

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 15 ноября 1949 г.

1. Б. А. Трахтенброт (Киев). «Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах».

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, 70, № 4 (1950), 569.

2. М. И. Ельшин. «Качественное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка».

С каждым открытым интервалом

$$a < t < b, \tag{1}$$

не исключая возможностей $a = -\infty$ или $b = +\infty$, связывается функциональное пространство

$$R \equiv \{ p, q \} \tag{2}$$

всех дифференциальных уравнений

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{3}$$

с непрерывными на интервале (1) коэффициентами.

Качественным проблемам уравнения (3) можно дать следующую формулировку. Из пространства (2) выделить многообразие, на котором общее решение уравнения (3) на интервале (1) обладает заданными свойствами.

Решение этих проблем по методу фаз, опубликованному мною в трёх статьях [ДАН 68, № 2, 68 № 5, 69 № 1 (1949)], осуществляется изучением функций, определяемых характеристическим оператором:

$$J[\theta; (p, q)] = \left(\theta - \frac{p}{2} \right)' + \theta^2 + q - \frac{p^2}{4} \tag{4}$$

на множестве всех допустимых θ , удовлетворяющих условиям: 1) θ непрерывна на интервале (1); 2) функция θ такая, что $\theta - \frac{p}{2}$ имеет непрерывную производную.

Преобразование уравнения (1) на множестве всех допустимых θ

$$x = y \exp \int_{t_0}^t \left(\theta - \frac{p}{2} \right) d\xi \tag{5}$$

приводит к уравнению для определения y :

$$(Ky')' + Gy = 0, \tag{6}$$

где обозначено

$$K[\theta] = \exp 2 \int_{t_0}^t \theta d\xi; \quad G[\theta; (p, q)] = J \cdot K. \tag{7}$$

Для любых, непрерывных на интервале (1), коэффициентов p и q среди допустимых θ всегда существуют: $\theta = \theta_1$, для которых

$$\left| \int_{t_0}^c K^{-1} d\xi \right| = \infty, \quad c = b \quad (c = a); \quad (8)$$

$\theta = \theta_2$, для которых $G > 0$ ($a < t < b$); $\theta = \theta_3$, для которых $K \cdot G = 1$; $\theta = \theta_4$, для которых характеристический оператор даёт дифференцируемые функции, положительные на интервале (1).

При $\theta = \theta_3$ общий интеграл уравнения (3) имеет вид:

$$x = \frac{C_1 \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p d\xi \right]}{\sqrt{|\omega|}} \cos \left[\int_{t_0}^t \omega d\xi + C_2 \right], \quad (9)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и переменная частота $\omega(t) = \pm K^{-1}(\theta_3)$ определяется из квазидифференциального уравнения:

$$J \left[-\frac{\omega'}{2\omega}; (p, q) \right] = \omega^2. \quad (10)$$

При $\theta = \theta_4$ уравнение (6) можно записать в виде

$$\left(\frac{\exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda d\xi}{\sqrt{J}} y' \right)' + y \sqrt{J} \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda d\xi = 0, \quad (11)$$

где оператор $\lambda[\theta_4; (p, q)] = 4\theta_4 + J'/J$ называется декрементом уравнения (1). Во множество всех θ_4 всегда входят подмножества, на которых соответственно: $\lambda \leq 0$; $\lambda = 0$ и $\lambda \geq 0$.

Метод фаз приводит к следующим необходимым и достаточным условиям:

1° Существование θ , для которого на всём интервале (1) $J \leq 0$ равносильно неколебательному характеру решений (3).

2° Существование θ_2 , удовлетворяющего условиям:

$$J \geq 0, \quad \left| \int_{t_0}^t K^{-1} d\xi \right| = \infty; \quad \left| \int_{t_0}^t G d\xi \right| = \infty; \quad c = b \quad (c = a), \quad (12)$$

равносильно существованию счётного множества корней на интервале $t_0 \leq t < b$ ($a < t \leq t_0$) у всех решений уравнения (3).

