

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бабич, Гладкость вещественных конечнозонных решений уравнений, связанных с уравнением sine-Gordon, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 1, 57–66

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

16 марта 2025 г., 08:54:29



© 1991 г.

## ГЛАДКОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ SINE-GORDON

М. В. БАБИЧ

В работе исследуются всевозможные вещественные реализации уравнения  $\partial^2 \varphi / \partial \mu / \partial \nu = -4 \sin \varphi$ . Показано, что вещественные конечнозонные решения уравнений  $\square u = \sin u$ ,  $\Delta u = -\operatorname{sh} u$  являются гладкими, а уравнения  $\square u = \operatorname{ch} u$ ,  $\Delta u = \operatorname{sh} u$ ,  $\Delta u = \operatorname{ch} u$  имеют лишь сингулярные решения. Среди всех вещественных конечнозонных решений уравнений  $\square u = \operatorname{sh} u$ ,  $\Delta u = \sin u$  выделены несингулярные.

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой были выделены все вещественные конечнозонные решения уравнений:

$\square u = \sin u$ , (SG)	$\Delta u = \sin u$ , (SL)
$\square u = \operatorname{sh} u$ , (SHG)	$\Delta u = -\operatorname{sh} u$ , (SHL1)
$\square u = \operatorname{ch} u$ , (CHG)	$\Delta u = \operatorname{sh} u$ , (SHL2)
	$\Delta u = \operatorname{ch} u$ (CHL)

(здесь  $\square = \partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial x^2$ ,  $\Delta = \partial^2 / \partial t^2 + \partial^2 / \partial x^2$ ). Здесь мы будем исследовать гладкость найденных в [1] решений. Не все результаты, которые мы получим, являются новыми: решения ((SG) и ((SHG) хорошо изучены (см., например, [2, 3, 4, 5]); двузонные решения ((SL) исследованы И. А. Таймановым [6]; для уравнений (SHL1), (SHL2), (CHL) вопрос о существовании особенности у алгебро-геометрического решения может быть решен и без привлечения теории  $\theta$ -функций. Однако мы, как и в [1], проведем полное исследование всех семи уравнений с единых позиций. Это даст возможность не только выделить гладкие решения (где они существуют), но и глубже понять структуру множества вещественных решений и их особенностей. В частности, пользуясь развитой в статье техникой, можно строить решения с наперед заданной особенностью в какой-либо фиксированной точке  $(t_0, x_0)$ .

Содержание данной работы во многом опирается на результаты [1]; вследствие этого мы, оставив прежние обозначения, не будем подробно описывать ранее введенные объекты, а будем давать лишь короткий комментарий и ссылку на [1].

---

*Ключевые слова:* конечнозонное решение, риманова поверхность, антиинволюция,  $\theta$ -функция, специальный дивизор.

Рассмотрим формулу для вещественных конечнозонных решений приведенных выше уравнений (см. [1], формула (3), табл.1):

$$u(x;t) = \text{const}_1 \ln \left[ \frac{\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (\bar{z}(x;t))}{\theta \begin{bmatrix} \alpha + \Delta_1/2 \\ \beta + \Delta_2/2 \end{bmatrix} (\bar{z}(x;t))} \right] + \text{const}_2.$$

Прежде чем ее обсудить, перепишем это выражение несколько иначе, внося характеристики в аргумент  $\theta$ -функций (о  $\theta_j$ -функциях см. обзор [7] или [8]). Одновременно обозначим через  $\bar{z}(x;t)$  весь аргумент  $\theta$ -функции, находящейся в числителе ( $\bar{z}(x;t) + B_\alpha + 2\pi i\beta = \bar{z}(x;t)$ ):

$$u(x;t) = \text{const}_1 \ln[\theta(\bar{z}(x;t))/\theta(\bar{z}(x;t) + \int_{P_\infty}^{P_0} d\bar{u})] + \dots; \quad (2)$$

здесь не выписано слагаемое, линейно зависящее от  $x, t$  и, следовательно, не представляющее интереса с точки зрения исследования особенностей.

