V. A. Plaksin, On a question of Hua Loo-Keng,
Mat. Zametki, 1990, Volume 47, Issue 3, 78–90

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ХУА ЛО КЕНА

В. А. Плаксин

§ 1. **Введение.** Монтгомери и Вон [1] установили степенную оценку для количества четных чисел $N \leqslant X$, непредставимых суммой двух простых чисел. Цель настоящей работы — доказательство подобной оценки (вместо оценки $O(X \ln^{-\gamma} X)$ с $\gamma < k/(k+2)$ Хуа Л. К. [2]) в случае уравнений $N = p_1 + p_2^k$, $N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^k$ и др., где k — фиксированное целое число и p_j — простые числа.

ТЕОРЕМА 1. *При* $k \geqslant 2$ *чисел* $N \leqslant X$ *с условием* $(N-1, \prod_{\varphi(p)|k} p) = 1$, *непредставимых в виде* $N = p_1 + p_2^k$, *меньше* $\ll X^\gamma$; *где* $\gamma < 1$ *всегда и* $\gamma < 1 - 1/137k^3 \ln k$ *при* k *достаточно большом.*

Пусть $\Phi(x, y) = a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$ — примитивная форма (т. е. $(a_0, b_0, c_0) = 1$) с дискриминантом Δ_0, $\rho(q, N)$ означает число решений сравнения

$$\Phi(u, v) + w^k \equiv N \pmod q, \quad (uvw, q) = 1; \tag{1}$$

$k_0 = k$ при $2 \nmid k$ и $k_0 = 2k$ при $2 \mid k$, $p^{\nu_0} \| (\Delta_0, k_0)$ и $K = \prod p^{\nu_0+1}$, где $p \mid 30\Delta_0$ или $p \mid (N-1)$ и $\varphi(p) \mid k$.

ТЕОРЕМА 2. *При* $k \geqslant 2$ *и* $\Delta_0 \neq 0$ *чисел* $N \leqslant X$ *с условием* $\bar\rho(K, N) > 0$, *непредставимых в виде* $N = \Phi(p_1, p_2) + p_3^k$, *меньше* $\ll X^\gamma$; *где* γ *— постоянная из теоремы* 1.

Все постоянные в теоремах эффективно вычислимы. Как и в работе [1] (случай $k = 1$), мы ищем количество решений уравнения в среднем по N. Основу рассуждений составляют метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова [3] и эффект Линника — Дейринга—Хейлбронна [4]. Трудность изучения случая $k > 1$ связана с плохой сходимостью особых рядов уравнений и преодолевается соединением рассуждений [5, 2] с методом большого решета Ю. В. Линника [4] (подробнее см. § 4). Для родственных уравнений $N = p_1 + p_2^k$ и $N = p_1p_2 + p_3^k$, как и в [1], для количества представлений большой части чисел $N \leqslant X$ мы получаем лишь слабую нижнюю оценку, зависящую от «зигелевского нуля». В остальных случаях теоремы 2 нижняя оценка близка к ожидаемой асимптотике. В отличии от [1] наши рассуждения вместе с результатом Мотохаши [6] (подробнее см. § 5) дают доказательство теорем 1 и 2, полностью не зависящее от плотностных методов теории L-функций Дирихле. Мы подробно рассмотрим доказательство теоремы 2 (§ 2—§ 8).

Замечания к доказательству теоремы 1 собраны в конце (§8).

Результаты настоящей работы автор анонсировал в [7, с. 203] и депонировал (см. РЖМ, 1985, 3А131 и 5А137). Независимо А. И. Виноградов [8], используя плотностные методы и тэта-функции, получил степенную оценку в случае $N = p + n^k$.

§ 2. Схема доказательства теоремы 2. Достаточно оценить количество исключительных чисел N на интервале $X/2 < N \leqslant X$. В дальнейшем $c_j > 0$ — постоянные числа, $\rho_0 = 1/17k^2\,(2\ln k + \ln\ln k + 2{,}8)$, параметры $\varepsilon \leqslant \rho_0/4$ и $\delta \leqslant 1/5$ определим в § 7; $X \geqslant X_0\,(\Phi,\ k,\ \delta,\ \varepsilon)$, $\mathscr{L} = \ln X$, $P^k = X$, $Q = X^{17\varepsilon}$, $\Delta X = Q$. ϑ и B — функции с условием $|\vartheta| \leqslant 1$ и $|B| \leqslant k^c$, равномерно по k, δ, ε, X. Постоянные в знаках O и $\ll$ могут зависеть от k, δ, ε.

Ради определенности пусть область $x,\ y > 0$, $\Phi(x,\ y) > 0$ непуста. Обозначим через $\Omega = \Omega(X)$ область $x,\ y > 0$, $\delta X < \Phi(x,\ y) \leqslant X$ без секторов в δ радиан, прилегающих к осям координат и (случай $\Delta_0 > 0$) асимптотам гиперболы $\Phi(x,\ y) = 1$. Считаем $\delta \leqslant \delta_0$, так что Ω — непусто, ω — интервал $z > 0$, $\delta X < z^k \leqslant X$, λ_n равно $\ln p$ при $n = p$ и 0 в противном случае. Мы применим метод И. М. Виноградова к

$$\varkappa(N) = \sum_{\substack{\Omega,\ \omega \\ \Phi(x,\ y)+z^k=N}} \lambda_x\lambda_y\lambda_z.$$

Представим $\varkappa(N)$ в виде интеграла от сумм ($e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha)$)

$$S_\Phi = \sum_\Omega e(\alpha\Phi(x,\ y))\,\lambda_x\lambda_y, \qquad S_k = \sum_\omega e(\alpha z^k)\,\lambda_z,$$

и разобьем интеграл на два: по множеству больших дуг $|\alpha - a/q| \leqslant \Delta$ с $q \leqslant Q$, $0 < a \leqslant q$, $(a,\ q) = 1$ и $\mathfrak{m}$ множеству малых дуг. Отсюда

$$\varkappa(N) = \varkappa_1(N) + \varkappa_2(N), \qquad \varkappa_2(N) = \int_{\mathfrak{m}} S_\Phi S_k e(-\alpha N)\,d\alpha.$$

Интеграл по множеству больших дуг благодаря свойству ортогональности характеров Дирихле представим в виде

$$\varkappa_1(N) = \sum_{q\leqslant Q}\sum_\chi u(q,\ N,\ \overline{\chi})\,I(N,\ \chi), \tag{2}$$

