В. Е. Плиско, Конструктивная формализация теоремы Тенненбаума и ее применения, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 108–118

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

КОНСТРУКТИВНАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ТЕННЕНБАУМА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В. Е. Плиско

Теорема Тенненбаума [1] (см. также [2]) утверждает, что не существует рекурсивных нестандартных моделей арифметики. Используя идею доказательства этой теоремы, автор [3, 4] установил неарифметичность логики предикатов, основанной на клиниевском понятии рекурсивной реализуемости. Позднее эти же идеи были использованы для получения аналогичных результатов, относящихся к различным вариантам предикатной логики доказуемости (см. [5, 6]). Целью настоящей заметки является установление некоторых общих математических результатов, позволяющих единым способом применять идеи, связанные с теоремой Тенненбаума, к исследованию предикатных логик, основанных на конструктивных интерпретациях арифметических суждений.

1. Отправным пунктом наших рассмотрений будет язык формальной арифметики, в котором имеются символы для всех примитивно рекурсивных функций. При этом символ, служащий обозначением данной примитивно рекурсивной функции кодирует примитивно рекурсивное описание этой функции, т. е. способ получения ее из исходных функций 0, $S(x) = x + 1$ и $I_n^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ с помощью операций суперпозиции и рекурсии. А именно, определим функциональные символы как слова в алфавите 0, S, I_n^i $(i = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant i \leqslant n)$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, которые строятся по следующим правилам:

1) 0 есть 0-местный функциональный символ;

2) S есть одноместный функциональный символ;

3) I_n^i есть n-местный функциональный символ $(n = 1, 2, \ldots;$ $1 \leqslant i \leqslant n)$;

4) если f есть m-местный функциональный символ $(m \geqslant 1)$, а $g_1, \ldots, g_m$ суть n-местные функциональные символы $(n \geqslant 0)$, то $\mathbf{C}fg_1 \ldots g_m$ есть n-местный функциональный символ;

5) если f есть n-местный функциональный символ $(n \geqslant 0)$, а g есть $(n + 2)$-местный функциональный символ, то $\mathbf{R}fg$ есть $(n + 1)$-местный функциональный символ.

Содержательный смысл так определенных функциональных символов состоит в следующем. Символы 0, S и I_n^i считаются обозначениями соответствующих исходных примитивно рекурсивных функций. $\mathbf{C}fg_1 \ldots g_m$ — это обозначение функции, полученной суперпозицией из функций, обозначенных посредством f, $g_1, \ldots, g_m$, т. е. такой функции h, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Функциональный символ $\mathbf{R}fg$ есть обозначение для функции, полученной рекурсией из функций, обозначенных через f и g, т. е. такой функции h, что

$$h(0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n);$$

$$h(y+1, x_1, \ldots, x_n) = g(h(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n).$$

Например, функциональный символ $\mathbf{R}0I_2^1$ обозначает одноместную функцию, тождественно равную 0; для краткости обозначим его O. Символ $\mathbf{R}I_1^1\mathbf{C}SI_3^1$ обозначает двуместную функцию сложения; будем обозначать его $+$. Наконец, $\mathbf{R}O\mathbf{C}+I_3^1I_3^3$ обозначает двуместную функцию умножения; для этого символа будем употреблять обозначение $\cdot$.

Термы языка формальной арифметики строятся из предметных переменных и функциональных символов по следующим правилам:

1) всякая предметная переменная есть терм;

2) всякий 0-местный функциональный символ есть терм;

3) если f есть n-местный функциональный символ ($n \geqslant 1$), а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Если f — одноместный функциональный символ, то условимся вместо $f(t)$ писать ft, а если f — двуместный функциональный символ, то вместо $f(t_1, t_2)$ иногда будем писать (t_1ft_2) (например, St, (t_1+t_2), $(t_1 \cdot t_2)$).

