А. С. Мищенко, Формула Хирцебруха: 45 лет истории и современное состояние, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 4, 16–35

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 4

Посвящается памяти В. А. Рохлина

ФОРМУЛА ХИРЦЕБРУХА: 45 ЛЕТ ИСТОРИИ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

© А. С. Мищенко

Оглавление

Введение

Владимир Абрамович Рохлин стоял у истоков создания теории характеристических классов в топологии и, в частности, в разработке так называемой формулы Хирцебруха. В 1952 г. В. А. Рохлин [2] выразил сигнатуру четырехмерного ориентированного многообразия через его первый класс Понтрягина. Он установил, что сигнатура четырехмерного ориентированного многообразия X равна

$$\operatorname{sign}(X) = \frac{p_1(X)}{3},$$

где $p_1(X)$ есть первый класс Понтрягина. Спустя год Ф. Хирцебрух [3] написал формулу для выражения сигнатуры в терминах характеристических классов Понтрягина для ориентированных многообразий произвольной размерности.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 9901-01201 и INTAS № 96-1099.

Понятие о характеристических классах является одним из наиболее глубоких понятий, описывающих гладкую структуру многообразия. Поэтому с момента его введения была поставлена и решалась следующая задача: в какой степени те или иные характеристические классы зависят от выбора гладкой структуры многообразия, с помощью которой они определяются? Существуют два типа характеристических классов. Первый, более простой, — это характеристические классы Штифеля–Уитни [19–22], являющиеся элементами групп когомологий многообразия X с коэффициентами в поле $\mathbf{Z}_{/2}$ вычетов по модулю 2. Второй тип — это характеристические классы Л. С. Понтрягина, введенные им в 1942 г. [17, 18], являющиеся элементами целочисленных когомологий.

Точная постановка задачи такова. Рассмотрим некоторое отношение эквивалентности между многообразиями, которое индуцировано отображениями многообразий. (Наиболее часто встречающиеся в литературе отношения эквивалентности — это кусочно-линейные гомеоморфизмы, непрерывные гомеоморфизмы, гомотопические эквивалентности многообразий.) Пусть отображение

$$f : X \longrightarrow Y$$

является эквивалентностью многообразий. Спрашивается: для каких характеристических классов α выполнено равенство

$$\alpha(X) = f^*(\alpha(Y))?$$

Другими словами, какие характеристические классы являются: а) комбинаторно-инвариантными, б) топологически-инвариантными, в) гомотопически-инвариантными?

Что касается характеристических классов Штифеля–Уитни, то они являются гомотопическими инвариантами для любого замкнутого многообразия. Доказательство основано на их прямом выражении через фундаментальный цикл многообразия с помощью когомологических операций (квадратов Стинрода).

Проблема инвариантности классов Понтрягина оказалась более трудной и в связи с этим более содержательной с точки зрения приложений к различным задачам алгебраической и дифференциальной топологии. Наибольшее внимание было уделено изучению инвариантности рациональных классов Понтрягина, существенный вклад в которое внесен московской топологической школой. Четыре типа инвариантности классов Понтрягина гладких многообразий — комбинаторная, топологическая, гомотопическая и инвариантность относительно бордизмов — оказались сильно связанными между собой и с другими фундаментальными проблемами теории гладких многообразий.

Проблема инвариантности классов Понтрягина относительно бордизмов возникла еще в работах Л. С. Понтрягина, который доказал инвариантность чисел Понтрягина относительно ориентируемых бордизмов [18, теорема 3]. Отсюда он, в частности, вывел, что уже в размерности четыре имеются многообразия, не бордантные нулю. Он высказал гипотезу, что числа Понтрягина должны определять класс бордизма в размерности три. В. А. Рохлин [1] доказал это утверждение в 1951 г. Дальнейшее изучение чисел Понтрягина как инвариантов бордизмов нашло существенное применение в задачах о вычислении колец внутренних гомологий, ориентируемых и почти комплексных бордизмов, которые решали В. А. Рохлин, С. П. Новиков, Дж. Милнор и многие другие математики.

Здесь мы остановимся, в первую очередь, на проблеме *гомотопической* инвариантности классов Понтрягина.

Многочисленные попытки решить проблему описания гомотопически-инвариантных рациональных классов Понтрягина привели к открытию новых интересных взаимосвязей между топологией, теорией представлений, теорией дискретных групп, теорией C^*-алгебр и другими разделами математики. Важность этой проблемы вытекает, в частности, из того, что в задаче классификации гладких структур на многообразии необходимо иметь описание всех гомотопически-инвариантных рациональных классов Понтрягина.

Напомним, что характеристический класс Понтрягина $p_i(X)$ многообразия X есть класс целочисленных когомологий

$$p_i(X) \in H^{4i}(X; \mathbf{Z}).$$

Мы будем рассматривать только рациональные классы Понтрягина, т.е. элементы групп когомологий с рациональными или даже вещественными коэффициентами

$$p_i(X) \in H^{4i}(X; \mathbf{R}).$$

Любой целочисленный (а следовательно, и рациональный или вещественный) характеристический класс представляется в виде многочлена от классов Понтрягина $p_i(X)$. Имеется весьма удобный способ описывать некоторые характеристические классы как симметрические функции от так называемых *образующих Ву*. Пусть $Q(t_1, \dots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен, а

$$\sigma_1(t_1, \dots, t_n), \quad \dots, \quad \sigma_n(t_1, \dots, t_n)$$

— элементарные симметрические многочлены от переменных $\{t_1, \dots, t_n\}$. Тогда имеется единственный многочлен $R(p_1, \dots, p_n)$ такой, что

$$R(\sigma_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \sigma_n(t_1, \dots, t_n)) = Q(t_1, \dots, t_n).$$

Это и значит, что любой характеристический класс выражается в виде симметрического многочлена от образующих Ву.