где через χ обозначали тройку характеров χ_1, χ_2, $\chi_3 \bmod q$,

$$\varphi^3(q)\,u(q,\ N,\ \chi) = \\ = \sum_{\substack{a,u,v,w=1 \\ (auvw,\ q)=1}}^{q} \chi_1(u)\,\chi_2(v)\,\chi_3(w)\,e\left(\frac{a\,(\Phi(u,\ v) + w^k - N)}{q}\right), \tag{3}$$

$I(N,\ \chi) = \int_{-\Delta}^{\Delta} V_\Phi V_k e(-\eta N)\,d\eta$ и суммы V_Φ, V_k равны

$$\sum_\Omega \chi_1(x)\,\chi_2(y)\,e(\eta\Phi(x,\ y))\,\lambda_x\lambda_y, \qquad \sum_\omega \chi_3(z)\,e(\eta z^k)\,\lambda_z. \tag{4}$$

Пусть $\xi_j \bmod r_j$ — примитивный характер, индуцирующий характер $\chi_j \bmod q$, и $q = mr$, где $(m, r) = 1$, $r_* | [r_1, r_2, r_3] | r$ и $r_* = \prod_{p|r} p$. Переменные в суммах (4) — простые числа $> Q$ и $q \leqslant Q$, поэтому $I(N, \chi) = I(N, \xi)$. Сумма (3) мультипликативна: если характер $\chi_j \bmod q$ равен произведению $\chi_j' \bmod q'$ и $\chi_j'' \bmod q''$ с $(q', q'') = 1$, то $u(q, N, \chi) = u(q', N, \chi') \cdot u(q'', N, \chi'')$. Пусть $\chi_0 \bmod q$ и $\xi_0 \bmod 1$ — главные характеры,

$$u(q, N) = u(q, N, \xi_0, \xi_0, \xi_0) \text{ и } A_r(N, x) = \sum_{\substack{m \leqslant x \\ (m, r) = 1}} u(m, N).$$

Теперь из (2) вытекает формула

$$\varkappa_1(N) = \sum_{r \leqslant Q} \sum_{\xi} u(r, N, \bar{\xi}) I(N, \xi) A_r(N, Q/r), \tag{5}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_j \bmod r_j$ и $r_* | [r_1, r_2, r_3] | r$.

Оценим $\varkappa_2(N)$. Каждая точка $\mathfrak{m}$ лежит в Δ/q окрестности некоторой несократимой дроби a/q с $Q < q \leqslant 1/\Delta$. Из [3] теоремы 7.1 при $\alpha \in \mathfrak{m}$, суммируя по частям, найдем

$$S_k \ll P^{1+\varepsilon} \max\{P^{-\rho_0}; Q^{-1/2k}\} \ll P^{1-3\varepsilon}.$$

Отсюда в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{N \leqslant X} |\varkappa_2(N)|^2 \leqslant \int_{\mathfrak{m}} |S_\Phi S_k|^2 \, d\alpha \ll P^{2-6\varepsilon} \int_0^1 |S_\Phi|^2 \, d\alpha \ll X P^{2-5\varepsilon}.$$

Следовательно, $\varkappa_2(N) \ll P^{1-2\varepsilon}$ для почти всех чисел N, за исключением $\ll X \cdot P^{-\varepsilon}$.

§ 3. **Функции u и ρ.** Пусть $\nabla_q(u, v, w)$ обозначает условие (1) и

$$\rho(q, N, \chi) = \sum_{\nabla_q(u, v, w)} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(w).$$

Функция ρ мультипликативна в том же смысле, что и функция u. Из теории сравнений (см., например, [9, § 4, 5в, § 5.4] и [10, лемма 2]) имеем лемму.

ЛЕММА 1. *В сравнении* (1) *с* $q = p^\alpha$ *и* $\alpha > \nu_0$ *каждое решение имеет* p^2 *продолжений при переходе от* $\bmod q$ *к* $\bmod qp$.

В случае $r = p^\alpha > 1$, $[r_1, r_2, r_3] = p^\rho \leqslant r$ и, например, $r_1 = p^\rho$ из представления $\varphi^3(r) u(r, N, \xi)$ разностью

$$r \sum_{\nabla_r(u, v, w)} \xi_1(u) \xi_2(v) \xi_3(w) - \frac{r}{p} \sum_{\nabla_{r/p}(u, v, w)} \xi_1(u) \xi_2(v) \xi_3(w), \tag{6}$$

где $u, v, w \pmod r$ и $p \nmid uvw$ по лемме 1, вытекает

$$u(p^\alpha, N, \xi) = 0 \tag{7}$$

при $\alpha > \rho$ и $\alpha > \nu_0 + 1$. Если $\alpha = \rho$ и $u = U + tp^{\alpha-1}$, то вторая из сумм (6) имеет множитель

$$\sum_{u=1}^{p-1} \xi_1(u) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{t=0}^{p-1} \xi_1(U + tp^{\alpha-1}) = 0$$

соответственно в случаях $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$; поэтому при $\alpha = \rho$ имеем

$$u(p^{\alpha}, N, \xi) = p^{\alpha}\rho(p^{\alpha}, N, \xi)/\varphi^3(p^{\alpha}). \tag{8}$$

Пусть G_r обозначает множество троек характеров ξ с условием $r_*\|[r_1, r_2, r_3] | r \| [r_1, r_2, r_3]\ \Delta_0$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 2. *$u(p^{\alpha}, N) = 0$ при $\alpha > \nu_0 + 1$. В сумме* (5) *$u(r, N, \xi) = 0$ при $\xi \notin G_r$. Любая ξ принадлежит В-множествам G_r.*

Из (6) и (7) также найдем при $n > \nu_0$

$$\pi_p(N) = \sum\nolimits_{\alpha=0}^{\infty} u(p^{\alpha}, N) = p^n\rho(p^n, N)/\varphi^3(p^n). \tag{9}$$

Пусть $l(m) = (\Delta_0/m)$ обозначает символ Лежандра—Якоби. В случае $p \nmid 2\Delta_0$ известно [10], что $R(p, M)$ — число решений сравнения $\Phi(x, y) \equiv M \pmod p$ с $p \nmid (x, y)$ равно $p - l(p)$ при $p \nmid M$ и $[p - l(p)]\,[1 + l(p)]$ при $p \mid M$.

