O. I. Mokhov, Commuting ordinary differential operators of rank 3 corresponding to an elliptic curve, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 169–170

КОММУТИРУЮЩИЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАНГА 3, ОТВЕЧАЮЩИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

О. И. Мохов

Рассматривается пара (M, L) коммутирующих операторов порядков 9 и 6, связанных соотношением $M^2 = 4L^3 - g_2L - g_3$, $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$; Γ — эллиптическая кривая $\mu^2 = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3$; $\Psi_i(x, P; x_0)$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, $P \in \Gamma$, — общие собственные функции операторов M и L такие, что $\widetilde{\Psi}(x_0, P; x_0) = E$, где $\widetilde{\Psi}$ — матрица Вронского. Согласно [1], функции $\Psi_i(x, P; x_0)$ определяются кривой Γ с отмеченной точкой $P_0 = \infty$, «параметрами Тюрина» $(\gamma_i, \alpha_i, \beta_i)$ и скалярными функциями $(u_0(x), u_1(x))$. В [2] был предложен метод «деформации параметров Тюрина» и вычислены коэффициенты операторов в случае ранга 2 (т. е. порядков 4 и 6). Там же была указана возможность решить задачу до конца для ранга 3. Мы реализуем здесь эту возможность (сообщенную автору С. П. Новиковым) и решаем задачу о выделении и полной классификации коммутирующих пар с рациональными коэффициентами рода $g = 1$ ранга $l = 3$. Для $l = 2$ эта задача была решена в [3], где ответ гораздо проще.

Используя [4], доказываются леммы 1 и 2.

Лемма 1. *Оператор шестого порядка, входящий в коммутирующую пару, имеет вид* (1), (2):

$$L = L_6 = \left(\frac{d^3}{dx^3} - u_1\frac{d}{dx} - u_0\right)^2 - 2\varphi_2\frac{d^2}{dx^2} - (2\varphi_1 + 3\varphi_2')\frac{d}{dx} - (2\varphi_0 + 3\varphi_1' + 3\varphi_2''), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = -\alpha_1c_1\wp(\gamma_1) - \alpha_2c_2\wp(\gamma_2) - \alpha_3c_3\wp(\gamma_3), \\ \varphi_1 = -\beta_1c_1\wp(\gamma_1) - \beta_2c_2\wp(\gamma_2) - \beta_3c_3\wp(\gamma_3), \\ \varphi_2 = -c_1\wp(\gamma_1) - c_2\wp(\gamma_2) - c_3\wp(\gamma_3). \end{cases} \tag{2}$$

Лемма 2. *Для $g = 1$, $l = 3$ система уравнений Новикова — Кричевера «деформации параметров Тюрина» имеет вид* (3). *Здесь $\Phi_{ij} = \Phi(\gamma_i, \gamma_j) = \zeta(\gamma_j - \gamma_i) + \zeta(\gamma_i) - \zeta(\gamma_j)$, где $\zeta(P)$ — функция Вейерштрасса* [5]. *Параметры α_i, β_i удовлетворяют дополнительным соотношениям* (4):

$$\begin{cases} \gamma_i' = -c_i, \qquad i = i \pmod 3, \\ \alpha_i' = \alpha_i\beta_i + (\alpha_i - \alpha_{i+1})\gamma_{i+1}'\Phi_{ii+1} + (\alpha_{i-1} - \alpha_i)\gamma_{i-1}'\Phi_{i-1i} - u_0, \\ \beta_i' = \beta_i^2 - \alpha_i + (\beta_i - \beta_{i+1})\gamma_{i+1}'\Phi_{ii+1} + (\beta_{i-1} - \beta_i)\gamma_{i-1}'\Phi_{i-1i} - u_1; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 + \alpha_3c_3 = -1, \\ \beta_1c_1 + \beta_2c_2 + \beta_3c_3 = 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Имеет место следующая