Арифметические формулы строятся обычным образом из элементарных формул вида $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы, с помощью логических связок $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Для краткости вместо формулы $\exists x\,(t_1 + Sx = t_2)$ условимся писать $t_1 < t_2$. Как обычно, $\exists!\, x\, A(x)$ будет означать формулу $\exists x\,(A(x)\,\&\,\forall y\,(A(y) \supset x = y))$, а $A \equiv B$ — формулу $(A \supset B)\,\&\,(B \supset A)$.

2. Формальная система интуиционистской арифметики **НА** имеет следующие постулаты.

1) Схемы аксиом и правила вывода интуиционистского исчисления предикатов.

2) Аксиомы равенства:

$$\forall x\; x = x;$$

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y\,\&\,z = y \supset x = z);$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \forall y_1 \ldots \forall y_n \ (x_1 = y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = y_n \supset$$
$$\supset f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$$

для любого n-местного функционального символа $f\,(n \geqslant 1)$.

3) Аксиомы Пеано:

$$\forall x \ \neg Sx = 0;$$

$$\forall x \ \forall y \ (Sx = Sy \supset x = y);$$

$$A\,(0) \,\&\, \forall x \ (A\,(x) \supset A\,(Sx)) \supset \forall x \ A\,(x),$$

где $A\,(x)$ — произвольная арифметическая формула.

4) Определяющие аксиомы для примитивно рекурсивных функций:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ I_n^i\,(x_1, \ldots, x_n) = x_i \ (n \geqslant 1;\ 1 \leqslant i \leqslant n);$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \mathbf{C} f g_1 \ldots g_m\,(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= f\,(g_1\,(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m\,(x_1, \ldots, x_n)),$$

где f есть m-местный ($m \geqslant 1$), а $g_1, \ldots, g_m$ суть n-местные функциональные символы;

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \mathbf{R} fg\,(0, x_1, \ldots, x_n) = f\,(x_1, \ldots, x_n);$$
$$\forall y \ \forall x_1 \ldots \forall x_n \ \mathbf{R} fg\,(Sy, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= g\,(\mathbf{R} fg\,(y, x_1, \ldots, x_n), y, x_1, \ldots, x_n),$$

где f есть n-местный, а g есть $(n + 2)$-местный функциональный символ (если $n = 0$, то список $x_1, \ldots, x_n$ считается пустым).

3. Свойства примитивно рекурсивных функций, которые можно доказать в системе **НА**, существенно зависят от определяющих аксиом для них. Поэтому в дальнейшем для нас будет важно существование не просто некоторой примитивно рекурсивной функции с заданными свойствами, а именно такого примитивно рекурсивного определения этой функции (а значит, и функционального символа для нее), которое позволяет доказать эти свойства в **НА**.

Отметим некоторые примитивно рекурсивные функции, играющие важную роль в дальнейших построениях.

1) Двуместная функция c, задающая взаимно однозначную нумерацию всех пар натуральных чисел, так что в **НА** выводима формула

$$\forall x \ \exists! y \exists!\, z \ x = c\,(y, z).$$

Условимся писать $\{x, y\}$ вместо $c\,(x, y)$.

2) Для любого $n \geqslant 1$ определяется n-местная примитивно рекурсивная функция ν_n, являющаяся взаимно однозначной нумерацией всех кортежей натуральных чисел длины n

$$\nu_1\,(x) = x;$$

$$\nu_{n+1}\,(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \{x_0, \nu_n\,(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Используя функции ν_n, можно задать взаимно однозначную нумерацию всех кортежей натуральных чисел: положим номер пустого кортежа равным 0, а через $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ будем обозначать номер кортежа, состоящего из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$,

$$\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle = S\,\{n, \nu_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Важнейшие свойства описанной нумерации кортежей выражаются в существовании следующих примитивно рекурсивных функций.

3) Одноместная функция lth такая, что $\mathrm{lth}\, x$ — длина кортежа с номером x.

4) Двуместная функция g, обладающая тем свойством, что если $x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $m \leqslant n$, то $g(x, m) = x_m$. Вместо $g(x, m)$ будем писать $(x)_m$.

Примитивно рекурсивные описания функций 1)— 4), а также доказательство выводимости в **НА** их основных свойств можно найти в работе [7].