Для получения вещественного решения какого-либо из уравнений (1), необходимо строить  $\theta$ -функцию по гиперэллиптической кривой  $\Gamma$ , обладающей антиинволюцией  $\tau$ . Для каждого из уравнений (1) имеются свои условия на пару  $\{\Gamma; \tau\}$  (см. [1], табл.1, рис.1-5). Вещественность решения накладывает условия на вектор  $\bar{z} = \bar{z}(x;t)$  (см. [1], формулы (8), (9), (11))<sup>1</sup>

$$\tau \bar{z} + d = \pm \bar{z} + A(P_0) \text{ — для уравнений (SG), (SL);} \quad (3)$$

$$\tau \bar{z} + d = \pm \bar{z} \text{ — для уравнений (SHG), (CHG), (SHL1), (SHL2), (CHL).} \quad (4)$$

Поясним входящие в эти формулы объекты. Мы считаем, что на  $\Gamma$  выбран канонический базис одномерных гомологий  $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ , в котором действие  $\tau$  записывается так:

$$\tau \vec{a} = T\vec{a}, \quad \tau \vec{b} = -(T^T)^{-1}\vec{b} + \Phi \vec{a};$$

тогда антиинволюция  $\tau: \Gamma \xrightarrow{\tau} \Gamma$  индуцирует антиинволюцию на  $\mathbb{C}^g$  (ее мы также обозначим буквой  $\tau$ ):

$$\tau \bar{z} = T^T \bar{z} \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{C}^g;$$

вектор  $d = \text{diag } \Phi T \in \pi i \mathbb{Z}^g$ .

При таком определении  $\tau$  на  $\mathbb{C}^g$  имеет место формула:  $\tau \int_l d\bar{u} = - \int_{\tau l} d\bar{u}$ , где  $d\bar{u}$  — нормированный (т.е.  $\oint_{a_k} du_j = 2\pi i \delta_{kj}$ ) базис голоморфных дифференциалов на  $\Gamma$ ,  $l$  — произвольный путь на  $\Gamma$ . Нам потребуется еще отображение Абеля:

$$\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{J}(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{2\pi i I; B\}; \quad A(P) = \int_{P_\infty}^P d\bar{u},$$

<sup>1</sup>В работе [1] при записи решений уравнения  $\Delta u = \text{ch } u$  допущена ошибка. Переставлены местами формулы для четного и нечетного (относительно  $\tau$ ) вектора  $\mathbf{z}(x;t)$ .

начальной точкой выбрана  $P_\infty$  (см. [1]). Определим стандартным образом и отображение Абеля для дивизоров:  $\mathcal{A}(D) = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(P_i)$ , если  $D = \sum_{i=1}^n P_i$ ,  $P_i \in \Gamma$ . Равенства (3), (4) рассматриваются по модулю периодов, т.е. в  $\mathcal{J}(\Gamma)$ , так что путь интегрирования в  $\mathcal{A}(P_0)$  роли не играет.

Хорошо известно (см. [8]), что любой вектор  $\vec{z} \in \mathcal{J}(\Gamma)$  можно представить в виде  $\vec{z} = \Delta - \mathcal{A}(D)$ , где  $D = \sum_{i=1}^g P_i$  — дивизор степени  $g$ ,  $\Delta = \Delta_{P_\infty}$  — вектор римановых констант. Если  $D$  неспециален, то это представление единственно, если специален, то неединственно. Индекс специальности  $k$  — количество пар  $\{P_i, P_j\} : P_i = \sigma P_j, i \neq j, \sigma$  — гиперэллиптическая инволюция на  $\Gamma$ . Теорема Римана (см. [8]) утверждает, что

$$\theta(\vec{z}) = 0 \Leftrightarrow \exists D = \sum_{i=1}^{g-1} P_i : \vec{z} = \Delta - \mathcal{A}(D),$$

т.е. для представления  $\vec{z}$  требуется дивизор  $D$  степени меньшей, чем  $g$ . Кратность нуля  $\text{mult } \theta(\vec{z}) = n + 2k \leq g - 1$ , где  $k$  — индекс специальности  $D$ ,  $n$  — количество точек  $P_\infty$  в  $D$ . Перепишем условия вещественности (3), (4) в новых обозначениях:

$$\pm \mathcal{A}(\tau D) + \mathcal{A}(D) + \mathcal{A}(P_0) + \mathcal{A}(\tau P_0) = 0, \quad (3a)$$

$$\pm \mathcal{A}(\tau D) + \mathcal{A}(D) + \mathcal{A}(\tau P_0) = 0. \quad (4a)$$

Здесь использовано равенство

$$\tau \Delta + \Delta = (g - 1)\mathcal{A}(\tau P_\infty) + d,$$

которое нетрудно доказать, изучая действие  $\tau$  на множество нулей  $\theta(\vec{z})$ .