3° Существование среди допустимых $\theta = \theta_1$, обеспечивающего неравенство

$$\left(\frac{4m^2}{\pi^2} - 1 \right) \omega_0^2 \leq J[\theta; (p, q)] \leq \left(\frac{4M^2}{\pi^2} - 1 \right) \omega_0^2, \quad (13)$$

где

$$\omega_0 = \frac{AK^{-1}}{\left(A + B \int_{t_0}^t K^{-1} d\xi \right)^2 + \left(\int_{t_0}^t K^{-1} d\xi \right)^2}, \quad (14)$$

при $A \neq 0$ и B — произвольных постоянных, определяемых из начальных условий (1) при $t = t_0$, равносильно утверждению

$$m < \left| \int_{t_0}^c \omega d\xi \right| < M, \quad c = b \quad (c = a). \quad (15)$$

4° Существование θ_4 , для которых

$$\lambda \geq 0; \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow c} \int_{t_0}^t \left(\theta - \frac{p}{2} \right) d\xi < \infty, \quad c = b \quad (c = a), \quad (16)$$

равносильно ограниченности амплитуд в (9) при $t \rightarrow b$ ($t \rightarrow a$).

5° Существование θ_4 , для которых

$$\lambda \geq 0; \quad \lim_{t \rightarrow c} \int_{t_0}^t \left(\theta - \frac{p}{2} \right) d\xi = -\infty, \quad c = b \quad (c = a), \quad (17)$$

равносильно затуханию амплитуд в (9) при $t \rightarrow b$ ($t \rightarrow a$).

6° Существование θ_4 , для которых

$$\lambda \leq 0; \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow c} \int_{t_0}^t \left(\theta - \frac{p}{2} \right) d\xi = \infty, \quad c = b \quad (c = a), \quad (18)$$

равносильно неограниченности амплитуд в (9) при $t \rightarrow b$ ($t \rightarrow a$).

Качественное решение конкретного уравнения (3) приводится к выяснению принадлежности его к одному или к нескольким многообразиям пространства (2), определяемых 1°–6° или другими условиями того же типа.

Значение качественных проблем уравнения (3) для приложений в различных отраслях математики, физики и техники определило большой интерес к этим проблемам, что привело к созданию обширной литературы по интересующему нас вопросу (мне известно около 200 статей).

Результаты этих работ относятся лишь к частным видам уравнения (3) и получаются применением классической теоремы Штурма (сравнение расстояний между корнями решений) в различных модификациях (например, Пиконе, уравнение Риккати у Н. В. Адамова и др.), дополненного преобразованиями Лиувилля (Журнал Лиувилля, т. II (1837)), у Аинса, Стретта, Борга (Acta Math., 1946 г.), Гартмана, Винтнера и др.

Для исследования вопросов ограниченности, устойчивости и асимптотического поведения решений используются: преобразование импульсов (Н. Е. Жуковский), метод характеристических чисел (А. М. Ляпунов, О. Перрон, Шпет) и преобразование живых сил (А. Кнезер и А. Вимаг).

Между тем сила результатов, полученных методом фаз, определяется разрывом с вековой традицией приводить уравнение (3) к каноническому виду и заменой классического преобразования, получающегося из (5) при $\theta = 0$ общим преобразованием (5). Алгебраическая аналогия, на которую указывали Ампер и Лагерр в своей теории инвариантов, оказалась неполной: существует целый оператор (4) таких инвариантов.

Вторым основанием метода фаз является переход от оценки расстояний между корнями решений к соотношению между фазами. Замена неравенств, используемых методом сравнения, интегральным соотношением:

$$\int_{t_0}^t \omega(1, \xi) d\xi - \int_{t_0}^t \omega(2, \xi) d\xi = \int_0^1 dx \int_{t_0}^t \frac{J_1 - J_2}{\omega(a, s)} \sin^2 \int_s^t \omega d\xi ds, \quad (19)$$

где $\omega(s, \alpha)$ — частота с не зависящими от α начальными условиями при $t = t_0$, соответствующая характеристическому оператору $J_\alpha = J_2 + \alpha [J_1 - J_2]$, даёт возможность преодолеть указанные А. Кнезером (Math. Ann., т. 42 (1893 г.)) трудности, стоящие на пути решения классической проблемы колебаний методом сравнения, и дать полное её решение (1°, 2° и 3°).

