A. P. Oskolkov, On the theory of Maxwell liquids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 101, 119–127

А.П.Осколков

К ТЕОРИИ ЖИДКОСТЕЙ МАКСВЕЛЛА

Одним из основных встречающихся на практике классов неньютоновских жидкостей являются линейные вязкоупругие жидкости с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации $\{\lambda_\ell\}$, $\ell=1,\dots,L$, и времен запаздывания $\{\varkappa_m \nu^{-1}\}$, $m=1,\dots,M$ [I]-[4]. Реологическое уравнение таких жидкостей, связывающее девиатор тензора напряжений σ и тензор скоростей деформаций D, имеет вид [I]-[4]:

$$\left(1+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\right)\sigma=2\nu\left(1+\sum_{m=1}^{M}\varkappa_m\nu^{-1}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\right)D. \qquad (I)$$

Простейшими из таких жидкостей являются жидкости Максвелла [I],[5], для которых $L=1$, $M=0$, и жидкости Фойгта [I], для которых $L=0$, $M=1$. Жидкости Максвелла характеризуются экспоненциальным ослаблением напряжения при неизменной деформации – напряжения в них после прекращения движения уменьшаются как e^{-t/λ_1}. Жидкости Фойгта характеризуются экспоненциальным ослаблением запаздывающей деформации, вызванной постоянным напряжением: $\frac{\partial D}{\partial t}=(2\varkappa_1)^{-1}e^{-\frac{\nu t}{\varkappa_1}}\cdot\sigma$ [I].

Нестационарные течения линейных вязкоупругих жидкостей при условиях: $M=L$, $L+1$, $L=1,2,\dots$ исследованы в работах автора [6]-[8]. В настоящей работе мы изучим нестационарные течения обобщенных жидкостей Максвелла, которые подчиняются реологическому уравнению (I) с $M=L-1$, $L=1,2,\dots$.

Дифференцируя ℓ раз по t, $\ell=1,\dots,L$, уравнения сплошной несжимаемой среды в форме Коши:

$$\frac{d\vec{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}p=\operatorname{div}\sigma+\vec{f},\quad \operatorname{div}\vec{v}=0,\quad \frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad (2)$$

умножая результирующее уравнение на λ_ℓ, суммируя по $\ell=1,\dots,L$, используя реологическое уравнение (I) с $M=L-1$ и пренебрегая, как это принято в механике, произведениями производных $\frac{\partial^{\ell-i}v_k}{\partial t^{\ell-i}}\cdot\frac{\partial^{i+1}\vec{v}}{\partial t^i\partial x_k}$, $i=0,1,\dots,\ell-1$; $\ell=1,\dots,L$, получим уравнения движения обобщенных жидкостей Максвелла (ср. [8]):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}}{\partial t^\ell}\right)+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\vec{v}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}}{\partial t^\ell}\right)-\sum_{m=0}^{L-1}\varkappa_m\frac{\partial^m\Delta\vec{v}}{\partial t^m}+$$

$$+\operatorname{grad}\mathcal{P}=\vec{F},\ \operatorname{div}\vec{v}=0,\quad \varkappa_0\equiv\nu,\quad L=1,2,\dots. \tag{3}$$

Предположим, что коэффициенты $\{\lambda_\ell\}$ и $\{\varkappa_m\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_\ell,\varkappa_m\geqslant 0,\ \ell=1,\dots L-1;\ m=1,\dots,L-2;\ \varkappa_0,\varkappa_{L-1},\lambda_L>0, \tag{4}$$

и будем решать систему (3),(4) в $Q_T=\Omega\times(0,T)$, Ω - ограниченная область из E^n , $n=2,3$, $0<T<\infty$, при начально-краевых условиях:

$$\left.\frac{\partial^s\vec{v}}{\partial t^s}\right|_{t=0}=\vec{v}_{0s}(x),\quad x\in\Omega,\ s=0,1,\dots,L;\ \left.\vec{v}\right|_{\partial Q_T}=0. \tag{5}$$

