



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Антюфеев, Решение интегральных уравнений II рода со стохастическим ядром методом Монте-Карло,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 617–620

<https://www.mathnet.ru/zvmmf4025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

25 апреля 2025 г., 09:06:37



знать решение задачи априорно. Аналогичные затруднения возникают и при использовании метода [4]. В этом случае, чтобы не выйти при интегрировании за пределы области определения правой части, необходимо точное задание компонент вектора p , которые в действительности могут быть определены лишь в результате решения.

На фигуре показано решение системы (5), полученное при $c_1=0.1$, $c_2=0.9$, $p_1^0=0.0$, $p_2^0=2.0$, $n=20$, $h_{1j}=h_{2j}=0.02$, $j=1, 2, \dots, n$, $l=0$; заштрихована область отрицательных значений подкоренного выражения этой системы. При указанных значениях параметров решение получалось на промежутке изменения координаты точки сращения $c_3 \in [0.44, 0.56]$. При расчетах матрица Якоби вычислялась методом конечных разностей с шагом $H=0.002$, а для решения каждой подзадачи (3) использовался непрерывный аналог метода Ньютона с оптимальным шагом [6]. Вспомогательные функции $g(t)$ полагались линейными. Расчеты производились на ЭВМ БЭСМ-6.

Автор выражает глубокую благодарность Э. А. Тропцу за полезные обсуждения.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
2. Roberts S. M., Shipman J. S. Continuation in shooting methods for two-point boundary value problems. — J. Math. Analysis and Applic., 1967, v. 18, p. 45–58.
3. Суханов А. А. О численном решении краевых задач оптимизации методом движущейся мишени. — В кн.: Алгоритмы и матем. обеспечение для физ. задач. Вып. 6. Л.: Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе, 1983, с. 143–157.
4. Винокуров В. А., Репников Н. Ф. Итерационный метод решения нелинейных краевых задач. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 4, с. 897–906.
5. Суханов А. А. Метод решения нелинейных двухточечных краевых задач. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 1, с. 228–231.
6. Ермаков В. В., Калигкин Н. Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 2, с. 491–497.

Поступила в редакцию 1.XI.1983
Переработанный вариант 1.VII.1985

УДК 519.642

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II РОДА СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЯДРОМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

АНТЮФЕЕВ В. С.

(Новосибирск)

Для интегрального оператора со стохастическим ядром рассматривается разложение функционального пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. На основе этого разложения построена оценка метода Монте-Карло для решения уравнения II рода с таким оператором. Рассмотрен вопрос о точности расчета.

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad f = -Kf + \varphi,$$

где $K: H \rightarrow H$ — компактный интегральный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Предположим, что выполнены условия однозначной разрешимости уравнения (1). Пусть r_0, r_1, \dots — расположенные по убыванию модуля точки дискретного спектра оператора K . Если спектральный радиус $\rho(K) = |r_0| < 1$, то вычисление линейных функционалов от решения f методом Монте-Карло основано на представлении f рядом Неймана. При $|r_0| \neq 1$ этот ряд расходится и непосредственно строить статистическую оценку для функционала нельзя. В настоящей работе предлагается алгоритм, позволяющий преодолеть это затруднение в тех случаях, когда известны функции k_i , $i=1, 2, \dots, n$, образующие базис конечномерного собственного подпространства, соответствующего собственному значению r_0 . Не ограничивая общности, будем считать, что $r_0=1$.

§ 1. Расщепление уравнения

Пусть $r_0=1$. Пространство H разлагается в прямую (вообще говоря, неортогональную) сумму:

$$H=N\oplus L, \quad N=\{k_1, \dots, k_n\}, \quad L=(N^\circ)^\perp, \quad N^\circ=\{k_1^\circ, \dots, k_n^\circ\}_0$$

$k_i^\circ, i=1, 2, \dots, n$, — базис собственного подпространства N° оператора K^* , соответствующего r_0 . Отсюда каждый вектор $z \in H$ однозначно представим в виде суммы

$$(2) \quad z = z_N + z_L, \quad z_N \in N, \quad z_L \in L,$$

где N, L — инвариантные подпространства оператора K .

Обозначим через K_N, K_L сужение оператора K на N, L . В соответствии с разложением (2) уравнение (1) распадается в систему независимых уравнений:

$$f_N = K_N f_N + \varphi_N, \quad f_L = K_L f_L + \varphi_L.$$

Первое из них сводится к решению системы линейных уравнений n -го порядка. Оператор K_L компактный (на подпространстве L). Пусть r_1 — максимальное по модулю число его дискретного спектра. Спектральный радиус оператора K_L имеет вид $\rho(K_L) = |r_1| < 1 = r_0$.