5) Трехместная функция t, представляющая клиниевский предикат $T_1(x, y, z)$, т. е. $t(x, y, z) = 0$ тогда и только тогда, когда z есть гёделев номер протокола вычисления частично рекурсивной функции с гёделевым номером x на аргументе y. Вместо $t(x, y, z) = 0$ условимся писать $T(x, y, z)$. Из определения предиката $T_1(x, y, z)$ [8, § 57] немедленно следует, что в **НА** выводима формула

$$T(x, y, u) \mathbin{\&} T(x, y, v) \supset u = v. \tag{1}$$

6) Одноместная функция U, выделяющая результат вычисления $U(x) = y$, если y есть результат вычисления частично рекурсивной функции, протокол которого имеет гёделев номер x.

Предложение 1. *Какова бы ни была арифметическая формула $A(x)$, в* **НА** *выводима формула*

$$\neg\neg \exists y\, (\mathrm{lth}\, y = x \mathbin{\&} \forall z\, (z < x \supset ((y)_z = 0 \equiv A(z)))).$$

4. В монографии [8, § 74] описан метод устранения из формальных систем символов для функций и введения вместо них предикатных символов. Применим его к системе **НА**. А именно, пользуясь теоремой 43 из [8], построим систему **НА′**, которая получается из **НА** исключением каждого (скажем, n-местного) функционального символа f и принятием вместо него ($(n+1)$-местного) предикатного символа P_f. При этом, например, вместо 0-местного функционального символа 0 появится одноместный предикатный символ P_0, вместо одноместного функционального символа S — двуместный предикатный символ P_S, вместо двуместного функционального символа $+$ — трехместный предикатный символ P_+ и так далее. Предикатный символ $=$ заменим в системе **НА′** на двуместный предикатный символ E.

Исключение функциональных символов и замена их предикатными состоит в том, что по каждой арифметической формуле F

строится предикатная формула F', как в лемме 29 из [8], которую мы будем называть предикатной записью формулы F. Заметим, что если $x_1, \ldots, x_n, x, y$ — переменные, то $(0 = x)'$ есть $P_0(x)$; $(Sx = y)'$ есть $P_S(x, y)$ и, вообще, $(f(x_1, \ldots, x_n) = y)'$ есть $P_f(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Пусть F — произвольная формула в языке системы **НА′**. Через F^0 обозначим арифметическую формулу, полученную из F заменой в ней каждого вхождения подформулы вида $P_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ на $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ и $E(x, y)$ на $x = y$. Связь между системами **НА** и **НА′** состоит в том, что

1) каковы бы ни были арифметическая формула F и список арифметических формул Γ,

$$\mathbf{HA} \vdash F \equiv F'^0; \tag{I}$$

$$\mathbf{HA} + \Gamma \vdash F \Leftrightarrow \mathbf{HA}' + \Gamma' \vdash F'; \tag{II}$$

2) каковы бы ни бы и формула F и список формул Γ в языке системы **НА′**,

$$\mathbf{HA}' \vdash F \equiv F^{0\prime}; \tag{III}$$

$$\mathbf{HA}' + \Gamma \vdash F \Leftrightarrow \mathbf{HA} + \Gamma^0 \vdash F^0, \tag{IV}$$

где через Γ' и Γ^0 обозначаются списки, полученные применением к каждой формуле из Γ соответственно операций $'$ и ^{0}.

5. Теперь построим формальную систему, которую мы обозначим **СНА²**. Это будет теория первого порядка в языке, являющемся объединением языков систем **НА** и **НА′**. А именно, сигнатура языка системы **СНА²** содержит символы для всех примитивно рекурсивных функций, предикатные символы $=$ и E, а также предикатные символы, возникшие в системе **НА′** в результате устранения из **НА** символов для функций.

Постулаты системы **СНА²**.