**Замечание.** Вместе с  $\tau = \tau_1$  на  $\Gamma$  всегда существует еще одна антиинволюция  $\tau_2 = \sigma\tau$ , где  $\sigma$  — смена листов  $\Gamma$ . Если считать пары  $\{\Gamma; \tau_1\}$  и  $\{\Gamma; \tau_2\}$  разными, то в равенствах (3a), (4a) можно оставить один знак — плюс, поскольку вектор  $\vec{z}$ , антисимметричный относительно  $\tau$  (т.е.  $\tau \vec{z} = -\vec{z}$ ), будет симметричен относительно  $\tau_2$ :  $\tau_2 \vec{z} = \vec{z}$ .

Для каждого из уравнений (1) действие  $\tau$  на точки  $P_0, P_\infty$  однозначно определяется условиями вещественности (см. [1]), и мы получаем всего два уравнения:

$$\mathcal{A}(D) + \mathcal{A}(\tau D) + \mathcal{A}(P_0) = 0 \text{ для (SG), (SHL1), (SHL2), (CHL)}, \quad (5)$$

$$\mathcal{A}(D) + \mathcal{A}(\tau D) = 0 \text{ для (SL), (SHG), (CHG)}. \quad (6)$$

Точки дивизора  $D(x; t) = \sum_{i=1}^g P_i(x; t)$ , определяющего вещественное решение sine-уравнения  $(\vec{z}(x; t) = \Delta - \mathcal{A}(D(x; t)))$ , формула (2)), движутся по  $\Gamma$  так, что выполнено одно из равенств (5), (6). Когда одна из точек  $P_i$  „наезжает“ на  $P_\infty$  или две точки располагаются одна над другой (т.е.  $P_i = \sigma P_j, i \neq j$ ), то решение (2) имеет особую точку (для уравнений (1) с гиперболическими

функциями в правой части, еще требуется рассмотреть случай, когда  $D \supset P_0$  — это корень знаменателя).

Прежде чем перейти к рассмотрению каждого уравнения отдельно, заметим, что если  $\mathcal{A}(\tilde{D}) = 0$ , то существует функция с нулями в точках дивизора  $\tilde{D}$  и единственным полюсом в  $P_\infty$ . Для уравнения (6) это означает, что соответствующая функция будет иметь  $2g$  нулей, т.е. это полином. Нули полинома расположены парами:  $\{P_i; \sigma P_i\}$  и, значит,  $\forall x, t \exists D_1$ :

$$D + \tau D = D_1 + \sigma D_1. \quad (7)$$

Простейший анализ показывает, что в  $D$  содержатся точки трех типов: точки, лежащие на мнимых овалах  $P_i^1 = \tau \sigma P_i^1$ ; пары точек  $P_i^2 + \tau \sigma P_i^2$  и пары  $P_i^3 + \sigma P_i^3$ . Поскольку последние пары не дают вклада в  $\mathcal{A}(D)$ , то мы рассматривать их не будем. Окончательно:

$$D = \sum_{i=1}^{n_1} P_i^1 + \sum_{i=1}^{n_2} (P_i^2 + \tau \sigma P_i^2). \quad (8)$$