Пусть

$$L(X) = \prod_j \frac{t_j/2}{\operatorname{th}(t_j/2)}$$

— характеристический класс Хирцебруха, определяемый формальными образующими By t_j таким образом, что

$$\sigma_k(t_1^2, \dots, t_n^2) = p_k(X).$$

Формула Хирцебруха утверждает, что для $4k$-мерного ориентируемого замкнутого многообразия X имеет место равенство

$$\operatorname{sign} X = 2^{2k}\langle L(X), [X]\rangle, \tag{1}$$

где

$$\operatorname{sign} X = \operatorname{sign}(H^{2k}(X, \mathbb{C}), \cup)$$

— сигнатура невырожденной квадратичной формы, определяемой $\cup$-произведением в группах когомологий $H^{2k}(X, \mathbb{C})$. Как уже упоминалось, эта формула была установлена в 1952 г. В. А. Рохлиным [2] для четырехмерных многообразий, а в полном объеме для многообразий произвольной размерности — Ф. Хирцебрухом [3] в 1953 г.

Существует несколько способов обобщения формулы Хирцебуха главным образом для неодносвязных многообразий.

Пусть X — замкнутое ориентируемое неодносвязное многообразие, $\pi = \pi_1(X)$, и пусть

$$f_X : X \longrightarrow B\pi$$

— определенное с точностью до гомотопии каноническое отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп

$$(f_X)_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi.$$

§1. Конечномерные представления

1.1. Индивидуальное представление. Пусть дано конечномерное представление

$$\rho : \pi \longrightarrow U(N). \tag{2}$$

Рассмотрим группу когомологий $H^{2k}(X, \rho)$ с локальной системой коэффициентов, порождаемой представлением ρ. $\cup$-Произведение индуцирует на этой группе невырожденную квадратичную форму, сигнатуру которой будем обозначать

$$\operatorname{sign}_\rho X := \operatorname{sign}(H^{2k}(X, \rho), \cup).$$

Нетрудно установить, что

$$\operatorname{sign}_\rho X = 2^{2k}\langle L(X)\operatorname{ch}(f_X^*\xi^\rho), [X]\rangle, \tag{3}$$

где ξ^ρ — векторное расслоение над $B\pi$, порожденное представлением ρ.

Легко видеть, что левая и правая части формулы (3) совпадают с левой и правой частями формулы (1). Тем не менее это обобщение оказывается полезным при дальнейших обобщениях. По крайней мере правую часть формулы (3) можно построить для более общих представлений фундаментальной группы π.

Например, заменим представление (2) в унитарную группу на представление

$$\rho : \pi \longrightarrow U(p, q)$$

в группу матриц, сохраняющих некоторую индефинитную форму типа (p, q). Тогда, с одной стороны, можно построить операцию типа $\cup$ на когомологиях многообразия X, а следовательно, и невырожденную форму на когомологиях средней размерности, используя индефинитную форму в коэффициентах. С другой стороны, расслоение ξ^ρ можно разложить в сумму двух расслоений:

$$\xi^\rho = \xi^\rho_+ \oplus \xi^\rho_-,$$

на которых индефинитная форма положительно и соответственно отрицательно определена. Тогда формула Хирцебруха примет вид

$$\operatorname{sign}_\rho X = 2^{2k}\langle L(X)\operatorname{ch}(f_X^*(\xi^\rho_+ - \xi^\rho_-)), [X]\rangle.$$

В последней формуле характер Черна расслоений $\xi^\rho_\pm$, вообще говоря, уже может быть нетривиальным, что, собственно, и означает нетривиальность самой формулы Хирцебруха в ее неодносвязном варианте. Именно такой случай впервые рассмотрел Люстиг [4].

1.2. Семейства конечномерных представлений. Другим естественным обобщением, приводящим к нетривиальным вариантам формулы Хирцебруха, все еще не отходящим от классических представлений, является рассмотрение не одного представления, а целого непрерывного семейства конечномерных представлений

$$\rho_t : \pi \longrightarrow U(N), \quad t \in T, \tag{4}$$

с помощью которого получаем семейство квадратичных форм, сигнатура которых постоянна; тем не менее, это семейство задает, вообще говоря, нетривиальный элемент

$$\operatorname{sign}_{\rho_t} X = \operatorname{sign}(H^{2k}(X, \rho_t), \cup) \in K(T).$$

Для того чтобы превратить семейство квадратичных форм $(H^{2k}(X,\rho_t),\cup)$ в непрерывное семейство, необходимо включить гомологии многообразия X в более широкое пространство, размерность которого в отличие от гомологий $H^{2k}(X,\rho_t)$ была бы постоянной.