I. Схемы аксиом и правила вывода интуиционистского исчисления предикатов.

II. Аксиомы системы **НА**.

III. Аксиомы системы **НА′**.

IV. Аксиомы равенства для каждого предикатного символа:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \, (x_1 = y_1 \,\&\, x_2 = y_2 \supset (E(x_1, x_2) \supset E(y_1, y_2))),$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n \forall y \, (x_1 = y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = y_n \,\&$$
$$\& \, x = y \supset (P_f(x_1, \ldots, x_n, x) \supset P_f(y_1, \ldots, y_n, y))$$

для любого n-местного ($n \geqslant 0$) функционального символа f системы **НА**.

V. Схема аксиом индукции

$$A(0) \,\&\, \forall x \, (A(x) \supset A(Sx)) \supset \forall x \, A(x). \tag{Ind}$$

VI. Формальный тезис Чёрча — схема аксиом

$$\forall x\, \exists y\, A\,(x, y) \supset \exists z\, \forall x\, \exists y\, (T\,(z, x, y)\, \&\, A\,(x, Uy)). \qquad \text{(CT)}$$

VII. Принцип Маркова — схема аксиом

$$\forall x\, (A \vee \neg A)\, \&\, \neg\neg \exists x\, A \supset \exists x\, A \qquad \text{(M)}$$

(в схемах Ind, CT, M A — произвольная формула языка системы **CHA**^{2}).

Поясним смысл обозначения **CHA**^{2}, принятого для введенной системы. Через **CHA** (Constructive Heyting Arithmetic) естественно обозначить формальную систему, полученную добавлением к **HA** схем аксиом CT и M. **CHA**^{2} — это, так сказать, система **CHA** «в квадрате», т. е. смешение двух экземпляров системы **CHA** — один в обычном, функциональном варианте, другой — в предикатном.

Система **CHA**^{2} непротиворечива относительно **HA**. Действительно, эта система погружается в **CHA** с помощью перевода, который каждую формулу F преобразует в арифметическую формулу F^0, полученную из F заменой в ней всюду элементарных подформул вида $P_f\,(t_1, \ldots, t_n, t)$ на $f\,(t_1, \ldots, t_n) = t$ и $E\,(t_1, t_2)$ на $t_1 = t_2$. Непротиворечивость же системы **CHA** (которая иначе обозначается **HA** + CT + M) относительно **HA** доказывается с помощью реализуемости (см., например, [9, 3.2.22(*ii*)]).

6. Следуя идее В. А. Варданяна [6], рассмотрим следующую формулу в языке системы **CHA**^{2}, которую обозначим $R\,(x, y)$:

$$\exists z\, (\mathrm{lth}\, z = Sx\, \&\, P_0\,((z)_0)\, \&\, \forall u\, (u < x \supset P_S\,((z)_n, (z)_{Su}))\, \&\, \& \,(z)_x = y).$$

Предложение 2. *В системе* **CHA**^{2} *выводимы следующие формулы*

$$R\,(0, x) \equiv P_0\,(x); \qquad (2)$$

$$R\,(Sx, y) \equiv \exists z\, (R\,(x, z)\, \&\, P_S\,(z, y)); \qquad (3)$$

$$R\,(x, y) \supset (R\,(x, z) \supset E\,(y, z)); \qquad (4)$$

$$R\,(x, y) \vee \neg R\,(x, y); \qquad (5)$$

$$\exists y\, R\,(x, y); \qquad (6)$$

$$R\,(x, z) \supset (R\,(y, z) \supset x = y). \qquad (7)$$

Условимся о некоторых обозначениях. Через **x** и **y** будем обозначать списки переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$. Через $R\,(\mathbf{x},)$ обозначим формулу $R\,(x_1, y_1)\, \&\, \ldots \&\, R\,(x_n, y_n)$. Вместо $\forall x_1, \ldots \ldots \forall x_n$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_n$ будем писать $\forall \mathbf{x}$ и $\forall \mathbf{y}$.

Предложение 3. *Каков бы ни был n-местный ($n \geqslant 0$) функциональный символ f языка системы* **HA**, *в системе* **CHA**^{2} *выводима формула*

$$R\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \&\, R\,(x, y) \supset (f\,(\mathbf{x}) = x \equiv P_f\,(\mathbf{y}, y)).$$

Это утверждение доказывается индукцией по построению функционального символа f с использованием предложения 2.