Для уравнения (5) это рассуждение не проходит, поскольку общий вид функции, имеющей  $2g + 1$  ноль и единственный полюс в бесконечности, это —  $\psi(P) = \mathcal{P}'(z) + y \cdot \text{const}$ , где  $y^2 = z P_{2g}(z)$  — уравнение  $\Gamma$ . (Здесь  $\mathcal{P}'(z)$  — полином степени не выше, чем  $g$ ). Исследовать расположение нулей этой функции непросто (сюда относится и случай уравнения (SG)). Однако что произойдет в точке особенности? Дивизор  $D$  будет иметь уже меньшую степень  $\deg D \leq g - 1$ , и для дивизора  $\tilde{D} = D + \tau D + P_0$  можно будет повторить предыдущее рассуждение:

$$D + \tau D + P_0 = D_1 + \sigma D_1. \quad (9)$$

Заметим также, что, взяв для  $\tilde{z}^0 = \tilde{z}|_{z_0}(x; t) = \Delta - \mathcal{A}(D_0)$  дивизор  $D_0$ , удовлетворяющий уравнению вещественности (5) или (6), и степени меньшей, чем  $g$ , мы получим (по формуле (2)) решение, обладающее соответствующей сингулярностью.

Перейдем к решению уравнений (5), (6).

**Уравнение  $\square u = \sin u$  (SG).** Уравнение (5) для  $D$  степени меньшей, чем  $g$ , неразрешимо, поскольку  $\tau P_0 = P_0$ , следовательно, кратность точки  $P_0$  в дивизоре  $\tilde{D} = D + \tau D + P_0$  нечетная, а полином может иметь в точке ветвления только четную кратность нуля. Значит, уравнение на особенности вещественного решения (SG) неразрешимо, все решения гладкие.

**Замечание.** Дивизор  $D(x; t) = \sum_{i=1}^g P_i(x; t)$ , определяющий вещественное решение уравнение (SG), сосредоточен в корнях функции

$$\psi(P) = z(P)P_{g-1}(z(P)) + y(P),$$

где  $P_{g-1}(z)$  — полином степени не выше  $g - 1$  с вещественными коэффициентами, причем из каждой пары сопряженных корней функции  $\psi(P)$  в  $D$  содержится только один (см. [4]).

Уравнение  $\square u = \text{sh } u$  (SHG). Вещественные решения этого уравнения строятся по кривой  $C_1$  (рис. 1):

$$y^2 = z \prod_{j=1}^{k_1} (z - b_{2j-1})(z - b_{2j}) \prod_{i=1}^{k_2} (z - a_i)(z - \bar{a}_i); \prod_{j=1}^{2k_1} b_j > 0, \Im a_i \neq 0.$$

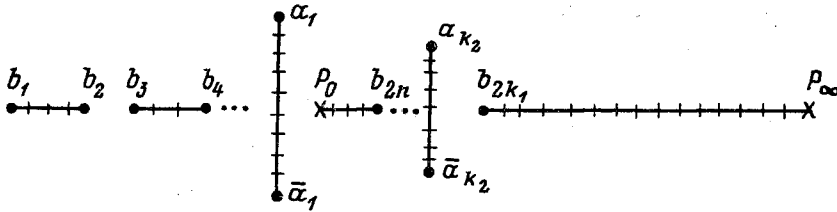


Рис. 1.

У этой кривой  $k_1 + 1$  вещественный и  $k_1 + 1$  мнимый овалы. Исследуем компоненты связности множества вещественных решений. Очевидным инвариантом компоненты является четность количества точек  $P_i$  на  $k$ -м мнимом овале, таким образом, решение имеет  $2^{k_1+1}$  вещественную компоненту. Какие компоненты не содержат сингулярных точек? Элементарное исследование показывает, что имеется единственный случай: максимальное число овалов, т.е. все точки ветвления вещественны ( $k_1 = g$ ) и точки  $P_0$  и  $P_\infty$  лежат на одном мнимом овале. В этом случае имеется единственная несингулярная компонента, соответствующая ситуации, когда каждая из  $g$  точек  $P_i$  лежит на своем, одном из  $g$  оставшихся мнимых овалов. Сингулярные компоненты имеют коразмерность 1, т.е. это линии на плоскости  $(x; t)$ .