Естественность фазовых представлений (9) и оценки фазы методом уравнений в вариациях, которая используется мною при выводе (19), понимал ещё Штурм (Журн. Лиувилля, т. I (1836 г.)). Переход от оценки фазы к оценке расстояний между корнями решений был вызван отсутствием возможности перейти от вариаций к конечным изменениям. Этот переход был осуществлён мною (ДАН 18, № 3 (1938 г.)) только через 100 лет после мемуара Штурма.

Хотя возвращение к фазовым представлениям решений уравнения (3) и произошло в начале XX века (Клейн (1895 г.), Боль (1906 г.), Нихольсон (1911), Хамель (1913 г.), Маманна (1926 г.), Фавар (1929 г.) и др.), применяемые оценки фазы были слишком грубы, что много раз приводило к ошибочным выводам: Хамель (Math. Ann. (1913 г.)) делает ошибку, исправленную Хауптом (1919 г.). Такая же ошибка содержится и в посмертном мемуаре Фату (Парижские С. Р., 1929 г.), неправильность вывода которого об условиях ограниченности решений (3) была указана О. Перроном (O. Perron, Math. Zeitschr., 1931 г.). Обстоятельства, что эти ошибки не связаны с использованием фазового представления (9), а объясняются незаконным предельным переходом под знаком расходящегося несобственного интеграла, и что такую же ошибку допускает и А. Виман (Acta Math., 1936 г.) в преобразовании живых сил, до сих пор не достаточно осознаны.

Боязнь пользоваться методом фаз царит и до настоящего времени, хотя все оценки, которыми он пользуется, вполне законны. Так, американские учёные Винтнер и Гартман (Ann. of Math., 1943—1949 г.), которым известны мои работы 1938 г., 1940 г. и 1946 г., до сих пор предпочитают получать другими методами частные случаи результатов этих работ.

Заседание 22 ноября 1949 г.

1. Президент Общества П. С. Александров оглашает текст приветствия Общества товарищу И. В. Сталину по поводу знаменательного дня его семидесятилетия.

Собрание единодушно принимает текст приветствия.

2. Н. Н. Мейман. «Об оценках производных».

Доказаны следующие теоремы:

Теоремы 1. Пусть $f(x)$ — вещественная функция, дифференцируемая на интервале (a, b) , $\omega(x)$ — комплекснозначная функция, дифференцируемая на том же интервале, и

$$1) \quad |f(x)| \leq |\omega(x)|, \quad a \leq x \leq b,$$

2) при любом фиксированном φ аргумент функции $\Phi_\varphi(x) = e^{i\varphi} \omega(x) - f(x)$ не убывает на (a, b) .

При выполнении всех этих условий $\theta = \arg \omega(x)$ не убывает на (a, b) и

$$|f'(x)| \leq \cos(x - \beta) |\omega'(x)|, \quad (1)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{|f(x)|}{|\omega(x)|}, \quad \cos \beta = \frac{|\omega(x)'|}{|\omega'(x)|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\left| \frac{f(x_2)}{|\omega(x_2)|} - \frac{f(x_1)}{|\omega(x_1)|} \right| \leq 2 \cos \frac{\theta(x_2) - \theta(x_1)}{2} \sin \frac{\theta(x_2) - \theta(x_1)}{2}, \quad (2)$$

если

$$|\theta(x_2) - \theta(x_1)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

В частном случае, когда $|\omega(x)| = \text{const}$, неравенство (1) принимает вид

$$|f'(x)| \leq \sqrt{1 - \frac{|f(x)|^2}{|\omega|^2}} |\omega'(x)|. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть $\omega(z)$ — целая функция класса *НВ*, т. е. $|\omega(z)| > |\omega(\bar{z})|$ при $\text{Im } z < 0^1$, а $f(z)$ — целая вещественная функция. Если вдоль вещественной оси

$$|f(x)| \leq |\omega(x)|$$

и ∞ не является асимптотическим значением функции $\frac{f(z)}{\omega(z)}$ в нижней полуплоскости, тогда при любом t , по модулю большем 1, функция $F_t(z) = t\omega(z) - f(z)$ принадлежит классу *НВ*.