Если $\varphi_L = \varphi - \varphi_N$ известно, то, поскольку $K_L \varphi_L = K \varphi_L$, можно искать линейные функционалы методом Монте-Карло (ниже используется оценка по столкновениям [1]).

Изложенный прием удобно применять к операторам со стохастическим ядром $\mathcal{K}(x, y)$ ($\mathcal{K} \geq 0, \int dy \mathcal{K}(x, y) = 1$), если $r_0 = 1$ — простое собственное значение и остальные собственные значения по модулю меньше единицы. В качестве соответствующей собственной функции можно взять $k(x) \equiv 1$. Отсюда $\varphi_N = (\varphi, k^*) \cdot 1$, где элемент k^* нормирован условием $(k^*, k) \equiv \int k^*(x) dx = 1$, т. е. $\varphi_N = \text{const}$. Если оператор K самосопряжен, то $k^* = \text{const}$, откуда $\varphi_N = k^* \int \varphi$. Однако в общем случае функция $k^*(x)$ неизвестна. Вычисление величины φ_N описано ниже.

§ 2. Алгоритм расчета

Надо найти величину (f, p) , где f — решение уравнения

$$f = -Kf + \varphi;$$

здесь K — интегральный оператор со стохастическим ядром. Переходя к сопряженной задаче, ищем $(g, \varphi) = (f, p)$, где g — решение уравнения

$$g = -K^*g + p.$$

Эту величину представим в виде суммы:

$$(g, \varphi) = (g, \varphi_N) + (g, \varphi_L).$$

Рассмотрим алгоритм вычисления второго слагаемого.

1. Пусть $f = f_N + f_L$, тогда f_L удовлетворяет уравнению $f_L = -Kf_L + \varphi_L$, причем

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K^n \varphi_L = f_L,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (K^n \varphi_L, p) = (f_L, p).$$

Члены ряда

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ((K^*)^n p, \varphi_L),$$

очевидно, совпадают с соответствующими членами сходящегося ряда (3), следовательно, ряд (4) сходится к $(g, \varphi_L) = (f_L, p)$. Эту величину удобно вычислять методом Монте-Карло, моделируя цепь Маркова x_0, x_1, x_2, \dots , где точка x_0 распределена

согласно вероятностной плотности $q(x_0)$, а плотность вероятности перехода $x_{n-1} \rightarrow x_n$ равна $K(x_{n-1}, x_n)$; вклад в оценку от траектории $\{x_n: n=0, 1, \dots\}$ равен

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} \sum \varphi_L(x_n).$$

Так как здесь нельзя естественным образом ввести поглощение, будем обрывать траектории на m -члене (m одинаково для всех траекторий). Заметим, что бесконечный ряд, представляющий собой оценку от траектории, расходится с вероятностью 1. Сходится лишь ряд из соответствующих математических ожиданий.

2. Значение φ_N можно найти как предел: $K^n \varphi = \varphi_N + K^n \varphi_L \rightarrow \varphi_N$. Следовательно,

$$M_T \varphi(x_n) \rightarrow \varphi_N \int q = \varphi_N \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

здесь M_T — математическое ожидание по траекториям $T = \{x_n; n=0, 1, \dots\}$. Величину φ_N можно найти предварительным расчетом, моделируя траектории $\{x_n\}$ длины m . Однако удобнее поступить так.

Рассмотрим вклад ξ в оценку для (g, φ_L) от траектории:

$$\begin{aligned} \xi_m &= \frac{p(x_0)}{q(x_0)} [\varphi_L(x_0) - \varphi_L(x_1) + \dots + (-1)^m \varphi_L(x_m)] = \\ &= \frac{p(x_0)}{q(x_0)} \{[\varphi(x_0) - \varphi_N] - [\varphi(x_1) - \varphi_N] + \dots + (-1)^m [\varphi(x_m) - \varphi_N]\} = \\ &= \left[\frac{p(x_0)}{q(x_0)} [\varphi(x_0) - \varphi(x_1)] + \dots + (-1)^m \varphi(x_m) \right] - \\ &- \left[\frac{p(x_0)}{q(x_0)} \frac{1 + (-1)^m}{2} \varphi_N \right] = \xi_m - \varphi_N \eta_m. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M_T p(x_0) [q(x_0)]^{-1} = \int p$ и $\varphi_N \approx M_T \varphi(x_m)$, получаем

$$M_T \xi_m = M_T [\xi_m - \varphi_N \eta_m] \approx M_T \left[\xi_m - \varphi(x_m) \frac{1 + (-1)^m}{2} \int p \right].$$