Уравнение  $\square u = \text{ch } u$  (CHG). Кривая  $C_2$  (рис. 2):

$$y^2 = z \prod_{j=1}^{k_1} (z - b_{2j-1})(z - b_{2j}) \prod_{i=1}^{k_2} (z - a_i)(z - \bar{a}_i); \prod_{j=1}^{2k_1} b_j < 0, \text{Im } a_i \neq 0.$$

Кривая та же, что и в предыдущем примере, однако точки  $P_0, P_\infty$  расположены по-другому и не могут находиться на одном овале. Все компоненты множества решений сингулярны. Сингулярности типа линии на плоскости  $(x; t)$ .

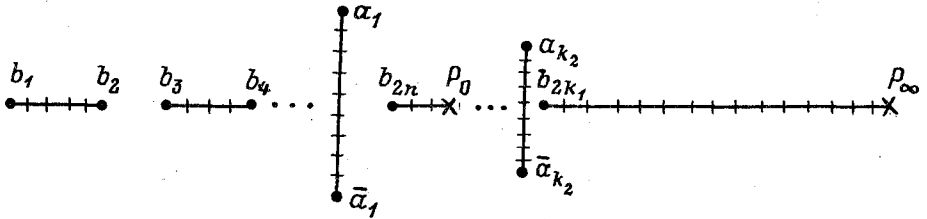


Рис. 2.

Уравнение  $\Delta u = \sin u$  (SL). Вещественные решения строятся по кривой  $C_3$  (рис.3):

$$y^2 = z \prod_{j=1}^{k_1} (z - e^{i\varphi_{2j}-1})(z - e^{i\varphi_{2j}}) \prod_{i=1}^{k_2} (z - a_i)(z - 1/\bar{a}_i); \varphi_j \in \mathbb{R}, |a_i| \neq 1.$$

Дивизор  $D(x; t)$  удовлетворяет уравнению (8). Пусть сначала  $D$  соответствует неособой точке. Это дает  $D = P_0 + D'$ , где  $D'$  не содержит точек  $P_0, P_\infty$  и пар  $P_i, \sigma P_i$ . Несингулярная компонента имеется только в том случае, когда каждой точке  $P_i$  предоставлен свой овал, т.е. когда все точки ветвления (кроме  $P_0, P_\infty$ ) лежат на окружности. В отличие от уравнения (SHG) несингулярная компонента имеется (при фиксированной  $\Gamma$ ) для обоих сопряжений  $\tau$  и  $\sigma\tau$  (иначе — и для вещественного, и для мнимого  $\bar{z}(x; t)$ ).

Для возникновения особенности необходимо, чтобы пара точек  $\{P_i; \tau\sigma P_i\}$  попала в  $\{P_0; P_\infty\}$ , поэтому коразмерность множества особенностей равна 2. Особенности — точки на плоскости  $(x; t)$ ; такие особенности называют вихрями, см [9,10].

Оставшиеся уравнения (SHL1), (SHL2), (CHL) характеризуются тем, что для регулярных точек выполняется лишь общее уравнение (5) и только для сингулярных точек (5) принимает форму (9). Ситуация такая же, как и для (SG), только уравнения на сингулярности ( $y$  (SHL2) и (CHL)) оказываются всегда разрешимыми. Схема рассуждения будет следующая: мы находим связные компоненты множества особенностей и смотрим, в каких компонентах связности множества вещественных решений эти особенности содержатся (они указаны в [1]). Если находится связная вещественная компонента, в которой не содержится ни один из представителей сингулярных компонент, то эта компонента без особенностей. Забегая вперед, скажем, что все решения (SHL2), (CHL) оказываются сингулярными, а все решения (SHL1) гладкие.

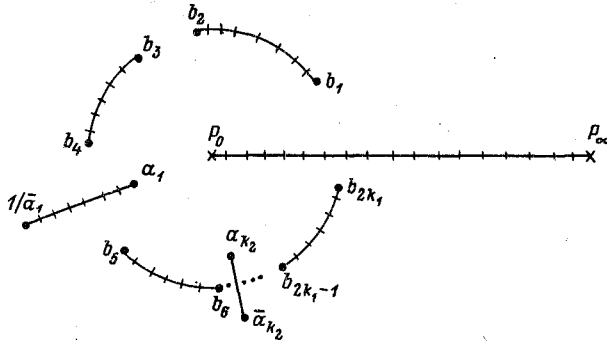


Рис. 3.