Аргумент функции класса *НВ* является на вещественной оси строго возрастающей функцией. Заставляя $|t| \rightarrow 1$, найдём, что функции, удовлетворяющие условиям теоремы 2, удовлетворяют вдоль всей вещественной оси условиям теоремы 1.

Теорема 3. Если функции $f(x)$ и $\omega(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то вдоль всей вещественности имеют место неравенства (1) и (2), и в случае $|\omega(x)| = \text{const}$ и неравенство (3).

Теорема 4. Если в неравенстве (1) имеет место знак равенства хотя бы в одной точке, в которой $|f| \neq |\omega|$, то $f(x) = \text{Re } e^{i\varphi} \omega(x)$, где φ — некоторая вещественная константа (f и ω из теоремы 2).

Если отбросить требование вещественности функции $f(x)$, то неравенства нужно несколько изменить.

Известное неравенство С. Н. Бернштейна для функций первого порядка σ , ограниченных по модулю на вещественной оси константой M , получается, если в качестве $\omega(x)$ взять функцию $Me^{i\sigma x}$. Результаты Б. Я. Левина (ДАН LXV, № 5 (1949)) тоже относятся только к функциям экспоненциального типа и являются частным случаем полученных неравенств, причём и сами неравенства несколько уточнены.

3. Ю. М. Смирнов. «О покрытиях топологических пространств».

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР 62, № 6 (1948) 749, и 59, № 7 (1948), 1257.

Заседание 29 ноября 1949 г.

Заседание посвящено памяти Павла Самуиловича Урысона в связи с 25-летием со дня его смерти.

По предложению Президента Общества П. С. Александрова собрание почтило память Павла Самуиловича Урысона вставанием.

Были прочитаны доклады:

1. Л. С. Понтрягин. «Работы П. С. Урысона в области геометрической топологии».
2. А. Н. Тихонов. «Работы П. С. Урысона по абстрактной топологии и анализу».
3. П. С. Александров. «Научная деятельность П. С. Урысона».

Заседание 6 декабря 1949 г.

1. По предложению Президента Общества П. С. Александрова собрание признало необходимым издание трудов П. С. Урысона и поручило Правлению Общества предпринять шаги в этом направлении.

2. А. Н. Колмогоров. «Основные типы Марковских процессов».

¹⁾ О функциях класса *НВ* смотри Н. Мейман, ДАН XI, № 2 и № 5 (1943), и подробно в монографии Н. Г. Чеботарёва — Н. Н. Меймана по проблеме Рауса-Гурвица.

Заседание 13 декабря 1949 г.

1. А. Д. Мышкис (Рига). «Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом».

Вначале рассматривается уравнение

$$y'(x) - M(x)y(x - \Delta(x)) = 0 \quad (M(x) \geq 0, \Delta(x) \geq 0, A \leq x < B; -\infty < A < B \leq \infty). \quad (1)$$

Начальные условия задаются в соответствии с общей постановкой, приведённой в статье [1] (см. также [2]). Для этого предположим, для простоты, что

$$\Delta_0 = \sup_{[A, B)} \Delta(x) < \infty$$

и на отрезке

$$[\inf_{[A, B)} \{x - \Delta(x)\}, A] \quad (2)$$

зададим функцию $\varphi(x)$. Функция $y(x)$ ($A \leq x < B$) называется решением уравнения (1), если при подстановке в это уравнение она обращает его в тождество; при этом должно быть $y(A) = \varphi(A)$ и всюду, где $x - \Delta(x) < A$, надо полагать в уравнении (1), что

$$y(x - \Delta(x)) \equiv \varphi(x - \Delta(x)).$$

Мы предположим, что $M(x)$, $\Delta(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны. Тогда на основании [1] указанное решение $y(x)$ существует и единственно.

Из уравнения (1) легко вывести, что если $\varphi(x) \geq 0$, то $y(x)$ монотонно не убывает при $A \leq x < B$. А так как в качестве начальной точки вместо A можно взять любую точку участка $[A, B)$, то отсюда можно получить классификацию всех решений.