Итак, величину φ_N можно оценивать по тем же траекториям, что и $M_T \xi$. При этом точность, обусловленная выбором m , будет для обеих величин примерно одинаковой (порядка d^{m+1}). Оценка по траектории имеет вид

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} \sum_{n=0}^m (-1)^n \varphi(x_n) - \left[\frac{1 + (-1)^m}{2} \int p \right] \varphi(x_m).$$

3. Рассмотрим оценку

$$(g, \varphi_N) = \varphi_N \int g = \frac{\varphi_N}{2} \int p.$$

Она имеет вид $0.5 \varphi(x_m) \int p$. Окончательно для $(g, \varphi) = (g, \varphi_N) + (g, \varphi_L)$ по усеченной траектории x_0, \dots, x_m оценка равна

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi(x_n) - \varphi(x_m) \frac{(-1)^n}{2} \int p.$$

Величину $\int p$ можно найти предварительным расчетом.

§ 3. Замечания о точности расчета

Погрешность вычисления величины (g, φ) складывается из погрешностей (g, φ_N) и (g, φ_L) . Оценим их. Неравенство $\rho(K_L) < 1$ означает, что найдется n такое,

что $d = \|K^n\|^{1/n} < 1$. Следовательно, для произвольного целого $m > 0$ имеем

$$\|K_L^m\| = \|K^{n[m/n]+r}\| \leq C_1 d^m, \quad \left\| \sum_{l=m+1}^{\infty} K_L^l \right\| \leq C_1 \sum_{l=m+1}^{\infty} d^l = C_2 d^m.$$

Отсюда следует, что при вычислении (g, φ) обрыв траектории на m -м члене приводит к систематической ошибке порядка Cd^m .

Предположим далее, что функция φ ограничена и $p/q = \text{const}$. При фиксированном числе N траекторий дисперсия статистической оценки отрезка ряда (4) растет не быстрее, чем Cm , так как дисперсии случайных величин $\varphi(x_n)$ равномерно ограничены некоторой константой C :

$$D[\varphi(x_0) - \varphi(x_1) + \dots \pm \varphi(x_m)] \leq D[\varphi(x_0)] + \dots + D[\varphi(x_m)] \leq C(m+1).$$

С другой стороны, при фиксированном m дисперсия оценки отрезка ряда (4) убывает с ростом N , как const/N .

Для достижения заданной точности расчета необходимо сначала выбрать достаточно большое m (длину траектории), затем количество N траекторий.

Описанный метод применялся для решения внутренней задачи Дирихле $\Delta u = 0$, $u|_{\Gamma} = \varphi$, где Γ — граница полушария

$$D = \{|x| \leq 1, x_3 \geq 0\}, \quad \varphi(x) = [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2]^{-1}.$$

Решение ищется в точке $x_0 = (0, 0, 0.5) \in D$ (точное значение $u(x_0) = 2/3$). Задача сводится к вычислению скалярного произведения (μ, \mathcal{K}_{x_0}) , где μ — решение интегрального уравнения разрыва потенциала двойного слоя $\mu = -K\mu + \varphi$, K — оператор со стохастическим ядром $\mathcal{K}(x, y)$; $x, y \in \Gamma$; $\mathcal{K}_{x_0}(y) = \mathcal{K}(x_0, y)$, $y \in \Gamma$, — вероятностная плотность на Γ .

Значения дисперсии D оценки для различных m при количестве траекторий $N = 15\,000$ таковы:

m	3	4	5	6	7	8	9	10
$D \times 10^6$	21	26	31	36	41	45	51	55

Видно, что с ростом m дисперсия растет линейно.

Литература

1. Марчук Г. И. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 1.VIII.1984
Переработанный вариант 18.VII.1985

УДК 519.6:517.589

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СТОЛКНОВЕНИЙ ДЛЯ ЛЕННАРД-ДЖОНСОВСКОГО ГАЗА

АХМАТСКАЯ Е. В., ПОЖАР Л. А.

(Харьков)

Рассмотрены основные вопросы, возникающие при вычислении приведенных транспортных интегралов столкновений кинетической теории газов в тех случаях, когда взаимодействие между молекулами описывается потенциалом (6-12) Леннарда — Джонса. Предложен метод вычисления этих интегралов с заданной точностью.

§ 1. Введение

Коэффициенты переноса газов в классической кинетической теории могут быть получены посредством решения уравнения Больцмана методом Чепмена — Энскога. При этом они выражаются через приведенные транспортные интегралы столкновений $\Omega^{(k, s)}(T)$ (см. [1]). В случае, когда взаимодействие молекул газа описывается