Предложение 4. *Какова бы ни была элементарная арифметическая формула F (x), в системе* **СНА**^{2} *выводима формула*

$$R(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \supset (F(\mathbf{x}) \equiv F'(\mathbf{y})).$$

В системе **НА** каждая бескванторная арифметическая формула эквивалентна некоторой элементарной арифметической формуле (см. [9, 1.6.14]), поэтому предложение 4 может быть немедленно усилено следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Какова бы ни была бескванторная арифметическая формула F (x), в системе* **СНА**^{2} *выводима формула*

$$R(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \supset (F(\mathbf{x}) \equiv F'(\mathbf{y})).$$

ТЕОРЕМА 2. *Какова бы ни была бескванторная арифметическая формула F (u, x), в системе* **СНА**^{2} *выводима формула*

$$R(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \supset (\exists u\, F(u,\ \mathbf{x}) \supset \exists\, u\, F'(u,\ \mathbf{y})).$$

Ключевой во всех наших построениях является следующая

ТЕОРЕМА 3. *В системе* **СНА**^{2} *выводима формула*

$$\forall x\, \exists y\, R(x,\ y).$$

Эта теорема по существу является формализацией теоремы Тенненбаума. Опуская рутинную часть доказательства, наметим лишь основные его этапы.

Через $x <' y$ обозначим предикатную запись арифметической формулы $x < y$.

ЛЕММА 1. *В системе* **СНА**^{2} *выводима формула*

$$R(x,\ y)\ \&\ \forall u \neg R(u,\ \mathrm{z}) \supset y <' \mathrm{z}.$$

Через $A(x)$ обозначим арифметическую формулу $\exists y\,(T(x, x, y)\ \&$ $\&\ Uy = 0)$. Применяя теорему 2, получаем, что в системе **СНА**^{2} выводима формула

$$R(x,\ \mathrm{z}) \supset (A(x) \supset A'(\mathrm{z})). \tag{8}$$

ЛЕММА 2. *В системе* **СНА**^{2} *выводима формула*

$$R(x,\ \mathrm{z}) \supset (\exists y\,(T(x,\ x,\ y)\ \&\ \neg Uy = 0) \supset \neg A'(\mathrm{z})).$$

Доказательство этой леммы использует теорему 2, выводимость в **НА** формулы (1), а также связь между системами **НА** и **НА**$'$ (см. (I)—(IV)).

В силу предложения 1 в **НА** выводима формула

$$\neg\neg\exists y\,(\mathrm{lth}\, y = x\ \&\ \forall \mathrm{z}\ \ (\mathrm{z} < x \supset ((y)_{\mathrm{z}} = 0 \equiv A(\mathrm{z})))), \tag{9}$$

в **НА**$'$ выводима ее придикатная запись, и обе они выводимы в **СНА**^{2}.

Теперь заметим, что для доказательства теоремы 3 достаточно в **СНА**^{2} вывести противоречие из гипотезы $\forall y \neg R(y, x)$. Действительно, в этом случае в **СНА**^{2} выводима формула $\neg\neg\exists y\, R(y,\ x)$, откуда с помощью выводимой формулы (5) и схемы аксиом M выводится $\exists y\ R\ (y,\ x)$, а значит и $\forall x\ \exists y\ R\ (y,\ x)$.