Будем считать, что $B = \infty$. Тогда решение будет обязательно одного из следующих видов:

а) $y(x) \neq 0$ при $A \leq x < \infty$. Для оценки таких решений доказана теорема о сравнении, которая утверждает, что при определённых ограничениях значение решения при любом данном $x \geq A$ возрастает, если увеличивать функции $M(x)$ и $\varphi(x)$ и уменьшать функцию $\Delta(x)$.

Если обозначить

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = \beta, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} M(x) = r, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = s \quad (3)$$

и если $r < \infty$, то при $x \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ будет

$$e^{[\lambda(\alpha s) - \varepsilon]x} = o(y(x)), \quad y(x) = o(e^{[\lambda(\beta r) + \varepsilon]x}), \quad (4)$$

где $\lambda(p)$ есть (единственный) вещественный корень уравнения

$$\lambda - e^{\lambda p} = 0.$$

б) $y(x)$ меняет знак на каждом отрезке $[a, a + \Delta_0]$ ($A \leq a < \infty$). Если дополнительно

$$k = \Delta_0 \cdot \sup_{[A, \infty)} M(x) \leq 1, \quad (5)$$

то

$$|y(x)| \leq \max_{(2)} |\varphi(x)| \cdot k^{\frac{x-A}{\Delta_0}} \quad (A \leq x < \infty) \quad (6)$$

(в рассматриваемом случае обязательно $\Delta_0 > 0$).

в) $y(x) \equiv 0$; это будет тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \equiv 0$.

г) Смешанный случай б) — а). Найдётся значение $D \in [A, \infty)$ такое, что $y(x)$ меняет знак на каждом отрезке $[a, a + \Delta_0]$ ($A \leq a < D$), в то время как $y(x) \neq 0$ при $x > D + \Delta_0$. Тогда оценки (4) всё равно верны. В случае (5) на отрезке $[A, D]$ справедлива оценка (6).

д) Смешанный случай б) — в). Найдётся значение $D \in [A, \infty)$ такое, что $y(x)$ меняет знак на каждом отрезке $[a, a + \Delta_0]$ ($A \leq a < D$), в то время как $y(x) \equiv 0$ при $x \geq D + \Delta_0$. В случае (5) справедлива оценка (6).

Итак, если отставания весьма малы, то решение $y(x)$ при $x \rightarrow \infty$ либо возрастает по абсолютной величине со скоростью экспоненты, подобно уравнениям без отставания, либо стремится к нулю, причём тем быстрее, чем меньше $\Delta(x)$.

Далее рассматривается уравнение

$$y'(x) + M(x)y(x - \Delta(x)) = 0 \quad (M(x) \geq 0, \Delta(x) \geq 0, A \leq x < B; -\infty < A < B \leq \infty) \quad (7)$$

при той же постановке начальной задачи, в предположении непрерывности $M(x)$, $\Delta(x)$ и $\varphi(x)$.

В основе исследования лежит теорема о сравнении решений, убывающих по абсолютной величине. Эта теорема формулируется (и доказывается) сложнее, чем для уравнения (1). Отметим, в качестве особенности, что различные решения сравниваются не при равных абсциссах, как это обычно делается, а при равных ординатах (т. е., по существу, неравенствами соединяются функции, обратные для решений).

При помощи теоремы о сравнении получается, прежде всего, условие постоянного колебания решения. Именно, если $B = \infty$, $\alpha < \infty$ (см. (3)) и

$$\beta s > \frac{1}{e},$$

то множество корней решения $y(x)$ всегда неограниченно справа. Эта оценка является точной: уже уравнение

$$y'(x) + y\left(x - \frac{1}{e}\right) = 0$$

обладает решением $y = e^{-ex}$, не имеющим корней.