ЛЕММА 3. *$\rho(p, N) \neq 0$ при $p \nmid K$.*

Доказательство. Имеем $p \nmid 30\Delta_0$. При $\varphi(p) \nmid k$ хотя бы один из вычетов $N - w^k \pmod p$ (обозначим его M) взаимно прост с p. Решений сравнения $\Phi(u, v) \equiv M \pmod p$ с $p \nmid uv$ всего $R(p, M) = p - l(p)$ без общего числа решений сравнений $\Phi(x, 0) \equiv M$ и $\Phi(0, y) \equiv M \pmod p$, т. е. $\geqslant p - l(p) - 4 > 0$, поскольку $p > 5$. В случае $\varphi(p) \mid k$ имеем $w^k = 1 \pmod p$ и можно взять $M = N - 1$, так как $p \nmid K$. Лемма доказана.

Через $r(m, M)$ обозначим число решений сравнения $w^k \equiv M \pmod m$, $(w, m) = 1$; g — бесквадратное число и $\mathscr{Y}_g$ множество всех примитивных характеров по $\operatorname{mod} g$ степени k. Имеем $\#\mathscr{Y}_p = (k, \varphi(p)) - 1 = k_1$,

$$r(p, M) = \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi^k = \chi_0}} \chi(M) = \chi_0(M) + \sum\nolimits_{\chi \in \mathscr{Y}_p} \chi(M) \tag{10}$$

и $\# \mathscr{Y}_g \leqslant k^{\omega(g)}$, где $\omega(n)$ — число различных простых делителей n. В дальнейшем $(g, 2\Delta_0) = 1$.

ЛЕММА 4. *При $p \nmid 2\Delta_0$ имеем*

$$\rho(p, N) = p^2 - 3p + pl(p)\,[r(p, N) - 1] + B\sqrt{p\,(p, N)}.$$

Доказательство. Решений сравнения имеется

$$\sum\nolimits_{w=1}^{p-1} R(p, N - w^k) + 2r(p, N) =$$

$$= [p - l(p)]\cdot[\varphi(p) - r(p, N)] + [p - l(p)]\,[1 + l(p)]\cdot r(p, N) + B =$$

$$= p\varphi(p) + pl(p)\,[r(p, N) - 1] + B$$

без общего числа решений сравнений $\Phi(0, y) + u^k \equiv N$ и $\Phi(x, 0) + v^k \equiv N \pmod p$ с $p \nmid uv$. У последних двух сравнений по $p + B\sqrt{p\,(p, N)}$ решений в силу (10) и свойств сумм Гаусса.

ЛЕММА 5. *Найдется мультипликативная функция* $f_N(n)$ *с условием* $f_N(n) \leqslant B^{\omega(n)} n^{-1} \sqrt{(n, N)/n}$ *и такая, что*

$$u(m, N) = \sum_{\substack{m=ng \\ (n, g)=1}} f_N(n) \cdot l(g) g^{-1} \sum_{\chi \in \mathscr{Y}_g} \chi(N).$$

Доказательство. Ввиду мультипликативности обеих частей формулы пусть $m = p^\alpha$. При $p \mid 2\Delta_0$ или $p \nmid 2\Delta_0$ и $\alpha > 1$, согласно определению g, формула имеет вид $u(m, N) = f_N(m)$. Оценка $f_N(m)$ вытекает из леммы 2. Для $p \nmid 2\Delta_0$ из представления (6) и леммы 4 найдем

$$u(p, N) = p\rho(p, N)/\varphi^3(p) - 1 = l(p) p^{-1} [r(p, N) - 1] +$$
$$+ B\sqrt{p(p, N)}\, p^{-2} = Bp^{-1} \sqrt{(p, N)/p} + l(p) p^{-1} \sum_{\chi \in \mathscr{Y}_p} \chi(N).$$

Лемма доказана.

Пусть далее $A(N) = A_1(N, Q)$, $Y = X^{1/\varepsilon \ln \ln X}$ и

$$\sigma(N) = \prod_{p \leqslant Y} \pi_p(N), \quad \pi_r(N) = \prod_{p \mid r} \pi_p(N).$$

Из лемм 2 — 5 вытекают оценки:

$$u(m, N) \leqslant B^{\omega(m)} m^{-1}, \ \pi_p(N) = 1 + \vartheta k_1 p^{-1} + Bp^{-1} \sqrt{(p, N)/p}. \quad (11)$$

Следствие. $A_r(N, Q/r)\, \pi_r(N) \leqslant \mathscr{L}^k$ *при любом* $r \leqslant Q$, $\sigma(N) = 0$ *при* $\rho(K, N) = 0$ *и* $\mathscr{L}^{-k} \leqslant \sigma(N) \leqslant \mathscr{L}^k$ ***в противном*** *случае.*

ЛЕММА 6. *Пусть* $\rho(K, N) > 0$ *и* $\xi \in G_r$. *Тогда* $u(r, N, \bar{\xi})/\pi_r(N) = B$ *и* $B(r, N)\, r^{-0{,}33}$ *всегда и* $B^{\omega(r)} \sqrt{(r, N)/r}$ *для бесквадратных чисел* r.

Доказательство. Опять достаточно рассмотреть случай $r = p^\alpha$ и $[r_1, r_2, r_3] = p^\rho \leqslant r$. Имеем $\pi_r(N) \asymp 1$ в силу леммы 3, (9) и (11). Первая оценка при $\alpha \leqslant \nu_0$ тривиальна, а при $\alpha > \nu_0$ вытекает из (7) или следствия формул (8) и (9): при $\alpha > \nu_0$ и $\alpha = \rho$ имеем

$$u(r, N, \xi)/\pi_r(N) = \rho(r, N, \xi)/\rho(r, N). \quad (12)$$

Оценим $u(p, N, \xi)$. Пусть $a \equiv \mu^{x+2ky} \equiv zt^{2k} \pmod p$, где μ — первообразный корень, $k_2 = (2k, \varphi(p))$, $1 \leqslant x \leqslant k_2$ и $1 \leqslant t < p$. При изменении z, t каждое a повторится k_2 раз. В сумме $u(p, N, \xi)$ новая переменная t определяет лишь знаки $\bar{\xi}_1^k \bar{\xi}_2^k(t)$ и $\xi_3^2(t)$ сумм по u, v и w, равных соответственно $Bp^{3/2}$ и $Bp^{1/2}$. Сумма по t равна $B\sqrt{p(p, N)}$. Отсюда

$$u(p, N, \xi) = \varphi^{-3}(p)\, k_2^{-1} \sum_x Bp^{3/2} B p^{1/2} B \sqrt{p(p, N)} = B\sqrt{(p, N)/p},$$

что равносильно третьей оценке.