Фиксируем для этого на многообразии X некоторую комбинаторную структуру. Пусть $C_k = C_k(X)$ — группа k-мерных цепей многообразия X с коэффициентами в пространстве $\mathbf{C}^N$. Тогда представление ρ_t определяет на группах C_k граничные гомоморфизмы d_k и гомоморфизмы двойственности Пуанкаре D_k, непрерывно зависящие от параметра $t \in T$:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & \cdots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\ \uparrow{\scriptstyle D_0} & & \uparrow{\scriptstyle D_1} & & & & \uparrow{\scriptstyle D_n} \\ C_n^* & \xleftarrow{d_n^*} & C_{n-1}^* & \xleftarrow{d_{n-1}^*} & \cdots & \xleftarrow{d_1^*} & C_0^* \end{array},$$

причем выполнены следующие условия граничного оператора, коммутативности диаграммы и сопряженности операторов:

$$\begin{aligned} d_{k-1}d_k &= 0, \\ d_kD_k + (-1)^{k+1}D_{k-1}d_{n-k+1}^* &= 0, \\ D_k &= (-1)^{k(n-k)}D_{n-k}^*. \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, оператор двойственности Пуанкаре индуцирует изоморфизм в гомологиях.

Положим

$$F_k = i^{k(k-1)}D_k. \tag{6}$$

Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & \cdots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\ \uparrow{\scriptstyle F_0} & & \uparrow{\scriptstyle F_1} & & & & \uparrow{\scriptstyle F_n} \\ C_n^* & \xleftarrow{d_n^*} & C_{n-1}^* & \xleftarrow{d_{n-1}^*} & \cdots & \xleftarrow{d_1^*} & C_0^* \end{array} \tag{7}$$

удовлетворяет более естественным условиям коммутативности диаграммы и сопряженности операторов:

$$\begin{aligned} d_kF_k + F_{k-1}d_{n-k+1}^* &= 0, \\ F_k &= F_{n-k}^*, \end{aligned} \tag{8}$$

а оператор F все так же индуцирует изоморфизм в гомологиях.

В самом деле, условие коммутативности (5) дает

$$\begin{aligned} 0 &= d_kD_k + (-1)^{k+1}D_{k-1}d_{n-k+1}^* \\ &= d_ki^{k(k-1)}F_k + (-1)^{k+1}i^{(k-1)(k-2)}F_{k-1}d_{n-k+1}^* \\ &= i^{k(k-1)}(d_kF_k + F_{k-1}d_{n-k+1}^*). \end{aligned}$$

Из условия сопряженности (5) получаем

$$i^{k(k-1)}F_k = (-1)^{k(n-k)} i^{(n-k)(n-k-1)} F^*_{n-k}.$$

В случае $n = 4l$

$$i^{k(k-1)} = (-1)^{k(n-k)} i^{(n-k)(n-k-1)},$$

и, таким образом, диаграмма (7) образует самосопряженный ацикличный бикомплекс.

Рассмотрим теперь конус оператора F, т.е. ацикличный комплекс относительно суммарной градуировки бикомплекса (7) и суммы двух дифференциалов d и F:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{H_1} & C_1 \oplus C^*_n & \xleftarrow{H_2} & C_2 \oplus C^*_{n-1} & \xleftarrow{H_3} & \ldots \\
 & & \ldots & \xleftarrow{H_{2l}} & C_{2l} \oplus C^*_{2l+1} & \xleftarrow{H_{2l+1}} & C_{2l+1} \oplus C^*_{2l} & \xleftarrow{H_{2l+2}} & \ldots \\
 & & \ldots & \xleftarrow{H_{n-1}} & C_{n-1} \oplus C^*_2 & \xleftarrow{H_n} & C_n \oplus C^*_1 & \xleftarrow{H_{n+1}} & C^*_0 \longleftarrow 0
\end{array}$$

или

$$0 \longleftarrow A_0 \xleftarrow{H_1} A_1 \xleftarrow{H_2} \ldots \xleftarrow{H_{2l}} A_{2l} \xleftarrow{H_{2l+1}} A_{2l+1} \xleftarrow{H_{2l+2}} \ldots \xleftarrow{H_{4l}} A_{4l} \xleftarrow{H_{4l+1}} A_{4l+1} \longleftarrow 0, \qquad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= C_k \oplus C^*_{n-k+1}, \\ H_k &= \begin{pmatrix} d_k & F_{k-1} \\ 0 & d^*_{n-k+2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Фиксируя в пространствах C_k некоторое скалярное произведение, можно отождествить C^*_k и C_k:

$$\phi_k : C^*_k \longrightarrow C_k, \qquad (11)$$

а формально сопряженный оператор d^*_k — с оператором, сопряженным относительно скалярного произведения.

Тогда в силу определения (10) пространство $A_k \cong C_k \oplus C_{n-k+1}$ изоморфно пространству $A_{n-k+1} \cong C_{n-k+1} \oplus C_k$ посредством изоморфизма

$$T_k : A_k \longrightarrow A_{n-k+1}$$

с матрицей

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, оператор H_k в комплексе (9) удовлетворяет условию

$$H^*_k = T_k H_{n-k+2} T_{k-1}.$$

Положим

$$A = \bigoplus_{k=0}^{n+1} A_k = A_{\mathrm{ev}} \oplus A_{\mathrm{odd}},$$

где

$$A_{\mathrm{ev}} = \bigoplus_{k=0}^{2l} A_{2k}, \qquad A_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{k=0}^{2l} A_{2k+1}.$$

Положим

$$H = \bigoplus_{k=0}^{n+1} H_k : A \longrightarrow A, \qquad T = \bigoplus_{k=0}^{n+1} T_k : A \longrightarrow A.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H(A_{\mathrm{ev}}) \subset A_{\mathrm{odd}}, \quad H(A_{\mathrm{odd}}) \subset A_{\mathrm{ev}}, \\ T(A_{\mathrm{ev}}) \subset A_{\mathrm{odd}}, \quad T(A_{\mathrm{odd}}) \subset A_{\mathrm{ev}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что

$$H^*(A_{\mathrm{ev}}) \subset A_{\mathrm{odd}}, \quad H^*(A_{\mathrm{odd}}) \subset A_{\mathrm{ev}}.$$