Чтобы привести к противоречию гипотезу $\forall y\ \neg R\ (y,\ x)$, в силу выводимости в **СНА**^{2} предикатной записи формулы (9), достаточно вывести противоречие из списка

$$\forall y\ \neg R\ (y,\ x),\ (\exists y\ (\mathrm{lth}\ y = x\ \&\ \forall z\ (z < x \supset ((y)_z = 0 \equiv A\ (z)))))'.$$

Для доказательства противоречивости этого списка достаточно вывести противоречие из списка

$$\forall y\ \neg R\ (y,\ x),\ (\mathrm{lth}\ u = x\ \&\ \forall z\ (z < x \supset ((u)_z = 0 \equiv A\ (z))))'$$

и даже из списка

$$\forall y\ \neg R\ (y,\ x),\ (\forall z\ (z < x \supset ((u)_z = 0 \equiv A\ (z))))',$$

т. е. из списка

$$\forall y\ \neg R\ (y,\ x),\ \forall z\ (z <\ 'x \supset (((u)_z = 0)' \equiv A'\ (z))).$$

В дальнейшем этот список будем обозначать через Г.

В силу леммы 1 в **СНА**^{2} имеет место

$$R\ (v,\ z),\ \forall y\ \neg R\ (y,\ x) \vdash z <\ 'x,$$

поэтому

$$\Gamma,\ R\ (v,\ z) \vdash ((u)_z = 0)' \equiv A'\ (z). \tag{10}$$

Поскольку в **НА** выводима формула $F \vee \neg F$, какова бы ни была элементарная формула F, то в **СНА**^{2} выводима формула $((u)_z = 0)' \vee \neg ((u)_z = 0)'$. Поэтому из (10) немедленно следует, что

$$\Gamma,\ R\ (v,\ z) \vdash A'\ (z) \vee \neg A'\ (z) \text{ и}$$

$$\Gamma,\ R\ (v,\ z) \vdash \exists a\ ((A'\ (z) \supset \neg a = 0)\ \&\ (\neg A'\ (z) \supset a = 0)). \tag{11}$$

Из выводимости в **СНА**^{2} формулы (8) и леммы 2 получаем, что

$$\Gamma,\ R\ (v,\ z) \vdash \exists w\ (T\ (v,\ v,\ w)\ \&\ Uw = 0) \supset A'\ (z); \tag{12}$$

$$\Gamma,\ R\ (v,\ z) \vdash \exists w\ (T\ (v,\ v,\ w)\ \&\ \neg\ Uw = 0) \supset \neg\ A'\ (z). \tag{13}$$

Из (11)—(13) следует, что из списка Г, $R\ (v,\ z)$ выводима формула

$$\exists a\ ((\exists w\ (T\ (v,\ v,\ w)\ \&\ Uw = 0) \supset \neg\ a = 0)\ \&$$
$$\&\ (\exists w\ (T\ (v,\ v,\ w)\ \&\ \neg\ Uw = 0) \supset a = 0)). \tag{14}$$

Так как формула (14) не содержит свободно переменную z, она выводима из списка Г, $\exists z\ R\ (v,\ z)$ и даже из списка Г, поскольку **СНА**$^2 \vdash \exists z\ R\ (v,\ z)$ (см. (6), предложение 2). Поскольку переменная v не входит свободно в формулы из списка Г, имеем

$$\Gamma \vdash \forall v\ \exists a\ ((\exists w\ (T\ (v,\ v,\ w)\ \&\ Uw = 0) \supset \neg\ a = 0)\ \&$$
$$\&\ (\exists w\ (T\ (v,\ v,\ w)\ \&\ \neg\ Uw = 0) \supset a = 0)).$$

Применяя схему аксиом CT, получаем

$$\Gamma \vdash \exists e \forall v \exists u (T(e, v, u) \& ((\exists w (T(v, v, w) \& \& Uw = 0) \supset \neg Uu = 0) \& (\exists w (T(v, v, w) \& \& \neg Uw = 0) \supset Uu = 0))). \quad (15)$$

Используя выводимость формулы (1), легко чисто логическими средствами вывести противоречие из формулы

$$\exists u (T(e, e, u) \& (\exists w (T(e, e, w) \& Uw = 0) \supset \supset \neg Uu = 0) \& (\exists w (T(e, e, w) \& \neg Uw = 0) \supset Uu = 0)).$$

Учитывая (15), можно заключить, что противоречие выводится и из списка Γ. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Какова бы ни была арифметическая формула* $F(\mathbf{x})$, *в системе* $\mathbf{CHA}^2$ *выводима формула*

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \supset (F(\mathrm{x}) \equiv F'(y))).$$

Следствие. *Если* F — *замкнутая арифметическая формула, то* $\mathbf{CHA}^2 \vdash F \equiv F'$.