Ввиду установленного проверим вторую оценку лишь в случае $\alpha > \nu_0$ и $\alpha = \rho > 1$. Оценим правую часть (12). Не ограничивая общности, считаем $p > 2$. Пусть q наименьший делитель r с условием $r \mid q^2$ и $n = r/q$. Тогда $n \geqslant r^{1/3}$ и $q \leqslant r^{2/3}$. В новых переменных

$u \equiv U + qxU$, $v \equiv V + qyV$, $w \equiv W + qzW \pmod r$ условие $\nabla_r(u, v, w)$ распадается на $\nabla_q(U, V, W)$ и линейное сравнение $\Delta_n(x, y, z)$ вида

$$\Phi_1(U, V)\,Ux + \Phi_2(U, V)\,Vy + kW^k z \equiv$$
$$\equiv [N - \Phi(U, V) - W^k]\,q^{-1} \pmod n,$$

где Φ_j — частная производная Φ по j-й переменной. Отсюда

$$\rho(r, N, \xi) = \sum\nolimits_{\nabla_q(U, V, W)} \vartheta \sum\nolimits_{\Delta_n(x, y, z)} \xi_1(1 + qx) \cdot$$
$$\cdot\, \xi_2(1 + yq)\,\xi_3(1 + qz).$$

Оценим внутреннюю сумму. Пусть $\xi_j(a) = e(m_j \operatorname{ind} a/\varphi(r))$. Так как $\alpha = \rho$, имеем $p \nmid (m_1, m_2, m_3)$. Слагаемые этой суммы равны $e((m_1bx + m_2by + m_3bz)/n)$, где $p \nmid b$, в силу $\operatorname{ind}(1 + qx) \equiv \varphi(q)\,bx \pmod{\varphi(r)}$, см. [11, § 8.1]. Запишем условие Δ_n через тригонометрическую сумму и просуммируем по x, y, $z \pmod n$; получим $|\rho(r, N, \xi)| \leqslant n^2T$. Здесь T — число решений U, V, $W \pmod q$, $a \pmod n$ системы сравнений $\nabla_q(U, V, W)$ и

$$a\Phi_1(U, V)\,U \equiv m_1b, \quad a\Phi_2(U, V)\,V \equiv m_2b, \quad akW^k \equiv m_3b \pmod n. \tag{13}$$

Оценим T. $p \nmid a$ в силу $p \nmid b(m_1, m_2, m_3)$. Из линейной комбинации всех сравнений вытекает $2kNa \equiv k(m_1 + m_2)\,b + 2m_3 \pmod n$. Поэтому различных a всего $\leqslant (2kN, n) = B(n, N)$. Оценим число возможных троек U, V, W при фиксированном a. Пусть сначала $a_0c_0 \neq 0$. Обозначим d степень p и $d \,\|\, (m_1, m_2)$, например, $d \,\|\, m_1$; $m_1 = dm$, $dm\bar{m} \equiv d \pmod n$ и $\tau = (d, n)$. В силу (13) при $\tau > 1$ однородная система $\Phi_1(U, V) \equiv \Phi_2(U, V) \equiv 0 \pmod \tau$ с детерминантом Δ_0 имеет ненулевое решение; поэтому $\tau \mid \Delta_0$. При $V \equiv \eta U \pmod n$ из (13) вытекает $\Phi_1(1, \eta)\,\bar{m}m_2d^{-1} \equiv \Phi_2(1, \eta)\,\eta \pmod n$. Сравнение имеет B решений. Отсюда пар U, V всего $B(q/n)^2$, так как τ ограничено. Вычетов W с условием $\nabla_q(U, V, W)$ всего B. Таким образом, $T = B(n, N)(q/n)^2$. В случае $a_0 \neq 0$ и $c_0 = 0$ при $\Delta_0 \neq 0$ имеем $b_0 \neq 0$. Перейдем к $\eta \equiv U^2$, $\zeta \equiv UV \pmod n$. Оценка T сохраняется. Наконец, при $a_0 = c_0 = 0$ (случай $\Phi(x, y) = xy$) имеем $T = B(n, N)(q/n)\,\varphi(q)$. Следовательно,

$$\rho(r, N, \xi) = \vartheta n^2T = Bn^2(n, N)(q/n)\,q = B(r, N)\,r^{5/3}.$$

Из лемм 1 и 4 вытекает $\rho(r, N) \asymp r^2$. Лемма доказана.

§ 4. Особый ряд. Для каждого r в сумме (5) будем заменять, следуя [2, 5], $A_r(N, Q/r)$ в среднем по N произведением $\sigma(N)/\pi_r(N)$. Дополнительно, чтобы увеличить точность замены, мы используем способ оценки коротких сумм характеров Линника [4, с. 327]. Подобные рассуждения с $r = 1$ и сложнее, чем в § 4, при изучении особого ряда уравнения $N = x^2 + y^3 + z^5$ реализовал Вон [12].

ЛЕММА 7. *Пусть* $Q^{0,7} \leqslant x \leqslant Q/r$. *Тогда* $A(N) - A_r(N, x)\,\pi_r(N) \ll Q^{-0,1}$ *для почти всех* $N \leqslant X$, *за исключением*

$\ll XQ^{-0,4}$ (*множество исключительных чисел зависит от пары* x, r).

Доказательство. Обозначим разность $H(N)$. Ввиду (9) и леммы 2 имеем $H(N)=\sum_{x<q\ll Q}\alpha_q u(q,N)$ с $\alpha_q=\vartheta$. Покажем, что

$$D=\sum_{N\leqslant X}H^2(N)\ll XQ^{-0,6}.$$

По лемме 5 и неравенству Коши слагаемые в D меньше

$$\left(\sum_{n\ll Q}B^{\omega(n)}\frac{(n,N)}{n}\right)\left(\sum_n\Big|\sum_{\substack{x<ng\ll Q\\(n,g)=1}}\alpha_{ng}\frac{l(g)}{ng}\sum_{\chi\in\mathscr{Y}_g}\chi(N)\Big|^2\right).$$

Первый множитель $\ll Q^{\varepsilon}$. Соберем оценки в D, раскроем квадрат и сумму по N сделаем внутренней. Для неравных примитивных характеров χ и χ_1 характер $\chi\bar{\chi}_1$ неглавный. Поэтому оценка И. М. Виноградова для суммы характеров влечет

$$D\ll Q^{\varepsilon}\left(\sum_{x<a}\frac{\tau(a)}{a^2}k^{\omega(a)}X+\right.$$
$$\left.+\sum_{a,b\ll Q}\frac{\tau(a)\tau(b)}{ab}k^{\omega(a)}k^{\omega(b)}\sqrt{ab}\ln(ab)\right)\ll Q^{2\varepsilon}Xx^{-1}\ll XQ^{-0,6}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Пусть* $c>0$. *Тогда* $A(N)-\sigma(N)\ll\mathscr{L}^{-c}$ *для почти всех чисел* $N\leqslant X$, *за исключением* $\ll X^{0,6}$.