Поскольку комплекс (9) ацикличен, оператор $H + H^*$ является изоморфизмом. Тогда оператор $G = TH + HT$ оставляет пространство A_{ev} инвариантным. Положим

$$G_{\mathrm{ev}} = G|_{A_{\mathrm{ev}}} : A_{\mathrm{ev}} \longrightarrow A_{\mathrm{ev}}. \tag{13}$$

Очевидно, что оператор G_{ev} самосопряжен и обратим. Более того, поскольку

$$A_{\mathrm{ev}} = \bigoplus_{k=0}^{n} C_k,$$

то, как нетрудно проверить,

$$G_{\mathrm{ev}} = d + d^* + F.$$

Утверждение.

$$\operatorname{sign}(d + d^* + F) = \operatorname{sign}(H(F)).$$

Доказательство. В самом деле, при подходящем выборе базиса в пространстве

$$C = \bigoplus_{k=0}^{n} C_k$$

оператор d имеет матричный вид

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{d} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем оператор $\tilde{d}$ обратим. Тогда оператор F имеет матричный вид

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ F_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$\tilde{d}F_{13} + F_{31}\tilde{d}^* = 0.$$

Значит,

$$d + d^* + F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & \tilde{d} + F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ \tilde{d}^* + F_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, $\operatorname{sign}(d + d^* + F) = \operatorname{sign}(F_{22}) = \operatorname{sign}(H(F))$. •

Семейство операторов (13) непрерывно зависит от параметра $t \in T$.

Вообще, пусть ϕ_t, $t \in T$ — непрерывное семейство невырожденных квадратичных форм на слоях V_t, $t \in T$ векторного расслоения $p : V \longrightarrow T$. Зафиксируем на V некоторую евклидову структуру и представим семейство форм ϕ_t с помощью непрерывного семейства самосопряженных операторов $A_t : V_t \longrightarrow V_t$:

$$(A_t x, y) \equiv \phi_t(x, y), \quad x, y \in V_t.$$

Для каждого $t \in T$ разложим пространство V_t в прямую сумму двух инвариантных подпространств

$$V_t = V_t^+ \oplus V_t^-,$$

так, чтобы оператор A_t был положительно определен на V_t^+ и отрицательно определен на V_t^-. Подпространства $V_t^\pm$ задаются проекторами

$$P_t^\pm : V_t \longrightarrow V_t,$$
$$P_t^+ + P_t^- \equiv 1,$$

непрерывно зависящими от точки $t \in T$. Это семейство проекторов можно трактовать как два проектора в расслоении V, разлагающих его в прямую сумму двух векторных расслоений:

$$V = \xi^+ \oplus \xi^-.$$

Обобщенной сигнатурой семейства квадратичных форм ϕ_t будем считать элемент

$$\operatorname{sign}(\phi_t) = [\xi^+] - [\xi^-] \in K(T).$$

Таким образом, для семейства конечномерных представлений ρ_t сигнатура многообразия X в виде элемента группы $K(T)$ получается следующим образом:

$$\operatorname{sign}_{\rho_t}(X) = \operatorname{sign}(G_{\mathrm{ev}}) = \operatorname{sign}(d(t) + d^*(t) + F(t)) \in K(T).$$

С другой стороны, семейство представлений (4) задает расслоение ξ^{ρ_t} над пространством $B\pi \times T$. Значит, формула Хирцебруха будет иметь вид

$$K(T) \ni \operatorname{sign}_{\rho_t} X = 2^{2k}\langle L(X)\operatorname{ch}_X(f_X^*\xi^{\rho_t}), [X]\rangle \in K(T) \otimes \mathbf{Q}.$$

Впервые семейства представлений для свободной абелевой группы рассмотрел Люстиг [4] в 1972 г. Он написал соответствующую формулу Хирцебруха, используя семейства эллиптических комплексов де Рама и фредгольмовы операторы. В той же работе он рассмотрел представления фундаментальной группы не в унитарную группу, а в группу $U(p,q)$, что дало нетривиальные расслоения для двумерных поверхностей. Значительно позже, в 1995 г., М. Л. Громов [7, с. 111] применил этот класс представлений для получения короткого доказательства теоремы Новикова о топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина (ср. §6).

§2. Алгебраический вариант формулы Хирцебруха

Наиболее общий вариант формулы Хирцебруха для неодносвязных многообразий заключается в выражении инвариантов двойственности Пуанкаре в терминах характеристических классов многообразия.

Пусть M — замкнутое ориентированное неодносвязное многообразие с фундаментальной группой π. Пусть $B\pi$ — классифицирующее пространство группы π, а

$$f_M : M \longrightarrow B\pi$$

— отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Через $\Omega_*(B\pi)$ обозначим группу бордизмов пар (M, f_M). Напомним, что $\Omega_*(B\pi)$ является модулем над кольцом бордизмов точки $\Omega_* = \Omega_*(\mathrm{pt})$.