Назовем слабым решением (решением в смысле Э.Хопфа [9],[8]) начально-краевой задачи (3)-(5) функцию $\vec{v}(x,t)\in\mathring{J}(\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, у которой $\frac{\partial^{L-1}\vec{v}_x}{\partial t^{L-1}}\in L_2(Q_T)$, $\frac{\partial^L\vec{v}}{\partial t^L}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и производная $\frac{\partial^L\vec{v}}{\partial t^L}$ слабо непрерывна по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$, которая удовлетворяет начальным условиям $\left.\frac{\partial^s\vec{v}}{\partial t^s}\right|_{t=0}=\vec{v}_{0s}(x)$, $x\in\Omega$, $s=0,1,\dots,L-1$, и удовлетворяет при $0<t\leqslant T$ интегральному тождеству

$$\iint_{Q_t}\left[\left(\vec{v}_t+\sum_{\ell=1}^{L-1}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell+1}\vec{v}}{\partial t^{\ell+1}}\right)\vec{\Phi}-\lambda_L\frac{\partial^L\vec{v}}{\partial t^L}\vec{\Phi}_t-v_k\left(\vec{v}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}}{\partial t^\ell}\right)\vec{\Phi}_{x_k}+\right.$$

$$\left.+\vec{\Phi}_x\sum_{m=0}^{L-1}\varkappa_m\frac{\partial^m\vec{v}_x}{\partial t^m}\right]dx\,dt+\lambda_L\int_\Omega\frac{\partial^L\vec{v}}{\partial t^L}(x,t)\vec{\Phi}\,dx=\iint_{Q_t}\vec{F}\vec{\Phi}\,dx\,dt+ \tag{6}$$

$$+\lambda_L\int_\Omega\vec{v}_{0,L}(x)\vec{\Phi}(x,0)\,dx$$

при $\forall \vec{\Phi}(x,t)$: $\vec{\Phi}(x,t)\in H(\Omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $\iint\limits_{Q_T}\vec{\Phi}_t^2\,dx\,dt<\infty$.

Основной результат настоящей заметки – теорема существования "в целом" слабого решения начально-краевой задачи (3)-(5).

ТЕОРЕМА I. Пусть $\vec{F}\in L_2(Q_T)$, $\vec{v}_{0s}(x)\in H(\Omega)$, $s=0,1,\ldots,L$. Тогда начально-краевая задача (3)-(5) при $\forall T<\infty$ имеет по крайней мере одно слабое решение $\vec{v}(x,t)$, и для любого такого решения имеет место оценка:

$$\left\|\frac{\partial^{L-1}\vec{v}_x}{\partial t^{L-1}}\right\|_{2,Q_T}+\left\|\frac{\partial^{L}\vec{v}}{\partial t^{L}}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leqslant C_1\left(\|\vec{F}\|_{2,Q_T};\ \|\vec{v}_{0s}\|^{(1)}_{2,\Omega};\ T\right). \qquad (7)$$

Слабое решение начально-краевой задачи (3)-(5), для которого конечна

$$\sum_{\ell=0}^{L}\max_{Q_T}\left|\frac{\partial^{\ell}\vec{v}_x}{\partial t^{\ell}}\right|\equiv C_2<\infty, \qquad (8)$$

единственно.

Для доказательства единственности слабого решения задачи (3)-(5), удовлетворяющего условию (8), отметим, что разность $\vec{\omega}\equiv\vec{v}^{(1)}-\vec{v}^{(2)}$ двух возможных слабых решений задачи (3)-(5) при условиях (8) удовлетворяет при $0<t<T$ равенству (ср.[6]):

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\vec{\omega}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{\omega}}{\partial t^\ell}\right)^2+\varkappa_1\vec{\omega}_x^2+\sum_{m=0}^{L-1}\varkappa_m\lambda_{m+1}\left(\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\right)^2+\sum_{m=1}^{L-2}\lambda_m\varkappa_{m+1}\left(\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\right)^2\right]dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_t}\left[\varkappa_0\vec{\omega}_x^2+\sum_{m=1}^{L-1}\lambda_m\varkappa_m\left(\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\right)^2\right]dx\,dt=-\lambda_L\sum_{m=0}^{L-2}\varkappa_m\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^{L-1}\vec{\omega}_x}{\partial t^{L-1}}\,\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\,dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_t}\left[\lambda_\ell\sum_{m=0}^{L-2}\varkappa_m\frac{\partial^{L-1}\vec{\omega}_x}{\partial t^{L-1}}\,\frac{\partial^{m+1}\vec{\omega}_x}{\partial t^{m+1}}-\vec{\omega}_x\sum_{m=2}^{L-1}\varkappa_m\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}-\sum_{m=0}^{L-1}\sum_{\ell=1}^{L-1}\lambda_\ell\varkappa_m\frac{\partial^\ell\vec{\omega}_x}{\partial t^\ell}\,\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}+\right.$$