Доказательство. Обозначим через a натуральные числа без простых делителей $>Y$ и $\lambda=\ln(\ln Q/\ln Y)/\ln Y$. Ввиду (9) и (11) часть суммы $\sigma(N)=\sum_a u(a,N)$ с $a>Q$ меньше

$$\ll Q^{-\lambda}\sum_a B^{\omega(a)}a^{\lambda-1}\ll Q^{-\lambda}\exp\left\{B\sum_{p\leqslant Y}\left(\frac{1}{p}+\frac{p^{\lambda}-1}{p}\right)\right\}\ll$$
$$\ll Q^{-\lambda}\exp\left\{B\sum_{p\leqslant Y}\left(\frac{1}{p}+\frac{Y^{\lambda}}{\ln Y}\cdot\frac{\ln p}{p}\right)\right\}\ll\mathscr{L}^{-c}.$$

Осталось изучить разность

$$h(N)=A(N)-\sum_{a\leqslant Q}u(a,N)=\sum_{Y<q\leqslant Q}\beta_q u(q,N),$$
$$\beta_q=\vartheta.$$

Опять применим лемму 5. Вклад в $h(N)$ слагаемых с $n>y=\exp(\mathscr{L}^{2/3})$ меньше $\ll y^{-1/2}\sum_{ng\leqslant Q}B^{\omega(n)}n^{-1}(n,N)^{1/2}k^{\omega(g)}g^{-1}\ll\ll\mathscr{L}^{-c}$. Точками $U=Y\cdot 2^j$ разобьем оставшуюся часть $h(N)$ на $\ll\mathscr{L}$ коротких сумм, получим

$$h(N)=\sum_U h(N,U)+O(\mathscr{L}^{-c}),\quad U_1\leqslant 2U, \tag{14}$$
$$h(N,U)\ll\sum_{n\leqslant y}B^{\omega(n)}\Big|\sum_{\substack{U<ng\leqslant U_1\\(n,g)=1}}\beta_{ng}\frac{l(g)}{ng}\sum_{\chi\in\mathscr{Y}_g}\chi(N)\Big|. \tag{15}$$

Пусть s — наименьшее целое число с условием $\sqrt{X}/Q < U^s \leqslant \leqslant \sqrt{X}$. $s \leqslant (\varepsilon/2) \ln \ln X$, согласно выбору Y. Пусть $\sum_q \sum_\chi b(q, \chi, n) \chi(N) = H(N, U, n)$ — обозначает s-ю степень суммы по g в оценке (15). Здесь $\chi \bmod q$ — произведение s характеров $\chi_j \in \in \mathcal{Y}_{g_j}$, поэтому $\chi^k = \chi_0$ и q — бесквадратное число $\leqslant U_1^s$. Ввиду $k^{\omega(g)} \leqslant U^\varepsilon$, $q < X$ и $\omega(q) < 2\mathcal{L}/\ln \mathcal{L}$ слагаемых внутренней суммы меньше $\leqslant k^{\omega(q)} \leqslant X^\varepsilon$ и

$$b(q, \chi, n) \leqslant \sum_{[g_1, \ldots, g_s]=q} U^{-s} U^{\varepsilon s} \leqslant 2^{s\omega(q)} U^{-s} X^\varepsilon \leqslant X^{2\varepsilon} U^{-s}.$$

По неравенству Гёльдера и (15) в сумме

$$D(U) = \sum_{N \leqslant X} |h(N, U)|^{2s}$$

слагаемые меньше

$$\left(\sum_{n \leqslant y} B^{\omega(n)2s/(2s-1)}\right)^{2s-1} \left(\sum_{n \leqslant y} |H(N, U, n)|^2\right).$$

Подставим эту оценку в $D(U)$, раскроем квадрат и сумму по N сделаем внутренней. Если $\chi\bar{\chi}'$ — главный характер по бесквадратному модулю $G = [q, q'] = [g_1, \ldots, g_s, g_1', \ldots, g_s']$ равен произведению примитивных характеров по модулям $g_1, \ldots, g_s'$, то каждый простой делитель числа $g_1 \ldots g_s'$ имеет показатель >1 и $G^2 \leqslant \leqslant g_1 \ldots g_s'$. Отсюда, как и раньше, найдем

$$D(U) \leqslant y^{3s} y \Big\{\sum_{q, q' \leqslant U_1^s} X^{2\varepsilon} (X^{2\varepsilon} U^{-s})^2 \sqrt{qq'} \ln(qq') +$$

$$+ \sum_{G \leqslant U_1^s} \sum_{[q, q']=G} X^{2\varepsilon} (X^{2\varepsilon} U^{-s})^2 X\Big\}.$$

Уравнение $[q, q'] = G$ имеет $3^{\omega(G)}$ решений, поэтому

$$D(U) \leqslant (U^s + XU^{-s}) X^{7\varepsilon} \leqslant X^{1/2+24\varepsilon}.$$

Чисел N, для которых оценка $|h(N, U)| \leqslant U^{-\varepsilon}$ неверна хотя бы при одном значении U, меньше $\sum_U D(U) U^{\varepsilon 2s} \leqslant \mathcal{L} X^{1/2+25\varepsilon} \leqslant \leqslant X^{0,6}$. Для остальных N в силу (14) найдем $h(N) \leqslant \mathcal{L}^{-c}$. Лемма доказана.

§ 5. **Сумма W_j.** Далее $Z = Q^8$. Известно (см. например, [13, § 14]), что $L(s, \xi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s \geqslant 1 - c_1/\ln Z$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant Z$ и некотором c_1 для всех примитивных характеров $\xi \bmod r$ и $r \leqslant Z$, кроме, возможно, одного (действительного) характера $\psi \bmod f$; (единственный) исключительный нуль β функции $L(s, \psi)$ действительный и $c_2/\sqrt{f} \ln^2 f \leqslant 1 - \beta \leqslant c_1/\ln Z$ при некотором c_2. Отсюда $f \gg \mathcal{L}$. Согласно [13, § 5], число $f/(f, 4)$ бесквадратное и в разложении ψ нечетным простым делителем модуля f соответствуют символы Лежандра.