**Уравнение**  $\Delta u = -\text{sh } u$  (SHL1). Вещественные решения строятся по кривой  $C_3$ , не имеющей неподвижных точек ветвления ( $k_1 = 0$ ) (рис.4). Исследуем такие кривые. Возможны две ситуации:

1)  $g$  нечетное; имеется два овала:

а) оба овала вещественны; любую конфигурацию точек можно деформировать в  $D = (g-1)/2P_\infty + (g+1)/2P_0$ , т.е. имеется одна особая компонента;

б) оба овала мнимые; две компоненты; в одной содержится  $D_1 = (g-1)/2P_\infty + (g+1)/2P_0$ , а в другой —  $(g+1)/2P_\infty + (g-1)/2P_0$ ; в отличие от случая а) их нельзя деформировать одну в другую, не выходя за пределы множества особенностей;

2)  $g$  четное; имеется один овал:

а) этот овал мнимый; имеется одна компонента множества особенностей, в ней содержится  $D = P^1 + (g-2)/2P_\infty + g/2P_0$ ;

б) овал вещественный, для такой кривой уравнение (8) неразрешимо.

Проверка показывает, что все только что найденные  $D$  дают значения  $\bar{z} = \Delta - A(D)$ , лежащие в вещественных компонентах, относящихся к уравнению (SHL2). Для проведения этой проверки необходимо знать вектор  $\Delta$  — вектор римановых констант. Согласно [8], для базиса, указанного в [1],  $\Delta = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 2/2 & \dots & g/2 \end{bmatrix}$ . Следовательно, все решения (SHL) несингулярны.

**Замечание.** Дивизор  $D = \sum P_i(x; t)$  сосредоточен в нулях функции  $\psi(P) = z(P)P_{g-1}(z(P)) + y(P)$ , где  $P_{g-1}(z)$  — полином степени не выше  $g-1$ , с кор-



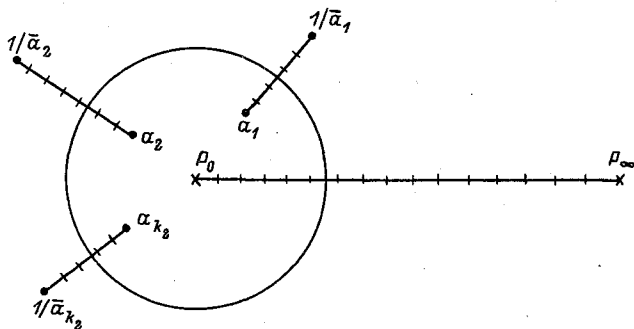


Рис. 4.

ными, симметричными относительно единичной окружности, и, кроме того, удовлетворяющий нормировке  $\mathcal{P}_{g-1}(0) = \pm \exp\{i \sum_{j=1}^g a_j\}$ .

**Уравнение**  $\Delta u = \text{sh } u$  (SHL2). Вещественные решения строятся по кривой  $C_3$  (рис.3). Случай отсутствия неподвижных точек ветвления только что разобран. Пусть имеются вещественные точки ветвления и соответственно как вещественные, так и мнимые овалы. Компоненты нумеруются четностью количества точек  $P_i$  на  $k$ -м мнимом овале. Помещая точки  $P_i$  в неподвижные точки ветвления, убедимся, что каждая особая точка попала на свою вещественную компоненту и все компоненты оказались заняты. Гладких вещественных решений нет.

**Замечание.** Дивизор  $D(x;t)$ , описывающий несингулярные точки, удовлетворяет тому же соотношению, что и в уравнении (SHL1), только нормировка такая:  $\mathcal{P}_{g-1}(0) = \exp\{i \sum_{j=1}^{2k_1} \varphi_j/2 + i \sum_{j=1}^{k_2} \arg a_j\}$ . Проекцию  $D$  на плоскость  $C_z$  можно получить, выбирая по одному представителю из пары сопряженных (относительно единичной окружности) корней уравнения

$$z \mathcal{P}_{g-1}^2(z) - \prod_{j=1}^{k_1} (z - e^{i\varphi_{2j-1}})(z - e^{e\varphi_{2j}}) \prod_{i=1}^{k_2} (z - a_i)(z - 1/\bar{a}_i)$$

(в случае,  $k_1 = 0$ , мы получим также условие на дивизор, описывающий решения (SHL1)).