$$\ell\neq m,\ \ell\neq m+1,\ m\neq\ell+1$$

$$+\omega_k\left(\vec{\omega}+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^l\vec{\omega}}{\partial t^l}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\vec{v}^{(2)}+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^l\vec{v}^{(2)}}{\partial t^l}\right)\Bigg]dx\,dt. \qquad (9)$$

Из равенства (9), применяя неравенства Гельдера, Коши, Фридрихса и очевидное неравенство

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\right|^2dx\leqslant C_3(L,T)\iint_{Q_T}\left|\frac{\partial^{L-1}\vec{\omega}_x}{\partial t^{L-1}}\right|^2dx\,dt,\ m=0,1,\dots,L-2;\ 0<t\leqslant T,$$

и используя условие (8), получим дифференциальное неравенство:

$$\int_\Omega\left[\left(\vec{\omega}+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^l\vec{\omega}}{\partial t^l}\right)^2+\sum_{m=0}^{L-1}\left(\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\right)^2\right]dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4(C_2,L,T)\iint_{Q_T}\left[\left(\vec{\omega}+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^l\vec{\omega}}{\partial t^l}\right)^2+\sum_{m=0}^{L-1}\left(\frac{\partial^m\vec{\omega}_x}{\partial t^m}\right)^2\right]dx\,dt, \quad 0<t\leqslant T, \qquad (10)$$

из которого, пользуясь тем, что $\left.\frac{\partial^s\vec{\omega}}{\partial t^s}\right|_{t=0}=0,\ s=0,1,\dots,L$, получим $\vec{\omega}(x,t)\equiv 0$.

Для доказательства слабой разрешимости задачи (3)-(5) воспользуемся методом Галеркина ([9], [6]-[8]). Пусть $\{\vec{\varphi}_k(x)\}, k=1,2,\dots$ - фундаментальная в $H(\Omega)$ система функций, ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Известно, что тогда для $\forall\,\vec{v}_{0s}(x)\in H(\Omega),\ s=0,1,\dots,L$, найдется такая последовательность функций

$$\vec{v}_{0s}^{(n)}(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}C_{kn}^{0s}\,\vec{\varphi}_k(x),\quad s=0,1,\dots,L;\quad n=1,2,\dots, \qquad (11)$$

что при $n\longrightarrow\infty$

$$\left\|\vec{v}_{0s}^{(n)}-\vec{v}_{0s}\right\|_{2,\Omega}^{(1)}\longrightarrow 0,\quad s=0,1,\dots,L. \qquad (12)$$

Будем искать приближенное решение $\vec{v}^{\,n}(x,t)$ задачи (3)-(5) в виде

$$\vec{v}^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t)\vec{\varphi}_k(x), \quad n=1,2,\dots, \tag{I3}$$

где функции $C_{kn}(t)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^n+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^n}{\partial t^\ell}\right)+v_k^n\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\vec{v}^n+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^n}{\partial t^\ell}\right)\right]\vec{\varphi}_r(x)dx+$$

$$+\sum_{m=0}^{L-1}\varkappa_m\int_\Omega\frac{\partial^m\vec{v}_x^n}{\partial t^m}\vec{\varphi}_{rx}dx=\int_\Omega\vec{F}\vec{\varphi}_r dx,$$

$$r=1,\dots,n; \quad t>0, \tag{I4}$$

и начальных условий Коши

$$\left.\frac{d^sC_{rn}}{dt^s}\right|_{t=0}=C_{rn}^{0s}, \quad s=0,1,\dots,L; \quad r=1,\dots,n. \tag{I5}$$

Умножим r-ое уравнение (I4) на $C_{rn}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{d^\ell C_{rn}}{dt^\ell}$ и просуммируем по $r=1,\dots,n$. Используя очевидное равенство

$$\int_\Omega v_k^n\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\vec{v}^n+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^n}{\partial t^\ell}\right)^2dx=0; \quad 0<t\leqslant T, \tag{I6}$$