Пусть $E(n, \xi)$ равно 1 при $\xi = \xi_0$, $-n^{\beta-1}$ при $\xi = \psi$ и 0 в остальных случаях; X_1 — наименьшее ($\geqslant X$) число с условием $\Omega \subset (0, \sqrt{X_1}] \times (0, \sqrt{X_1}]$; $W_j = \sum_{r \leqslant Z} \sum_\xi w_j(\xi)$, где $N_j = X_1^{1/j}$,

$h_j = N_j/Z$ и

$$w_j(\xi) = \max_{x \asymp N_j} \left| h_j^{-1} \sum\nolimits_{x<n\leqslant x+h_j} \{\xi(n)\lambda_n - E(n, \xi)\} \right|.$$

Ввиду [1, 6, 14] справедлива

ЛЕММА 9. *При некоторых c_3 и c_4 для любых $\varepsilon \leqslant c_3/k$ и $1 \leqslant j \leqslant k$ сумма W_j равна $B \exp(-c_4/k\varepsilon)$ всегда и $B \exp(-c_4/k\varepsilon)(1-\beta)\ln Z$, если есть исключительный нуль.*

Замечание. Вес λ_n, использованный в [1, 14] и настоящей работе, несущественно отличается от $\Lambda(n)$ в [6]. Введение max вместо $x = N_j$ в определении $w_j(\xi)$ влечет замену в доказательстве теоремы в [6] множителя $\exp(-c \ln N_j/\ln Z)$ (см. оценку ядра Дирихле в формуле Перрона на с. 176) на $\max_{x\asymp N_j} \exp(-c\ln x/\ln Z) = B\exp(-c_4/j\varepsilon)$ (ср. с [1, с. 357]). Таким образом, в силу [6] доказательство леммы 9 использует лишь метод большого решета и метод решета А. Сельберга.

§ 6. **Интегралы I и J.** Для изучения $I(N, \xi) = I$, $I(N, \xi_0, \xi_0, \xi_0) = I(N)$ и $I(N, \psi, \psi, \psi^k) = I_\psi(N)$ применим лемму Галлахера и метод исчерпывания. Пусть s_Φ обозначает площадь $\Omega(1)$ и

$$v_j(\xi) = \max_{x\asymp N_j} \left| h_j^{-1} \sum\nolimits_{x<n\leqslant x+h_j} \xi(n)\lambda_n \right|.$$

При $j \leqslant k$ имеем $v_j(\xi) = B$.

Оценим I. Пусть $\Omega_t = \Omega \cap \{t < \Phi(x, y) \leqslant t + H\}$, $\omega_t = \omega \cap \{t < z^k \leqslant t + H\}$ и I_Φ, I_k — интегралы

$$\int_{\delta X - H}^{X} \left| \frac{1}{H} \sum\nolimits_{\Omega_t} \xi_1(m)\xi_2(n)\lambda_m\lambda_n \right|^2 dt,$$

$$\int_{\delta X - H}^{X} \left| \frac{1}{H} \sum\nolimits_{\omega_t} \xi_3(r)\lambda_r \right|^2 dt.$$

По неравенству Коши и [14, лемма 1] при $H = 1/2\Delta$ найдем

$$|I|^2 \leqslant \int_{-\Delta}^{\Delta} |V_\Phi|^2 d\eta \int_{-\Delta}^{\Delta} |V_k|^2 d\eta \leqslant (\pi/2)^2 I_\Phi I_k.$$

Оценим I_Φ. Область Ω гомотетична $\Omega(1)$, поэтому у области Ω_t площадь $\leqslant s_\Phi H$ и длина границы $\leqslant \sqrt{X}$. Разбивая Ω_t на квадраты со стороной h_2, подынтегральную сумму оценим величиной

$$(s_\Phi H/h_2^2)\, v_2(\xi_1)\, v_2(\xi_2)\, h_2^2 + O((\sqrt{X}/h_2)\, h_2^2) \leqslant$$
$$\leqslant s_\Phi H v_2(\xi_1)\, v_2(\xi_2) + O(HQ^{-7}).$$

Отсюда $I_\Phi \leqslant X\{s_\Phi v_2(\xi_1)\, v_2(\xi_2) + O(Q^{-7})\}^2$. Разбивая интервал ω_t (длины $\leqslant \sqrt[k]{t+H} - \sqrt[k]{t} < HP/\delta X$) на интервалы длины h_k, также найдем $I_k \leqslant X(P/X)^2 \{v_k(\xi_3)/\delta + O(Q^{-7})\}^2$. Следовательно,

$$|I| \leqslant s_\Phi \delta^{-1} P v_2(\xi_1)\, v_2(\xi_2)\, v_k(\xi_3) + O(PQ^{-7}). \qquad (16)$$

Пусть $T_\Phi = \sum_\Omega e(\eta\Phi(m, n))$, $T_k = \sum_\omega e(\eta r^k)$, $J = \int_{-\Delta}^{\Delta} T_\Phi T_k e(-\eta N)\,d\eta$. Способ изучения I и равенство $\lambda_m\lambda_n - 1 = (\lambda_m - 1)\lambda_n + (\lambda_n - 1)$ влекут

$$I(N) - J = Bs_\Phi\delta^{-1}P\{w_2(\xi_0) + w_k(\xi_0)\} + O(PQ^{-7}).$$

Введем также обозначения $s'_\Phi = s_\Phi/(1-\delta)$,

$$J(N) = s'_\Phi \Sigma 1/kn^{1-1/k}$$

и

$$J_\beta(N) = s'_\Phi \sum m^{\beta-1}E(n^{1/k}, \psi^k)/kn^{1-1/k},$$

где $\delta X < m$, $n \leqslant X$ и $m + n = N$. При $X/2 < N \leqslant X$ и $5\delta \leqslant 1$ имеем

$$J(N) = s_\Phi(N^{1/k} + B\delta^{1/k}P)$$

и

$$J(N) + \vartheta J_\beta(N) > c_5 s_\Phi P(1-\beta)\ln Z, \tag{17}$$

так как $m > \delta X > Z$ и $1 + \vartheta m^{\beta-1}E(n^{1/k}, \psi^k) > 1 - Z^{\beta-1} \geqslant c_6(1-\beta)\ln Z$, где c_6 зависит от c_1. Для $|\eta| \leqslant \Delta$ сумма T_Φ с погрешностью $\leqslant \sqrt{X}$ равна

$$\iint_\Omega e(\eta\Phi(x, y))\,dx\,dy = s'_\Phi \int_{\delta X}^{X} e(\eta t)\,dt;$$

s'_Φ определяется отсюда при $\eta = 0$ и $X = 1$. Поэтому стандартные рассуждения [3] дают $J = J(N) + O(\Delta^{-1/k})$. Следовательно,

$$I(N) = J(N) + Bs_\Phi\delta^{-1}P\{w_2(\xi_0) + w_k(\xi_0)\} + O(P^{1-3\varepsilon}). \tag{18}$$