В работе [8] был построен гомоморфизм

$$\operatorname{sign} : \Omega_*(B\pi) \longrightarrow L_*(\mathbf{C}\pi), \tag{14}$$

который сопоставляет каждому неодносвязному многообразию (M, f_M) элемент $\operatorname{sign}(M) \in L_*(\mathbf{C}\pi)$, называемый *симметрической сигнатурой*. (Здесь

$L_*(\mathbf{C}\pi)$ — группа Уолла группового кольца $\mathbf{C}\pi$.) Этот гомоморфизм удовлетворяет следующим естественным условиям:

(a) $\operatorname{sign}(M)$ — гомотопический инвариант многообразия M;

(b) если N — односвязное многообразие, а $\tau(N)$ — его классическая сигнатура, то

$$\operatorname{sign}(M \times N) = \operatorname{sign}(M)\tau(N) \in L_*(\mathbf{C}\pi).$$

Будем интересоваться только группами по модулю кручения, т.е. результатом их тензорного умножения на поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$, другими словами, рассмотрим гомоморфизм

$$\operatorname{sign} : \Omega_*(B\pi) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q}.$$

В этом случае группа бордизмов выражается через обычные гомологии:

$$\Omega_*(B\pi) \otimes \mathbf{Q} \approx H_*(B\pi; \mathbf{Q}) \otimes \Omega_*$$

и, следовательно, получается гомоморфизм

$$\operatorname{sign} : H_*(B\pi; \mathbf{Q}) \longrightarrow L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q}.$$

Таким образом, гомоморфизм sign можно задать как некоторый класс когомологий

$$\sigma \in H^*(B\pi; L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q}).$$

Тогда для любого многообразия (M, f_M) получаем

$$\operatorname{sign}(M, f_M) = \langle L(M) f_M^*(\sigma), [M] \rangle \in L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q}. \tag{15}$$

Эту формулу можно назвать *обобщенным алгебраическим вариантом формулы Хирцебруха*. Все прочие формулы так или иначе сводятся к применению формулы (15).

В частности, если $\alpha : L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ — некоторый аддитивный функционал и $\alpha(\sigma) = x \in H^*(B\pi; \mathbf{Q})$, то

$$\operatorname{sign}_x(M, f_M) = \langle L(M) f_M^*(x), [M] \rangle \in \mathbf{Q}$$

задает некоторую гомотопически-инвариантную высшую сигнатуру.

Так получается описание всех гомотопически-инвариантных высших сигнатур, и, следовательно, для их описания следует изучать конкретный класс когомологий

$$\sigma \in H^*(B\pi; L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q}) = H^*(B\pi; \mathbf{Q}) \otimes L_*(\mathbf{C}\pi) \otimes \mathbf{Q}.$$

§3. Бесконечномерные представления

Пусть $C^*[\pi]$ — C^*-групповая алгебра группы π. Всякое унитарное представление ρ группы π однозначно распространяется до представления $\overline{\rho}$ алгебры $C^*[\pi]$. Положим $A = \mathbf{Im}(\overline{\rho})$, $\overline{\rho} : C^*[\pi] \longrightarrow A$. Через ξ^ρ обозначим векторное расслоение над $B\pi$ со слоем A, функции склейки которого порождаются действием группы π на алгебре A с помощью представления ρ. Векторное расслоение ξ^ρ определяет элемент K-группы

$$\xi^\rho \in K_A(B\pi).$$

Теперь мы можем выписать правую часть формулы (3):

$$? = 2^{2k}\langle L(X)\,\mathrm{ch}_A(f_X^*\xi^\rho), [X]\rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes \mathbf{Q}. \tag{16}$$

Левую часть формулы можно вычислить как симметрическую сигнатуру многообразия X после замены кольца, задаваемой представлением ρ, так что получаем обобщенную формулу Хирцебруха [5] с коэффициентами в плоском (бесконечномерном) расслоении ξ^ρ:

$$\mathrm{sign}_\rho(X) = 2^{2k}\langle L(X)\,\mathrm{ch}_A(f_X^*(\xi^\rho)), [X]\rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes \mathbf{Q}.$$

§4. Конечномерные асимптотические представления

Имеется класс неплоских векторных расслоений, которые можно задавать с помощью так называемых *почти представлений*. Это так называемые *почти плоские* расслоения [6]. Именно, отображение

$$\rho : \pi \longrightarrow U(n)$$

называется *ε-почти представлением* по отношению к конечному подмножеству $F \subset \pi$, если имеют место соотношения

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \quad \text{для всех } g \in \pi$$

и

$$\|\rho\|_F = \sup\{\|\rho(gh) - \rho(g)\rho(h)\| : g, h, gh \in F\} \le \varepsilon.$$

Удобней включить почти представление в последовательность, которая называется асимптотическим представлением. Именно пусть $\rho = \{\rho_k\}$ — последовательность ε_k-почти представлений. Она называется *асимптотическим представлением* группы π (по отношению к конечному подмножеству $F \subset \pi$ и к последовательности $\{\varepsilon_k\}$), если

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \varepsilon_k = 0$$

и

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \sup\{\|\rho_k(g) - \rho_{k+1}(g)\| : g \in F \subset \pi\} = 0.$$

По асимптотическому представлению канонически строятся расслоение ξ_ρ над многообразием X и сигнатура $\operatorname{sign}_\rho(X)$ [12], так что снова получаем вариант формулы Хирцебруха:

$$\operatorname{sign}_\rho(X) = 2^{2k}\langle L(X)\operatorname{ch}\xi_\rho, [X]\rangle \in \mathbf{Q}.$$

§5. Гладкий вариант формулы Хирцебруха

Левая часть формулы Хирцебруха (3) выражается в терминах комбинаторной структуры многообразия X. Имеется и гладкий вариант такого выражения. Рассмотрим комплекс де Рама дифференциальных форм на многообразии X со значениями в плоском векторном расслоении ξ^ρ:

$$0\longrightarrow\Omega_0(X,\xi^\rho)\xrightarrow{d}\Omega_1(X,\xi^\rho)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega_{4k}(X,\xi^\rho)\longrightarrow 0. \tag{17}$$

Хорошо известно, что группы гомологий комплекса де Рама (17) изоморфны группам когомологий $H^*(X,\xi^\rho)$.