интегрируя по t от 0 до $t\leqslant T$, интегрируя по частям по x-ам и t и используя начальные условия Коши (I5), (II), получим для $\{\vec{v}^n\}$ равенство (ср. (9)):

$$\int_\Omega\left[\left(\vec{v}^n+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^n}{\partial t^\ell}\right)^2+\varkappa_1\vec{v}_x^{n^2}+\sum_{m=0}^{L-1}\varkappa_m\lambda_{m+1}\left(\frac{\partial^m\vec{v}_x^n}{\partial t^m}\right)^2+\sum_{m=1}^{L-2}\lambda_m\varkappa_{m+1}\left(\frac{\partial^m\vec{v}_x^n}{\partial t^m}\right)^2\right]dx+$$

$$+\iint_{Q_t}\left[\varkappa_0\vec{v}_x^{n^2}+\sum_{m=1}^{L-1}\lambda_m\varkappa_m\left(\frac{\partial^m\vec{v}_x^n}{\partial t^m}\right)^2\right]dxdt=\int_\Omega\left[\vec{v}_{00}^{(n)}(x)+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\vec{v}_{0\ell}^{(n)}(x)\right]^2dx+$$

$$+\lambda_L\int\limits_{\Omega}\left[\vec{v}^{(n)}_{0,L-1}(x)\right]_x\sum_{m=0}^{L-2}æ_m\left[\vec{v}^{(n)}_{0m}\right]_x dx-\lambda_L\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^{L-1}\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^{L-1}}\sum_{m=0}^{L-2}æ_m\frac{\partial^m\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^m}dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_t}\Big[\lambda_L\frac{\partial^{L-1}\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^{L-1}}\sum_{m=0}^{L-2}æ_m\frac{\partial^{m+1}\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^{m+1}}-\vec{v}^{\,n}_x\sum_{m=2}^{L-1}æ_m\frac{\partial^m\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^m}-$$

$$-\sum_{\substack{m=0\\ \ell\neq m,\,\ell\neq m+1,\,m\neq\ell+1}}^{L-1}\sum_{\ell=1}^{L-1}\lambda_\ell æ_m\frac{\partial^\ell\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^\ell}\frac{\partial^m\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^m}+\vec{F}\Big(\vec{v}^{\,n}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^{\,n}}{\partial t^\ell}\Big)\Big]dx\,dt,$$

$$t>0,\quad n=1,2,\dots\,. \tag{17}$$

Из равенства (17), применяя неравенства Гельдера и Коши и используя неравенства:

$$\left\|\vec{v}^{(n)}_{0s}\right\|^{(1)}_{2,\Omega}\leqslant C_5\left\|\vec{v}_{0s}\right\|^{(1)}_{2,\Omega},\quad n=1,2,\dots;\quad s=0,1,\dots,L; \tag{18}$$

$$\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial^m\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^m}\right|^2dx\leqslant C_6(L,\Omega,T)\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial^{L-1}\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^{L-1}}\right|^2dx\,dt+$$

$$+C_7\left(L,T,\left\|\vec{v}_{0s}\right\|^{(1)}_{2,\Omega}\right),\quad m=0,1,\dots,L-2,\qquad n=1,2,\dots, \tag{19}$$

получим неравенство (ср.(10)):

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{\ell=0}^{L}\Big(\frac{\partial^\ell\vec{v}^{\,n}}{\partial t^\ell}\Big)^2+\sum_{\ell=0}^{L-1}\Big(\frac{\partial^\ell\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^\ell}\Big)^2\Big]dx\leqslant C_8(C_6)\iint\limits_{Q_T}\Big[\sum_{\ell=0}^{L}\Big(\frac{\partial^\ell\vec{v}^{\,n}}{\partial t^\ell}\Big)+$$

$$+\sum_{\ell=0}^{L-1}\Big(\frac{\partial^\ell\vec{v}^{\,n}_x}{\partial t^\ell}\Big)^2\Big]dx\,dt+C_9\iint\limits_{Q_T}\vec{F}^2dx\,dt+C_{10}\left(C_7,\left\|\vec{v}_{0s}\right\|^{(1)}_{2,\Omega}\right),$$