Лемма 3. *Все величины, входящие в* (3), (4), *могут быть выражены двузначно через* $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$. *Величина* $\Delta(x) = \det\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta^2\gamma_1'\gamma_2'\gamma_3' + 2\Delta\gamma_1'\gamma_2'\gamma_3'[\Phi_{21} + \Phi_{13} + \Phi_{32}] + \Delta(\gamma_1''\gamma_2' - \gamma_2''\gamma_1') + 1 = 0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для α_i, β_i верны формулы* (6), (7), (8), *которые вместе с формулами* (1), (2), (5) *дают явный вид оператора $L = L_6$ ранга 3 рода* 1:

$$\beta_i = \frac{1}{3}\left[\frac{\Delta'}{\Delta} + \Delta(\gamma_{i-1}' - \gamma_{i+1}') + (\gamma_1' - \gamma_2')\Phi_{12} + (\gamma_2' - \gamma_3')\Phi_{23} + (\gamma_3' - \gamma_1)\Phi_{31}\right] \tag{6}$$

$$\alpha_i - \alpha_{i+1} = -\Delta\gamma_{i-1}'' - \beta_{i-1}\gamma_{i-1}'\Delta - 2\Delta\gamma_i'\gamma_{i-1}'\Phi_{i-1i} + 2\Delta\gamma_{i+1}'\gamma_{i-1}'\Phi_{i+1i-1}, \tag{7}$$

$$(8)\qquad \alpha_i \Delta\gamma_i' = (\alpha_{i+1} - \alpha_{i+2})' + \beta_{i+1}(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \beta_{i-1}(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \\ + (\alpha_{i+1} - \alpha_{i+2})(\gamma_{i+1}' - \gamma_{i+2}')\Phi_{i+1\,i+2} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})\gamma_i'\Phi_{i\,i+1} + (\alpha_{i-1} - \alpha_i)\gamma_i'\Phi_{i-1\,i}.$$

Теорема 2. *Пусть* $B(x)$, $C(x)$ — *рациональные функции такие, что* $C(x) \neq -aB(x) \pm \sqrt{4a^3 - g_2a - g_3}$, $a = \mathrm{const}$; $\lambda_i(x)$ — *корни уравнения* (9). *Функции* $\gamma_i(x)$ *тогда и только тогда отвечают коммутирующей паре* L_6 *вида* (1) *и* L_9 *с рациональными коэффициентами, когда верна формула* (10) *и корни многочлена* (11) *являются рациональными функциями*:

$$(9)\qquad [B(x)\lambda + C(x)]^2 = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3,$$

$$(10)\qquad \gamma_i(x) = \gamma_0 - \int\limits_{\infty}^{\lambda_i(x)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

$$(11)\qquad R^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2\gamma_1'\gamma_2'\gamma_3' + 1 + \\ + R(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)[2\gamma_1'\gamma_2'\gamma_3'(\Phi_{21} + \Phi_{13} + \Phi_{32}) + (\gamma_1''\gamma_2' - \gamma_2''\gamma_1')].$$

Пример. Рассмотрим Г: $\{\mu^2 = \lambda^3 - \alpha\}$ и $B(x) = 0$. Тогда $\mu_i(x) = c(x)$, $\lambda^3 = c^2(x) + \alpha$. Условие (11) имеет вид $c'(x) = -u^2(x)$, где $u(x)$ — рациональная функция. Тогда для коэффициентов оператора (1) имеем

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = u'(x), \quad \varphi_1(x) = -u(x), \quad \varphi_2(x) = 0, \\ u_0(x) = \dfrac{(u'(x))^3}{u^3(x)} - 2\dfrac{u'(x)\,u''(x)}{u^2(x)} + \dfrac{u'''(x)}{u(x)} - \dfrac{c^2(x) + \alpha}{u^3(x)}, \\ u_1(x) = \dfrac{2u(x)\,u''(x) - (u'(x))^2}{u^2(x)}. \end{cases}$$

Примеру Диксмье [6] соответствует $u(x) = -1$, $c(x) = -x$.

Примечание. В работе [7] в случае эллиптической кривой $\mu^2 = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3$ получены частные решения, зависящие от одной произвольной функции и трех констант. Эти решения являются небольшим обобщением приведенного примера.

Автор благодарен С. П. Новикову за постановку задачи и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Кричевер. Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов.— Функц. анализ, 1978, 12:3, с. 20—31.
[2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2.— ДАН, 1979, 247:1, с. 33—36.
[3] П. Г. Гриневич. Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов.— Функц. анализ, 1982, 16:1, с. 19—24.
[4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, 35:6, с. 47—68.
[5] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.— М.: Наука, 1967.
[6] Ж. Диксмье, Об алгебрах Вейля.— Математика, 1969, 13:4, с. 16—44.
[7] P. Dehornoy. Operateurs differentiels et courbes elliptiques.— Compositio mathematica, 1981, 43:1, p. 71—99.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 13 января 1982 г.