Для случая $\Phi(x, y) = xy$, ввиду монотонности $t^{\beta-1}$, также найдем

$$I_\psi(N) = J_\beta(N) + Bs_\Phi\delta^{-1}P\{w_2(\psi) + w_k(\psi^k)\} + O(P^{1-3\varepsilon}). \tag{19}$$

§ 7. **Случай $\Phi(x, y) \neq xy$.** Главный член асимптотики $\varkappa(N)$ содержит слагаемое суммы (5) с $r = 1$. Ввиду следствия и леммы 8 для почти всех N, за исключением $\ll X^{0,6}$, имеем $A(N) \ll \mathscr{L}^{-c}$ (c — любое) при $\rho(K, N) = 0$ и $\mathscr{L}^{-k} \ll A(N) \ll \mathscr{L}^k$ в противном случае. Поэтому будем рассматривать лишь числа N с $\rho(K, N) \neq 0$ и $\mathscr{L}^{-k} \ll A(N) \ll \mathscr{L}^k$.

Преобразуем $\varkappa_1(N)$. Далее $\varepsilon \leqslant c_3/k$ и $R = Q^{0,3}$. Вклад в сумму (5) слагаемых с $r > R$ по леммам 2, 6, следствию и (16) меньше

$$\ll \sum_{r\leqslant Q} \sum_{\xi\in G_r}^{|} (r, N)\, R^{-0,33}P\{v_2(\xi_1)v_2(\xi_2)v_k(\xi_3) + Q^{-7}\}\mathscr{L}^k. \tag{20}$$

Среднее значение этой оценки по N ввиду лемм 2 и 9 меньше $\ll PR^{-0,3}$. Отсюда чисел N, для которых (20) больше $PR^{-0,2}$, всего $\ll XR^{-0,1}$. В слагаемых суммы (5) с $r \leqslant R$ заменим $A_r(N,$

Q/r) на $A(N)/\pi_r(N)$ с общей погрешностью $\ll PQ^{-0,1}$, пользуясь (16), первой оценкой леммы 6 и леммами 2 и 9. Теперь в силу § 2 для почти всех N, за исключением $\ll R\cdot XQ^{-0,4} + XR^{-0,1} + XP^{-\varepsilon} \ll XP^{-\varepsilon}$, найдем

$$\varkappa(N) = A(N)\sum_{r\leqslant R}\sum_{\xi\in G_r} u(r, N, \bar{\xi})\,\pi_r^{-1}(N)\,I(N,\xi) + E, \qquad (21)$$

где остаток $E \ll PQ^{-0,1} + PR^{-0,2} + P^{1-2\varepsilon} \ll P^{1-2\varepsilon}$. Слагаемое с $r = 1$ преобразуем по формуле (18). Вклад в сумму (21) остатка из (18) и слагаемых, где хотя бы один характер в ξ отличен от ξ_0 и ψ, ввиду (16) и леммы 6 меньше

$$A(N)\,PBs_\Phi\delta^{-1}(W_2^2W_k + W_2W_k + W_2 + W_k) + O(\mathscr{L}^kP^{1-3\varepsilon} + \mathscr{L}^kPR^6Q^{-7}) \qquad (22)$$

и оценивается по лемме 9. Пусть F_r — множество остальных $\xi \in G_r$ и

$$F(N) = \sum_{r\leqslant R}\sum_{\xi\in F_r}|u(r, N, \xi)/\pi_r(N)|. \qquad (23)$$

Здесь $\xi_j = \xi_0$ или ψ и $f \mid r \mid f\Delta_0$, согласно определению G_r. Отсюда последняя часть суммы (21) меньше $F(N)\,PBs_\Phi\delta^{-1}A(N)$ и

$$\varkappa(N) = A(N)\,\{J(N) + BPs_\Phi\delta^{-1}F(N) + BPs_\Phi\delta^{-1}\exp(-c_4/k\varepsilon)\} + O(P^{1-2\varepsilon}). \qquad (24)$$

ЛЕММА 10. *$F(N) = o(1)$ при $\Phi(x, y) \neq xy$.*

Доказательство. По определению F_r и лемме 2 в сумме (23) B слагаемых. Поскольку $f \mid r \mid f\Delta_0$, $f/(f, 4)$ — бесквадратное число и $f \gg \mathscr{L}$, теперь достаточно третью оценку леммы 6 заменить $B^{\omega(r)}\sqrt{(r, N)}/r$. Искомая оценка вытекает из доказательства леммы 6, если сумму по u, v из $u(r, N, \xi)$ при $r = f = p$ и $p \nmid 2a$ оценить величиной Bp. При $\xi_1 = \xi_2 = \psi$ подстановка $v = \eta u$ влечет

$$\sum_{u,\,v=1}^{p-1}\left(\frac{uv}{p}\right)e\left(\frac{a\Phi(u, v)}{p}\right) = \sum_{\eta=1}^{p-1}\left(\frac{a\eta\Phi(1, \eta)}{p}\right)\sum_{x=1}^{p}e\left(\frac{x^2}{p}\right) = Bp$$

ввиду свойств сумм Гаусса и теоремы Хассе (см., например, [15, гл. 10]), так как $\Phi(1, \eta) \neq \eta$. Если ξ_1 или ξ_2 равно ξ_0, то оценка устанавливается просто. Лемма доказана.