$$t>0,\quad n=1,2,\dots, \tag{20}$$

а из неравенства (20), используя лемму Гронуолла [9], получим априорную оценку для галеркинских приближений $\{\vec{v}^n\}$:

$$\|\vec{v}^n\|^2_{W^{L-1}_\infty(0,T;H(\Omega))}+\left\|\frac{\partial^L\vec{v}^n}{\partial t^L}\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leq C_{11}\left(\|\vec{F}\|_{2,Q_T};\|\vec{v}_{0s}\|^{(1)}_{2,\Omega};T\right), \tag{21}$$

$$n=1,2,\ldots .$$

Из оценки (21) следует прежде всего, что галеркинские приближения $\{\vec{v}^n\}$ можно построить, и притом однозначно, при каждом $n=1,2,\ldots$ и $\forall T<\infty$.

Далее, из оценки (21) и теоремы о слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве следует, что из $\{\vec{v}^n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\vec{v}^{n_p}\}$, которая сходится к предельной функции $\vec{v}$ слабо в $L_2(Q_T)$, а производные $\left\{\frac{\partial^s\vec{v}^{n_p}}{\partial t^s}\right\}$, $s=1,\ldots,L$ и производные $\left\{\frac{\partial^s\vec{v}^{n_p}_x}{\partial t^s}\right\}$, $s=0,1,\ldots,L-1$, сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к производным $\frac{\partial^s\vec{v}}{\partial t^s}$, $s=1,\ldots,L$ и производным $\frac{\partial^s\vec{v}_x}{\partial t^s}$, $s=0,1,\ldots,L-1$ соответственно. Кроме того, предельная функция $\vec{v}$ удовлетворяет условиям: $\operatorname{div}\vec{v}=0$ и $\vec{v}\big|_{\partial Q_T}=0$.

Покажем, что производные $\left\{\frac{\partial^L\vec{v}^{n_p}}{\partial t^L}\right\}$ сходятся к $\frac{\partial^L\vec{v}}{\partial t^L}$ слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$ и $\frac{\partial^L\vec{v}}{\partial t^L}$ слабо непрерывна по $t\in[0,T]$ в $L_2(\Omega)$. Для этого достаточно доказать (см. [9]), что функции $\psi_{n_p,r}(t)\equiv\left(\frac{\partial^L\vec{v}^{n_p}}{\partial t^L},\vec{\varphi}_r\right)_{2,\Omega}$ при фиксированном r и $n_p\geq r$ образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное на $[0,T]$ семейство функций. Равномерная ограниченность $\{\psi_{n_p,r}\}$ следует сразу из оценки (21):

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\psi_{n_p,r}(t)\right|\leq C_{11}^{1/2}. \tag{22}$$

Для доказательства равностепенной непрерывности $\{\psi_{n_p,r}(t)\}$ перепишем уравнения (14) следующим образом:

$$\lambda_L\frac{d\psi_{n_p,r}}{dt}=-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{n_p}+\sum_{\ell=1}^{L-1}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^{n_p}}{\partial t^\ell}\right)\vec{\varphi}_r\,dx-\int_\Omega v_k^{n_p}\left(\vec{v}^{n_p}+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\vec{v}^{n_p}}{\partial t^\ell}\right)\vec{\varphi}_{r\,x_k}dx-$$

$$-\sum_{m=0}^{L-1} \varkappa_m \int_\Omega \frac{\partial^m \vec{v}_x^{\,n_p}}{\partial t^m} \vec{\varphi}_{rx} dx - \int_\Omega \vec{F} \vec{\varphi}_r \, dx, \quad t > 0, \; n_p \geqslant r, \tag{23}$$