7. Кратко наметим пути использования проведенных выше построений для исследования предикатных логик, основанных на конструктивных семантиках языка формальной арифметики. При этом мы будем говорить, что задана конструктивная семантика языка формальной арифметики, если все формулы, выводимые в системе **CHA** (т. е. **HA** + CT + M), истинны в этой семантике. Соответственно, конструктивной арифметической теорией назовем произвольный класс арифметических формул, замкнутый относительно выводимости в **CHA**.

Пусть **T** — конструктивная арифметическая теория. Предикатную формулу $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n)$, содержащую лишь предикатные переменные $P_1, \ldots, P_n$, назовем **T**-общезначимой, если каковы бы ни были арифметические формулы $F_1, \ldots, F_n$, формула $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_n)$, полученная подстановкой в $\mathfrak{A}$ формул $F_1, \ldots, F_n$ вместо $P_1, \ldots, P_n$, принадлежит теории **T**. Множество всех **T**-общезначимых предикатных формул обозначим $L(\mathbf{T})$. Это, так сказать, логика теории **T**, т. е. совокупность всех логических законов, действующих в рамках теории **T**.

ТЕОРЕМА 5. *По любой замкнутой арифметической формуле* F *можно эффективно построить замкнутую предикатную формулу* F^* *такую, что какова бы ни была конструктивная теория* **T**, *формула* F *принадлежит теории* T *тогда и только тогда, когда* $F^* \in L(\mathbf{T})$.

Доказательство. Пусть F — произвольная замкнутая арифметическая формула, F' — ее предикатная запись. В силу следствия из теоремы 4 существует вывод формулы $F \equiv F'$ в системе $\mathbf{CHA}^2$. Обозначим через Q конъюнкцию всех аксиом группы III, входящих в этот вывод. В силу теоремы о дедукции формула

$Q \supset (F \equiv F')$ выводима в системе $\mathbf{CHA}^{2-}$, полученной из $\mathbf{CHA}^2$ удалением аксиом группы III. Положим $F^* \rightleftharpoons Q \supset F'$. Все предикатные символы, входящие в формулы Q и F', будем рассматривать как предикатные переменные. Тогда F^* — предикатная формула. Докажем, что она обладает нужными свойствами, а именно, $F^* \in L(\mathbf{T}) \Leftrightarrow F \in \mathbf{T}$.

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — все предикатные переменные, входящие в формулу F^*. В дальнейшем будем обозначать ее также $F^*(P_1, \ldots, P_n)$.

1) Докажем, что если $F \in \mathbf{T}$, то $F^* \in L(\mathbf{T})$.

Итак, пусть $F \in \mathbf{T}$ и $F_1, \ldots, F_n$ — произвольная система арифметических формул. Докажем, что $F^*(F_1, \ldots, F_n) \in \mathbf{T}$. Действительно, поскольку $\mathbf{CHA}^{2-} \vdash Q \supset (F \equiv F')$, то $\mathbf{CHA}^{2-} \vdash F \supset (Q \supset F')$, т. е. $\mathbf{CHA}^{2-} \vdash F \supset F^*$. Всюду в выводе формулы $F \supset F^*$ в системе $\mathbf{CHA}^{2-}$ заменим предикатные символы $P_1, \ldots, P_n$ на арифметические формулы $F_1, \ldots, F_n$, а все другие встречающиеся в нем предикатные символы — на произвольные арифметические формулы. Тогда, очевидно, мы получим вывод формулы $F \supset F^*(F_1, \ldots, F_n)$ в системе $\mathbf{CHA}$. Так как $F \in \mathbf{T}$ и $\mathbf{T}$ — конструктивная теория, то $F^*(F_1, \ldots, F_n) \in \mathbf{T}$. Это рассуждение доказывает, что $F^* \in L(\mathbf{T})$.