Тогда $\cup$-произведение порождается внешним произведением дифференциальных форм, так что эрмитова форма, определяющая двойственность Пуанкаре, задается формулой

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle = \int\limits_X \omega_1\wedge\omega_2. \tag{18}$$

С другой стороны, используя риманову метрику на многообразии X, двойственность Пуанкаре (18) можно задать при помощи ограниченного оператора $*$:

$$(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_X \omega_1\wedge *\omega_2,$$

где

$$* : \Omega_k(X)\longrightarrow\Omega_{n-k}(X).$$

Положим

$$\alpha = i^{k(k+1)} * .$$

Тогда

$$\alpha d\alpha = d^*;\quad \alpha^2 = 1.$$

Пусть

$$\Omega^\pm(X) = \mathbf{Ker}(\alpha\mp 1).$$

Очевидно, что
$$(d+d^*)(\Omega^+(X)) \subset \Omega^-(X).$$

Рассмотрим эллиптический оператор
$$D = d + d^* : \Omega^+(X) \longrightarrow \Omega^-(X).$$

Тогда
$$\operatorname{index}(D) = \operatorname{sign}(X).$$

С помощью формулы Атья–Зингера для индекса эллиптического оператора получаем
$$\operatorname{index}(D \otimes \xi) = 2^{2k} \langle L(X) \operatorname{ch} \xi, [X] \rangle \tag{19}$$
для произвольного векторного расслоения ξ над многоообразием X.

§6. Новое доказательство топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина (по М. Л. Громову)

Во всех предыдущих вариантах формулы Хирцебруха правая часть является инвариантом бордизмов классифицирующего пространства фундаментальной группы, в то время как левая часть является гомотопическим инвариантом. Это позволяет естественным образом сформулировать гипотезу, известную как *гипотеза Новикова о высших сигнатурах*, о том, что гомотопически-инвариантна правая часть формулы
$$\operatorname{sign}_x X = 2^{2k} \langle L(X) \cdot f_X^*(x), [X] \rangle, \tag{20}$$
где x — уже *произвольный* класс рациональных когомологий классифицирующего пространства $B\pi$, т.е. $x = \operatorname{ch} \xi$ для некоторого векторного расслоения над $B\pi$. Левая часть формулы (20) в этом случае называется *высшей сигнатурой* многообразия X. В этом смысле каждое представление ρ фундаментальной группы π определяет некоторую высшую сигнатуру, которая автоматически является гомотопическим инвариантом.

Однако в случае высших сигнатур, задаваемых представлениями, можно сказать больше: они не только являются инвариантами гомотопических эквивалентностей, не только являются инвариантами гладких бордизмов фундаментальной группы, но дополнительно являются инвариантами топологических бордизмов классифицирующего пространства $B\pi$!

Это наблюдение позволило М. Л. Громову существенно упростить доказательство топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина гладкого многообразия. Как и в доказательстве С. П. Новикова, идея заключается в том, чтобы производить проверку топологической инвариантности классов Понтрягина не для произвольных классов Понтрягина, а для (неоднородного) класса Хирцебруха $L(X) \in H^*(X;\mathbf{Q})$, точнее, для его значений на произвольном цикле многообразия X.

Таким образом, задача сводится к следующей: пусть $f : X \longrightarrow Y$ — некоторый топологический гомеоморфизм гладких (ориентируемых замкнутых) многообразий и $x \in H_{4k}(X;\mathbf{Z})$ — некоторый целочисленный класс. Требуется проверить выполнение равенства

$$\langle L(X), x\rangle = \langle L(Y), f_*(x)\rangle. \tag{21}$$

Теперь замечаем, что с точностью до перехода к кратному классу (что не меняет сущности проверки) как x, так и $f_*(x)$ можно реализовать гладким компактным ориентируемым подмногообразием с тривиальным нормальным расслоением:

$$M \subset X, \quad N \subset Y, \quad [M] = x, \quad [N] = f_*(x). \tag{22}$$

(Это соображение использовалось уже Рохлиным и Шварцем в их доказательстве комбинаторной инвариантности рациональных классов Понтрягина.) Тогда, очевидно, значение класса Хирцебруха $L(X)$ на x совпадает с сигнатурой подмногообразия M, а значение класса Хирцебруха $L(Y)$ на $f_*(x)$ — с сигнатурой подмногообразия Y, и для доказательства теоремы достаточно установить, что подмногообразия M и N можно подобрать таким образом, чтобы у них совпадали сигнатуры.

Далее доказательства Новикова и Громова расходятся. Новиков доказал, что N можно выбрать гомотопически-эквивалентным M, откуда автоматически следует равенство сигнатур у M и N. Это потребовало применения тонкой техники внутренних перестроек.

Громов предложил доказывать, что сигнатуры многообразий M и N можно вычислять как высшие сигнатуры некоторых других, уже неодносвязных, подмногообразий, скажем, M' и N', по отношению к некоторому представлению их фундаментальной группы, причем подмногообразия M' и N' в свою очередь бордантны в классе топологических бордизмов с сохранением фундаментальной группы. Более точно он предложил следующую схему доказательства.