Фигурная скобка в (24) по лемме 10 и (17) равна

$$s_\Phi N^{1/k}\,\{1 + B\delta^{1/k} + B\delta^{-1}\exp(-c_4/k\varepsilon) + o(1)\} > 0{,}5s_\Phi P$$

для некоторых $\delta = \delta_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$ с условиями $5\delta < 1$, $s_\Phi > 0$ и $4\varepsilon \leqslant \rho_0$, $k\varepsilon \leqslant c_3$. Отсюда чисел N с $\rho(K, N) \neq 0$ и $\varkappa(N) = 0$ всего $\ll X^{0,6} + XP^{-\varepsilon} \ll X^\gamma$, где $\gamma = 1 - \varepsilon_0/k$. Согласно определению B, при достаточно большом k можно взять $\varepsilon_0 = \rho_0/4$ и $\gamma < 1 - 1/137k^3\ln k$. Случай $\Phi(x, y) \neq xy$ изучен полностью.

§ 8. Случай $\Phi(x, y) = xy$. Уравнение $N = p_1 + p_2^k$. Пусть сначала $f > P^{3\varepsilon}$. Тогда чисел N с $(f, N) > \sqrt{f}$ меньше

$\sum_{N\leqslant X}(f,\ N)/\sqrt{f}\ll X\cdot P^{-\varepsilon}$. Для остальных N оценка леммы 10 вытекает из леммы 6 и рассуждения § 7 сохраняются.

ЛЕММА 11. *Пусть $\Phi(x,\ y)=xy$ и хотя бы один нечетный простой делитель N делит f. Тогда $u(f,\ N,\ \psi,\ \psi,\ \psi^k)/\pi_f(N)=\vartheta$ и $u(r,\ N,\ \xi)=0$ для остальных $\xi\in F_r$.*

Доказательство. Имеем $r=f$, так как $\Delta_0=1$ и $f\mid r\mid f\Delta_0$. Первая оценка вытекает из (12). Ввиду мультипликативности суммы (3) и разложения f осталось проверить второе утверждение леммы, когда $r=f$ — нечетный простой делитель N. В этом случае правая часть (12), где $uv=-w^k\pmod f$, $\rho(f,N)=\varphi^2(f)$ и $\xi_j=\xi_0$ или ψ, равна

$$\varphi^{-2}(f)\sum_{v,\,w=1}^{f-1}\xi_1(-1)\,\xi_2\xi_1(v)\,\xi_3\xi_1^k(w)$$

и отлична от нуля (равна $\psi(-1)$) лишь на $\xi=(\xi_1,\ \xi_1,\ \xi_1^k)=(\psi,\ \psi,\ \psi^k)$. Лемма доказана.

Пусть, наконец, $f\leqslant P^{3\varepsilon}$. Для чисел N с $(N,\ f)\mid 8$, как и раньше, $F(N)=o(1)$ и рассуждения § 7 сохраняются. Для остальных N вклад в сумму (21) слагаемых с $\xi\in F_r$ по лемме 11 равен $\vartheta A(N)\,I_\psi(N)$. Теперь, согласно (17) — (19), (22) и лемме 9, $\varkappa(N)$ равно

$$\begin{aligned}A(N)\,\{J(N)&+\vartheta J_\beta(N)+BPs_\Phi\delta^{-1}\exp(-c_4/k\varepsilon)\,(1-\\&-\beta)\ln Z\}+O(P^{1-2\varepsilon})\geqslant s_\Phi\,A(N)\,N^{1/k}\,\{c_5+B\delta^{1/k}+\\&+B\delta^{-1}\exp(-c_4/k\varepsilon)\}\,(1-\beta)\ln Z+O(P^{1-2\varepsilon})\end{aligned}\qquad(25)$$

и положительно, поскольку $(1-\beta)\ln Z\geqslant c_2/\sqrt{f}\,\ln^2 f\gg P^{-1{,}6\varepsilon}$. Рассуждения конца § 7 сохраняются. Теорема 2 доказана полностью.

Исключительное множество уравнения $N=p_1+p_2^k$ изучается так же, как случай $\Phi(x,\ y)=xy$ теоремы 2. Поэтому, естественно изменяя (вместо $\Phi(x,\ y)$ теперь x) содержание старых обозначений, мы ограничимся лишь следующими замечаниями. По малой теореме Ферма конгруэнциальное условие теоремы 1 эквивалентно разрешимости (линейного) сравнения $u+v^k\equiv N\pmod q$ с $(uv,\ q)=1$ при любом q. Аналогом леммы 5 будет разложение

$$u(m,N)=\sum_{\substack{m=ng\\(n,\,g)=1}}f_N(n)\cdot\mu(g)\,g^{-1}\sum_{\chi\in\mathcal{Y}_g}\chi(N)$$

с $f_N(n)\ll B^{\omega(n)}(n,\ N)/n^2$. Наконец, формуле (25) соответствует представление $\varkappa(N)+O(P^{1-2\varepsilon})$ в виде

$$A(N)\left\{J(N)+\frac{\rho(f,N,\psi,\psi^k)}{\rho(f,N)}J_\beta(N)+BP\delta^{-1}(W_1W_k+W_1+W_k)\right\},$$

где применимы формулы (17) с $s_\Phi=1-\delta$ (ср. с (6.11) из [8]).

Петрозаводский государственный университет им. О. В. Куусинена

Поступило 25.06.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exeptional set in Goldbach's problem // Acta Arith. 1975. V. 27. P. 353—370.

[2] Hua Loo Keng. Some results in the additive prime number theory// Quart. J. Math. 1938. V. 9. P. 68—80.

[3] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.

[4] Линник Ю. В. Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции. Л.: Наука, 1979.

[5] Davenport H., Heilbronn H. Note on a result in the additive theory of numbers // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1937. V. 43. P. 142—151.

[6] Motohashi Y. Primes in arithmetic progressions // Invent. Math. 1978. V. 44. P. 163—178.

[7] Тезисы докладов всесоюзной конференции «Теория чисел и ее приложения». Тбилиси: Тбилисский университет, 1985.

[8] Виноградов А. И. О бинарной проблеме Харди—Литлвуда // Acta Arithm. 1985. V. 46. P. 33—56.

[9] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

[10] Плаксин В. А. Асимптотическая формула для количества представлений натурального числа парой квадратичных форм, аргументы одной из которых являются простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 6. С. 1245—1265.

[11] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

[12] Vaughan R. C. A ternary additive problem // Proc. London Math. Soc. 1980. V. 41. P. 516—532.

[13] Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.

[14] Gallagher P. X. O large sieve density estimate near $\sigma = 1$ // Invent. Math. 1970. V. 11. P. 329—353.

[15] Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962.