2) Докажем, что если $F^* \in L(\mathbf{T})$, то $F \in \mathbf{T}$.

Пусть $F^* \in L(\mathbf{T})$. Очевидно, что F^* есть формула в языке системы $\mathbf{HA}'$, и для нее определена арифметическая формула F^{*0}, которая имеет вид $F^*(F_1, \ldots, F_n)$ для подходящих $F_1, \ldots, F_n$, причем $F^{*0} \in \mathbf{T}$. Заметим также, что $\mathbf{CHA}^{2-} \vdash F^* \supset F$. Рассуждая, как в случае 1), получаем, что $\mathbf{CHA} \vdash F^{*0} \supset F$. Отсюда немедленно следует, что $F \in \mathbf{T}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия этой теоремы.

ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была конструктивная арифметическая теория* $\mathbf{T}$ $\mathbf{T} \leqslant_1 L(\mathbf{T})$.

Здесь $\mathbf{T} \leqslant_1 L(\mathbf{T})$ означает, что множество гёделевых номеров формул теории $\mathbf{T}$ 1-сводится к множеству гёделевых номеров $\mathbf{T}$-общезначимых предикатных формул.

Это утверждение немедленно следует из доказательства теоремы 5. Оно означает, что логика конструктивной арифметической теории $\mathbf{T}$ устроена не проще, чем сама теория $\mathbf{T}$.

ТЕОРЕМА 7. *Структура конструктивных арифметических теорий с отношением включения* $\subseteq$ *изоморфна структуре предикатных логик вида* $L(\mathbf{T})$, *где* $\mathbf{T}$ — *конструктивная арифметическая теория, с отношением* $\subseteq$.

Доказательство. Изоморфизм между указанными структурами устанавливает отображение, сопоставляющее каждой конструктивной теории $\mathbf{T}$ предикатную логику $L(\mathbf{T})$. Это отображение является взаимно однозначным. Действительно, если $\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{T}_2$, то существует арифметическая формула F такая, что, скажем, $F \in \mathbf{T}_1$ и $F \notin \mathbf{T}_2$. Тогда в силу теоремы 5 $F^* \in L(\mathbf{T}_1)$ и $F^* \notin L(\mathbf{T}_2)$, т. е. $L(\mathbf{T}_1) \neq L(\mathbf{T}_2)$. Из определения логики $L(\mathbf{T})$ немедленно следует, что если $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_2$, то $L(\mathbf{T}_1) \subseteq L(\mathbf{T}_2)$.

8. Использование в наших построениях именно формальной системы арифметики в языке с символами для всех примитивно рекурсивных функций связано лишь с техническими удобствами этого языка. В силу известных результатов об элиминируемости этих символов все доказанные здесь теоремы могут быть соответствующим образом переформулированы и доказаны для обычной системы интуиционистской арифметики, в языке, сигнатура которого содержит лишь символы 0, S, $+$, $\cdot$.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
18.03.88
Переработанный вариант
23.03.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Tennenbaum S. Non archimedean systems of arithmetic // Notices Amer. Math. Soc. 1959. V. 6, N 3. P. 270—283.
[2] Scott D. On a theorem of Rabin // Indag. Math. 1960. V. 22, N 5. P. 481—484.
[3] Плиско В. Е. О реализуемых предикатных формулах // ДАН СССР. 1973. Т. 212, № 3. С. 553—556.
[4] Плиско В. Е. Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 3. С. 483—502.
[5] Артемов С. Н. Неарифметичность истинностных предикатных логик доказуемости // ДАН СССР. 1985. Т. 284, № 2. С. 270—271.
[6] Варданян В. А. О предикатной логике доказуемости / Препринт. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1985.
[7] Kreisel G., Troelstra A. S. Formal systems for some branches of intuitionistic analysis // Ann. Math. Log. 1970. V. 1, N 3. P. 229—387.
[8] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
[9] Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis / Ed. Troelstra A. S. // Lect. Notes. in Math. V. 344. Berlin: Springer-Verlag, 1973. P. 1—485.