Если $B = \infty$, $\Delta_0 < \infty$ и

$$\inf_{[A, \infty)} M(x) \cdot \inf_{[A, \infty)} \Delta(x) < \frac{1}{e},$$

то возможны решения с ограниченным множеством корней. Для таких решений

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) e^{\inf M(x) \cdot \lambda^* (\inf M(x) \cdot \inf \Delta(x)) x} \quad (8)$$

существует и конечен; тут $\lambda^*(p)$ есть абсолютная величина большего из отрицательных корней уравнения

$$\lambda + e^{-\lambda p} = 0.$$

Выясняется, при каких ограничениях, наложенных на коэффициенты, всякое решение уравнения (7) стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Если $0 < \beta \leq \alpha < \infty$ (см. (3)) и $B = \infty$, то достаточным условием этого будет неравенство

$$\alpha r < \frac{3}{2}.$$

Это неравенство также является точным: построен пример уравнения (7), для которого $\alpha r = \frac{3}{2}$, обладающего решением $y \not\rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Рассмотрен также вопрос о частоте перемены знака решения на участке его колебания в некоторых частных случаях.

В дальнейшем исследуется поведение решений уравнения (7) при достаточно малых отставаниях. Именно, мы будем предполагать, что $B = \infty$,

$$\Delta_0 < \infty, M_0 = \sup_{[A, \infty)} M(x) < \infty, 0 < \Delta_0, M_0 < \frac{1}{4}.$$

Основным фактом является расщепление совокупности всех решений на медленно затухающие и быстро затухающие. К первым относятся те решения, для которых при некотором $C > 0$ и всех достаточно больших x будет

$$|y(x)| > C \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4M_0\Delta_0}} \right)^{-\frac{x}{\Delta_0}} \quad (9)$$

(оценка $|y(x)|$ сверху вытекает из конечности предела (8)). Ко вторым — те решения, для которых при некотором $C > 0$ будет

$$|y(x)| < C \left(\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4M_0\Delta_0}} \right)^{-\frac{x}{\Delta_0}}. \quad (10)$$

Всякое решение обязано быть либо медленно затухающим, либо быстро затухающим; промежуточная скорость стремления к нулю при $x \rightarrow \infty$ исключена. Это расщепление особенно заметно при весьма малых Δ_0 , когда правая часть (9) близка к Ce^{-M_0x} , а правая часть (10) стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ как экспонента с произвольно большим коэффициентом в показателе.

Решение можно распределить также и по характеру их колебания. Они будут иметь один и только один из следующих видов:

а) $y(x) \neq 0$ при $A \leq x < \infty$;

б) $y(x)$ меняет знак на каждом отрезке $[a, a + \Delta_0]$, ($A \leq a < \infty$);

в) $y(x) \equiv 0$;

г) смешанный случай б) — а) или б) — в). Найдётся значение $D \in [A, \infty)$ такое, что $y(x)$ меняет знак на каждом отрезке $[a, a + \Delta_0]$, ($A \leq a < D$), в то время как при $x \geq D + \Delta_0$ совокупность корней $y(x)$ связна или пуста.

Отметим, что весь анализ решений уравнений (1) и (7) автоматически переносится на тот случай, когда отставание Δ зависит не только от x , а, например, и от $y(x)$, т. е. имеет вид $\Delta = \Delta(x, y(x))$ и т. п.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Мышкис, Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Успехи матем. наук, IV: 5 (33) (1949), 99—141.
 [2] А. Мышкис, Гистеро-дифференциальные уравнения, Успехи матем. наук, IV: 1 (29) (1949), 190—193.

3. А. А. Абрамов «Топологические инварианты римановых пространств».

В докладе рассматриваются вопросы получения топологических инвариантов римановых пространств и пространств аффинной связности интегрированием тензорных полей, строящихся дифференциально геометрическим образом, а также выписываются для этих полей формулы Гаусса-Бонне.

Пусть на n -мерном римановом пространстве R_n с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ определено кососимметрическое тензорное (или псевдотензорное) поле $\Omega_{i_1 \dots i_p}$ такое, что $\Omega_{i_1 \dots i_p} = F_{i_1 \dots i_p} \left(\dots, g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}, \dots, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \dots}, \dots \right)$ — аналитические функции своих аргументов для их действительных значений при положительно определённой форме $g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$.

Пусть C_p компактное p -мерное гладкое ориентированное (для псевдотензоров с внешней ориентацией) подмногообразие R_n .