Сигнатуру подмногообразия M (так же как и сигнатуру подмногообразия N) можно интерпретировать как некоторую высшую сигнатуру другого подмногообразия коразмерности один. Пусть U — трубчатая окрестность подмногообразия M. Поскольку мы предположили, что нормальное расслоение к M тривиально, то окрестность U диффеоморфна декартову произведению:

$$M \subset U = M \times \mathbf{R}^{n-4k}. \tag{23}$$

Рассмотрим некоторую компактную гиперповерхность $V \subset \mathbf{R}^{n-4k}$ коразмерности один с тривиальным нормальным расслоением, которая является классифицирующим пространством некоторой фундаментальной группы. В качестве

V мы можем выбрать $(n-4k-1)$-мерный тор или произведение двумерных поверхностей в должном количестве. Известно, что у V все высшие сигнатуры порождаются некоторыми представлениями ее фундаментальной группы. Поэтому сигнатура многообразия M совпадает с некоторой высшей сигнатурой декартова произведения $M' = M \times V$. В качестве коцикла следует взять фундаментальный коцикл $v \in H^{n-4k-1}(V; \mathbf{Z})$ поверхности V.

Более общим образом, пусть

$$\varphi : M' \longrightarrow V$$

— гладкое отображение; тогда высшая сигнатура $\operatorname{sign}_v(M')$ совпадает с сигнатурой прообраза регулярного значения отображения φ:

$$\operatorname{sign}_v(M') = \operatorname{sign}(\varphi^{-1}(p_0)).$$

Итак, имеем подмногообразия $M \subset M' \subset X$. Пусть $U' \subset U$ — трубчатая окрестность подмногообразия M':

$$M' \subset U' = M' \times \mathbf{R}^1.$$

Гомеоморфизм f отображает открытое множество $U' \subset X$ на открытое подмножество $W \subset Y$, которое разделяется некоторой компактной гиперповерхностью $N' \subset W$. Очевидно, что N' можно отобразить сначала на M', а потом на V с помощью некоторого непрерывного отображения

$$\varphi' : N' \xrightarrow{\psi} M' = M \times V \xrightarrow{\chi} V.$$

Также очевидно, что, заменяя φ' на гомотопное ему гладкое отображение φ'', можно установить, что прообраз $\varphi''^{-1}(q_0)$ любого регулярного значения отображения φ'' представляет собой подмногообразие, реализующее класс $f_*(x) \in H_{4k}(Y)$. Следовательно, остается сравнить две высших сигнатуры:

$$\operatorname{sign}_v(M') = \operatorname{sign}_v(N'). \tag{24}$$

Решающим здесь является тот факт, что два компактных (топологических) подмногообразия M' и $f^{-1}(N')$ в окрестности $U' = M' \times \mathbf{R}^1$ топологически бордантны! Значит, сигнатуры (23) совпадают.

§7. Комбинаторный вариант формулы Хирцебруха

По аналогии с гладкой формулой (19) можно поставить задачу об описании правой части формулы (19) в комбинаторных терминах. Если расслоение ξ порождается некоторым представлением фундаментальной группы π, то комбинаторный вариант формулы Хирцебруха сводится к формулам (3), (15). Все они требуют определенных ограничений на вид расслоения ξ: оно должно быть плоским в случае точного представления и почти плоским — в случае асимптотического представления.

Здесь мы предлагаем построение необходимых комбинаторных объектов, имитирующих двойственность Пуанкаре в случае, когда ξ — *произвольное* расслоение над многообразием X. Идея такого построения была сформулирована М. Л. Громовым [7] и восходит к конструкции алгебраических комплексов Пуанкаре и так называемой симметрической сигнатуры, рассмотренных в [13] и [5] (ср. [9, с. 18]).

Итак, строится новая алгебраическая категория, называемая *почти алгебраическими комплексами Пуанкаре*. Она обладает всеми необходимыми свойствами для построения инвариантов типа сигнатуры у комбинаторного многообразия X с локальной системой коэффициентов, порождаемой слоями некоторого векторного расслоения ξ над X.

Рассмотрим так называемый (α, A)-*почти цепной комплекс*, т.е. пару (C, d),

$$(C,d): \quad C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} C_n, \tag{25}$$

с условиями

$$\|d\| \le A,$$
$$\|d^2\| \le \alpha.$$

Оператор d будем называть *дифференциалом* почти цепного комплекса (C, d). Пара чисел (α, A), измеряющая отличие почти цепных комплексов от цепных комплексов, в дальнейших рассмотрениях будет такова, что без ограничения общности можно считать, что $A > 1$ и $0 < \alpha < 1$.

Скажем, что (α, A)-почти цепной комплекс (C, d) *F-почти ацикличен*, если выполнено следующее условие: существует такая допустимая функция $F \in \mathcal{F}$, что если

$$\|dx\| \le \delta\|x\|,$$

то найдется такой элемент y, что

$$\|y\| \le A\|x\|, \tag{26}$$
$$\|x - dy\| \le F_s(\alpha, \delta; A)\|x\|. \tag{27}$$

Определение. (α, A)-*Почти алгебраическим комплексом Пуанкаре формальной размерности* n называется пара $M = ((C, d), D)$, где (C, d) — это (α, A)-почти цепной комплекс, т.е. d — такой однородный гомоморфизм размерности -1, что $\|d^2\| \le \alpha$, а

$$D : C^* \longrightarrow C$$

является однородным гомоморфизмом размерности n:

$$\begin{array}{ccccccc}
C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & \cdots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
\uparrow D & & \uparrow D & & & & \uparrow D \\
C_n^* & \xleftarrow{d_n^*} & C_{n-1}^* & \xleftarrow{d_{n-1}^*} & \cdots & \xleftarrow{d_1^*} & C_0^*
\end{array}$$

и (α, A)-почти цепным гомоморфизмом, причем

$$\|Dd^* + dD\eta\| \le \varepsilon,$$
$$D^* = D\eta^{n+1}.$$

Кроме того, требуется, чтобы конус $\mathrm{Cone}(D)$ был (α, A)-почти ациклическим цепным комплексом.

