_{22}^2 \neq 0$ условие 2) теоремы 3 нарушается. Покажем, что система Σ не может быть полностью управляема. Если допустить, что система (30) полностью управляема, то для любой начальной функции $\varphi(t)$, $\tau \in H^-$, выбором управления $u(t)$, $t \in T$ ($u(t) \equiv 0$, $t > t_1$), обеспечим $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Следовательно, $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Выражая производную $\dot{x}_2(t-h)$, $t > 0$, из второго уравнения системы (30), получаем, что она является непрерывной функцией. Поэтому $\dot{x}_2(-0) = \dot{x}_2(+0)$:

$$\dot{\varphi}_2(0) = a_{21}\varphi_1(0) + a_{22}\varphi_2(0) + a_{21}^1\varphi_1(-h) + a_{22}^1\varphi_2(-h) + a_{22}^2\dot{\varphi}_2(-h). \quad (32)$$

Значит, тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, возможно лишь для функций $\varphi(t)$, $t \in H^-$, удовлетворяющих (32). Система (30) в этом случае не является полностью управляемой.

2) В случае $\text{rank}[b, A_2b] = 2$ условие 2) теоремы 3 в наличии. Аналогично п. 2 (случай $\text{rank}[g, A_2'g] = 2$) невырожденным преобразованием переменных приведем систему Σ к виду

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{21}^1(t-h) + a_{22}^1x_2(t-h) + \dot{x}_1(t-h), \quad t > 0. \quad (33)$$

Система (33) и двойственная ей система наблюдения Σ_2 (с матрицами вида (13)) имеют характеристический квазиполином запаздывающего типа. Поскольку выполнено условие (31),

то двойственная система наблюдения Σ_2 конструктивно идентифицируема, что установлено в п. 4. Согласно теореме 2, система (33) управляема.

Замечание 7. Согласно теореме 2, из теоремы 3 следует критерий конструктивной идентифицируемости системы Σ , а именно: необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись спектральное равенство (6) и $\text{rank}[g, A'_2 g]' = \text{rank}[g, A'_2]'$.

6. Примеры. Покажем, что запаздывающий тип характеристического квазиполинома не является существенным для конструктивной идентифицируемости системы Σ , а в силу теоремы 2 и для ее полной управляемости.

Пример 1. Возьмем систему Σ ($h = 1$) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Запишем характеристическую матрицу $W(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda\mu & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Очевидно, что $\det W(\lambda) = \lambda^2 - \lambda^2\mu$ — квазиполином незапаздывающего типа. Вместе с тем, согласно замечанию 7, система (34) конструктивно идентифицируема. Проверим это непосредственно.

Имеем систему

$$x_2(t) \equiv x_2^0, \quad t \geq 0, \quad \dot{y}(t) = x_2^0 + \dot{y}(t-1) = 0, \quad t \in [1, 2].$$

Проинтегрируем последнее уравнение от t до 2:

$$(2-t)x_2^0 = -y(t) + y(t-1) + (y(2) - y(1)). \quad (35)$$

Возьмем $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t \in [1, 2]$, такими, что

$$\int_1^2 \alpha(t) dt = 0, \quad \int_1^2 \alpha(t)(2-t) dt = 1, \quad \int_1^2 \beta(t) dt = 1, \quad \int_1^2 \beta(t)(2-t) dt = 0.$$

Умножая (35) последовательно на $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и интегрируя, находим, что

$$x_2^0 = \int_1^2 (y(t-1) - y(t))\alpha(t) dt, \quad x_1(2) - x_1(1) = y(2) - y(1) = \int_1^2 (y(t) - y(t-1))\beta(t) dt.$$

Вычислим правую часть соотношения (5) при $t_1 = 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t)y(t) dt &= p_1(0)(x_1(2) - x_1(1)) + p_2(0)x_2(2) + \int_1^2 \dot{p}_1(1-t)x_1(t) dt = \\ &= p_1(0) \int_1^2 (y(t) - y(t-1))\beta(t) dt - p_2(0) \int_1^2 (y(t) - y(t-1))\alpha(t) dt + \int_1^2 \dot{p}_1(1-t)y(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, в равенстве (5)

$$v(t) = \begin{cases} p_2(0)\alpha(t+1) - p_1(0)\beta(t+1), & t \in [0, 1), \\ \dot{p}_1(1-t) + p_1(0)\beta(t) - p_2(0)\alpha(t), & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Согласно теореме 1, успокаивающее управление для системы управления

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_1(t-1) + u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad t > 0, \quad x(t) = \text{col}(p_1(t), p_2(t)), \quad t \in [-1, 0], \quad (36)$$

двойственной системе (34), будет иметь вид

$$u(t) = -v(2-t) = \begin{cases} -p_2(0)\alpha(3-t) + p_1(0)\beta(3-t), & t \in [1, 2], \\ -\dot{p}_1(t-1) - p_1(0)\beta(2-t) + p_2(0)\alpha(2-t), & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

В этом можно убедиться, подставив $u(t)$, $t \in [0, 2]$, в систему (36).

Теперь покажем, что равенство 2) теоремы 3 не зависит от спектрального условия (31).

Пример 2. Рассмотрим систему Σ ($h = 1$) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Здесь

$$\text{rank}[W(\lambda), b] = \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 & 1 \\ -\mu & \lambda + \lambda\mu & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (38)$$

т.е. выполнено спектральное условие (31). В то же время легко проверить, что условие 2) теоремы 3 не имеет места.

Согласно теореме 3, система (37) не управляема. В силу теоремы 2 двойственная к (37) система наблюдения (назовем ее (37')) не является конструктивно идентифицируемой. Ввиду (38) и теоремы 1 она полностью идентифицируема. Но восстанавливающая операция (23) для системы наблюдения (37') невозможна из-за отсутствия конструктивной идентифицируемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории. М., 1971.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
5. Красовский Н.Н. // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 938–939.
6. Куржанский А.Б. // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1121–1124.
7. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
8. Метельский А.В., Минюк С.А. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 624–633.
9. Шкляр Б.Ш. // Problems of Control and Information Theory. 1980. V. 9. № 6. P. 417–428.
10. Минюк С.А., Метельский А.В. // Тез. докл. междунар. конф. AMADE, 4–9 сент. 2003 г. Минск, 2003. С. 125–126.
11. Минюк С.А., Метельский А.В. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1052–1057.
12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
13. Метельский А.В. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1353–1360.
14. Габелая А.Г. // Сообщ. АН ГССР. 1976. Т. 83. № 1. С. 53–55.
15. Минюк С.А., Метельский А.В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1977. № 4. С. 30–36.
16. Марченко В.М. // Problems of Control and Information Theory. 1979. V. 8. № 5–6. P. 421–432.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск,
Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

Поступила в редакцию
16.12.2003 г.