Уравнение  $\Delta u = \text{ch } u(\text{CHL})$ . Вещественные решения строятся по кривой  $C_5$  (рис. 5):

$$y^2 = z \prod_{i=0}^{2n} (z - a_i)(z + 1/\bar{a}_i);$$

здесь род  $g = 2n + 1$  — нечетный.

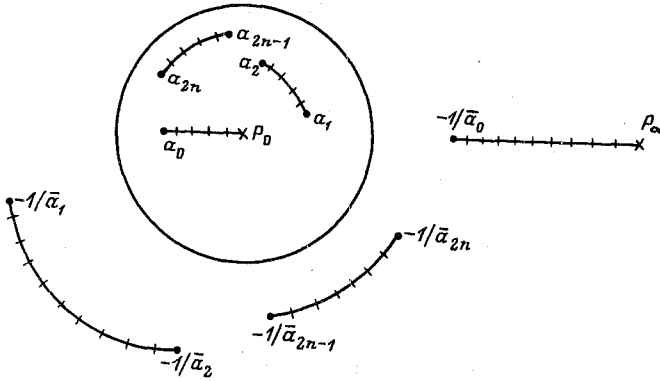


Рис. 5.

Кривая  $C_5$  не имеет ни вещественных, ни мнимых овалов. Сингулярных компоненты две, каждая находится на своей компоненте вещественности (их тоже две). Все решения сингулярны.

**Замечание.** Проекция несингулярных точек  $P_i(x; t)$  находятся в корнях уравнения

$$z P_{g-1}^2(z) - \prod_{j=0}^{2n} (z - a_j)(z + 1/\bar{a}_j) = 0,$$

где  $P_{g-1}(z)$  — полином степени не выше  $g - 1$  с нулями, симметричными относительно преобразования  $z \mapsto -1/\bar{z}$ , и нормировкой

$$P_{g-1}(0) = \pm \exp\left\{i \sum_{j=0}^{2n} \arg a_j\right\}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бабич В. М., *Вещественные конечнозонные решения уравнений, связанных с уравнением sine-Gordon*, Алгебра и анализ 2, вып. 3 (1990), 63–73.
- [2] Чередник И. В., *Об условиях вещественности в „конечнозонном“ интегрировании*, ДАН СССР 252, вып. 5 (1980), 1104–1108.
- [3] Дубровин Б. А., Натанзон С. М., *Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon*, Функцион. анализ и его прил. 16, вып. 1 (1982), 27–43.
- [4] Козел В. А., *Конечнозонные решения уравнений sine-Gordon и Sh-Gordon*, Дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук, ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1984, с. 1–105.
- [5] McKean H. P., *The sine-Gordon and sinh-Gordon Equations on the Circle*, Comm. Pure Appl. Math. 34 no. 2 (1981), 197–257.
- [6] Тайманов И. А., *Гладкие вещественные конечнозонные решения уравнений типа sin-Gordon*, Мат. заметки 47, вып. 1 (1990), 147–156.
- [7] Дубровин Б. А., *Тэта-функции и нелинейные уравнения*, Успехи мат. наук 36, вып. 2 (1981), 11–80.
- [8] Мамфорд Д., *Лекции о тэта-функциях*, Пер. с англ., Москва, М, 1988, с. 1–448.
- [9] Borisov A. V., Tankeyev A. P., Shagalov A. G., Besmaternih G. V., *Multi-vortex-like solutions of the sine-Gordon equation*, Phys. Lett. 111A no. 1,2 (1985), 15–18.
- [10] Бабич В. М., Гутшабаш Е. Ш., Липовский В. Д., Рыбин А. В., Салль М. А., Смирнов А. О., *Теория солитонов и некоторые аспекты слабой сверхпроводимости, Высокотемпературная сверхпроводимость. Актуальные проблемы*, 1990, с. 54–78.

Ленинградский институт  
авиационного приборостроения  
190000, Ленинград, ул. Герцена, 67

Поступило 24 апреля 1990 г.