Аналогично с (6) исправляем оператор D на оператор F путем изменения знаков так, чтобы выполнялись условия (8). Тогда при достаточно малом по сравнению с A значении α оператор

$$G(C, d, D) = d + d^* + F : C \longrightarrow C$$

является самосопряженным и обратимым. Полагаем

$$\mathrm{sign}(C, d, D) := \mathrm{sign}(G(C, d, D)).$$

Показывается, что для каждого замкнутого комбинаторного многообразия X и конечномерного векторного расслоения ξ над ним у X существует достаточно мелкое симплициальное разбиение, которое естественным образом порождает почти алгебраический комплекс Пуанкаре, сигнатура которого $\mathrm{sign}(X, \xi)$ не зависит от выбора упомянутого разбиения при условии ограниченности числа соседей и служит левой частью формулы Хирцебруха (5). В частности, построенная формула дает новую конструкцию рациональных классов Понтрягина, исходя из локальной комбинаторной структуры на многообразии X.

В случае, когда векторное расслоение ξ порождается некоторым точным представлением, соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре совпадает с алгебраическим комплексом Пуанкаре из работы [8], а его сигнатура совпадает с сигнатурой многообразия в когомологиях с соответствующей локальной системой коэффициентов.

В случае, когда расслоение ξ порождается некоторым асимптотическим представлением (и, следовательно, не является плоским расслоением), соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре может быть получен из универсального алгебраического комплекса Пуанкаре над групповой алгеброй фундаментальной группы π многообразия X путем замены колец. При этом сигнатура этого почти алгебраического комплекса Пуанкаре вычисляется как образ симметрической сигнатуры многообразия X при замене колец. Разумеется, аналогичная формула Хирцебруха совпадает с формулой Хирцебруха, рассмотренной для случая почти плоских расслоений в работах [6, 10].

Список литературы

[Ro2] Рохлин В. А., *Трехмерное многообразие — граница четырехмерного*, Докл. АН СССР **81** (1951), №3, 355–357.

[Ro1] Рохлин В. А., *Новые результаты теории четырехмерных многообразий*, Докл. АН СССР **84** (1952), №2, 221–224.

[Hi1] Hirzebruch F., *On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953), 951–956.

[L1] Lusztig G., *Novikov's higher signature and families of elliptic operators*, J. Differential Geom. **7** (1972), 229–256.

[MiSo] Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., *Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха*, Мат. сб. **111** (1980), №2, 209–226.

[CoGM] Connes A., Gromov M., Moscovici H., *Conjecture de Novikov et fibrés presque plats*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), 273–277.

[Gr1] Gromov M., *Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps, and higher signatures*, Functional Analysis on the Eve of the 21st Century in Honor of the 80th Birthday of I. M. Gel'fand. Vol. 2, Progr. Math., vol. 132, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996, pp. 1–213.

[Mi1] Мищенко А. С., *Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. 1. Рациональные инварианты*, Изв. АН СССР. Сер. мат. 34 (1970), №3, 501–514.

[FRR] Ferry S. C., Ranicki A., Rosenberg J., *A history and survey of the Novikov conjecture*, Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity (Oberwolfach, 1993). Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 226, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 7–66.

[HilS] Hilsum M., Skandalis G., *Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat*, J. Reine Angew. Math. **423** (1992), 73–99.

[MiNo] Mishchenko A. S., Mohammad Noor, *Asymptotic representation of discrete groups*, Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalisations and Applications, Math. Appl., vol. 433, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1998, pp. 299–312.

[MaMi] Mishchenko A. S., Manuilov V. M., *Relations between asymptotic and Fredholm representations*, Preprint no. IHES/M/97/74, Inst. des Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1997.

[Mi1] Mishchenko A. S., *Local combinatorial Hirzebruch formula*, International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998): Abstracts of Short Communications and Poster Sessions, Berlin, 1998, p. 94.

[Mi2] Мищенко А. С., *Локальная комбинаторная формула Хирцебруха*, Международная конференция, посвященная девяностолетию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 1998): Тезисы: Алгебра, геометрия и топология, МГУ, М., 1998, сс. 119–121.

[Mi137] Mishchenko A. S., *Theory of almost algebraic Poincaré complexes and local combinatorial Hirzebruch formula*, Preprint no. IHES/M/98/84, Inst. des Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1998.

[Mi133] Мищенко А. С., *Локальная комбинаторная формула Хирцебруха*, Тр. Мат. ин-та РАН **224** (1999), 249–263.

[pont1] Понтрягин Л. С., *Характеристические циклы многообразий*, Докл. АН СССР **35** (1942), №2, 35–39.

[pont2] Понтрягин Л. С., *Характеристические циклы дифференцируемых многообразий*, Мат. сб. **21** (1947), №2, 233–284.

[St2] Stiefel E., *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv. **8** (1936), 305–353.

[Wh1] Whitney H., *Sphere spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21** (1935), 464–468.

[Wh2] Whitney H., *On the theory of sphere-bundles*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **26** (1940), 148–153.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

Поступило 17 июня 1999 г.