проинтегрируем (23) по t от t до $t+\Delta t$ и затем оценим правую часть с помощью неравенства Гельдера и оценки (2I):

$$\left| \psi_{n_p,r}(t+\Delta t) - \psi_{n_p,r}(t) \right| \leqslant C_{12} \Bigg[\int_t^{t+\Delta t} \sum_{l=1}^{L} \left\| \frac{\partial^l \vec{v}^{\,n_p}}{\partial t^l} \right\|_{2,\Omega} dt \; +$$

$$+ \left\| \vec{\varphi}_{rx} \right\|_{2,\Omega} \int_t^{t+\Delta t} \sum_{m=0}^{L-1} \left\| \frac{\partial^m \vec{v}_x^{\,n_p}}{\partial t^m} \right\|_{2,\Omega} dt + \max_\Omega \left| \vec{\varphi}_{rx} \right| \int_t^{t+\Delta t} \left\| \vec{v}^{\,n_p} \right\|_{2,\Omega} \sum_{l=0}^{L} \left\| \frac{\partial^l \vec{v}^{\,n_p}}{\partial t^l} \right\|_{2,\Omega} dt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left\| \vec{F} \right\|_{2,\Omega} dt \Bigg] \leqslant C_{13}\left(C_{11}, \left\|\vec{F}\right\|_{2,Q_T}, r\right) \cdot \Delta t, \; n_p \geqslant r, \; t \in [0,T]. \tag{24}$$

Покажем, далее, что производные $\left\{ \frac{\partial^s \vec{v}^{\,n_p}}{\partial t^s} \right\}$, $s=0,1,\dots,L-1$ при $n_p \to \infty$ сходятся к $\frac{\partial^s \vec{v}}{\partial t^s}$ сильно в $L_2(Q_T)$. В самом деле, в силу леммы Фридрихса [9] по $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $N_\varepsilon < \infty$, что

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left(\vec{v}^{\,n_p} - \vec{v}^{\,n_q} \right) \right\|^2_{2,Q_T} \leqslant \sum_{r=1}^{N_\varepsilon} \int_0^T \left(\frac{\partial^s \vec{v}^{\,n_p}}{\partial t^s} - \frac{\partial^s v^{\,n_q}}{\partial t^s}, \vec{\varphi}_r \right)_{2,\Omega} dt \; +$$

$$+ \varepsilon \left\| \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left(\vec{v}^{\,n_p} - \vec{v}^{\,n_q} \right)_x \right\|^2_{2,Q_T}, \qquad s = 0,1,\dots,L-1. \tag{25}$$

Очевидно, что производные $\left\{ \frac{\partial^s \vec{v}^{\,n_p}}{\partial t^s} \right\}$, $S=0,1,\dots,L-1$ при $n_p \to \infty$ сходятся к $\frac{\partial^s \vec{v}}{\partial t^s}$ слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно

$t \in [0,T]$ и потому первый член в правой части (25) при достаточно больших n_p и n_q и фиксированном N_ε может быть сделан сколь угодно малым, а для второго члена в силу оценки (2I) имеет место оценка:

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial t^s} (\vec{v}^{n_p} - \vec{v}^{n_q})_x \right\|^2_{2,Q_T} \leqslant C_{14}(C_{11}, T), \quad s = 0,1,\ldots,L-1 . \tag{26}$$

С помощью уравнений (I4), начальных условий (I5), (II)-(I2) и описанных выше предельных переходов $\{\vec{v}^{n_p}\}$ к $\vec{v}$ доказывается (ср. [9], [6]-[8]), что $\vec{v}$ удовлетворяет интегральному тождеству (6) и начальным условиям Коши:

$$\left\| \frac{\partial^s \vec{v}}{\partial t^s}(x,t) - \vec{v}_{0s}(x) \right\|_{2,\Omega} \to 0, \quad t \to 0, \quad s = 0,1,\ldots,L-1 . \tag{27}$$

Тем самым $\vec{v}(x,t)$ является одним из слабых решений задачи (3)-(5) и для него предельным переходом из (2I) получается оценка (7). Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю признательность академику Л.Д.Фаддееву и профессору О.А.Ладыженской за постоянную поддержку моих исследований по теории неньютоновских жидкостей.

Литература

1. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М., 1964.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975.
3. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М., 1977.
4. Афарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М., 1978.
5. Maxwell J.C. - Phil.Trans.Roy.Soc.,1867,v.49,p.157.
6. Осколков А.П. - Зап.научн.семин.Ленингр.отд.Мат. ин-та АН СССР, 1979, 84, с.185-210.
7. Осколков А.П. - Зап.научн.семин.Ленингр.отд.Мат. ин-та АН СССР, 1980, 96, с.205.
8. Осколков А.П. - Препринт ЛОМИ Р-2-80, Л., 1980.
9. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-ое изд. М., 1970.