Скажем, что $\Omega_{i_1 \dots i_p}$ даёт топологический инвариант, если $\int \Omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$ не зависит от $g_{\alpha\beta}$.

Назовём $\Omega_{i_1 \dots i_p}$ и $\bar{\Omega}_{i_1 \dots i_p}$ эквивалентными, если всегда

$$\int_{C_p} \Omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} = \int_{C_p} \bar{\Omega}_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}.$$

Обозначим $\Pi_{i_1 \dots i_p} = R_{\beta, [i_1 i_2}^{\alpha} R_{\gamma]}^{\beta} i_3 i_4 \dots R_{[\gamma]}^h i_{4p-1} i_{4p}]^1$ и для чётного

$$\tilde{\Pi}_{i_1 \dots i_n} = \frac{R_{[i_1 i_2, \alpha_1 \alpha_2} \dots R_{i_{n-1} i_n] \alpha_{n-1} \alpha_n^2}}{\sqrt{g}},$$

где $R_{\alpha, ij}^{\beta}$ — тензор кривизны и $g = \det \|g_{\alpha\beta}\|$. Рассмотрим поля типов:

$$\Phi_{i_1 \dots i_p} = \sum C \Pi_{[i_1 \dots i_p]}, \tag{1}$$

$$\tilde{\Phi}_{i_1 \dots i_n} = C \tilde{\Pi}_{i_1 \dots i_n} \quad (C - \text{постоянные}). \tag{2}$$

Теорема 1. Полями типов (1) и (2) даются все поля, с точностью до эквивалентных, дающие топологические инварианты.

Оказывается, что в аналогичной задаче для n -мерных пространств аффинной связности A_n полями (1) даются все нужные поля (теорема 2).

Для полей (1) выписывается в A_n формулы Гаусса-Бонна. Пусть в A_n C_{p-1} ограничивает V_p и пусть на C_{p-1} задано поле n -репера E . Для каждого E и $\Phi_{i_1 \dots i_p}$ на C_{p-1} строится кососимметрическое ковариантное тензорное поле $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}$ такое, что

$$\int_{V_p} \Phi_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} = \int_{C_{p-1}} \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} du^{\alpha_1} \dots du^{\alpha_{p-1}}$$

не зависит от исходной аффинной связности и не меняется при непрерывной деформации E (теорема 3).

Совместные заседания Механико-математического факультета Московского Государственного университета и Московского математического общества, посвящённые семидесятилетию со дня рождения товарища И. В. Сталина

Заседание 23 декабря 1949 г.

Открывая собрание, декан факультета В. В. Голубев выступил с речью, посвящённой знаменательной дате 70-летия со дня рождения Иосифа Виссарионовича Сталина и отметил известные всему миру успехи советской науки, достигнутые в Сталинскую эпоху благодаря мудрому руководству великого Сталина.

С докладами выступили:

1. А. А. Космодемьянский. «И. В. Сталин — великий корифей науки».

1) Найдено Понтрягиным.

2) Найдено Понтрягиным и Аллендорфером.

2. А. Н. Колмогоров. «Развитие математики в Сталинскую эпоху».
3. Б. В. Кукаркин. «Современные представления о строении и развитии звёздных систем».

Заседание 28 декабря 1949 г.

Открывая собрание, посвящённое исторической дате семидесятилетия со дня рождения Иосифа Виссарионовича Сталина, с вступительным словом выступил Президент Общества П. С. Александров, который отметил огромное значение товарища И. В. Сталина, как корифея науки.

С докладами выступили:

1. И. Г. Петровский. «Развитие теории дифференциальных уравнений в советский период».

2. А. А. Ильюшин. «Развитие советской школы теории пластичности».

3. А. Я. Хинчин. «Советская школа теории вероятностей».

Закрывая юбилейные заседания Механико-математического факультета МГУ и Московского математического общества, посвящённые 70-летию товарища И. В. Сталина, Президент Общества П. С. Александров обращается с пожеланиями многих лет жизни, здоровья и продолжения такой же гениальной и творческой деятельности товарищу Иосифу Виссарионовичу Сталину.

Собрание устраивает бурную овацию в честь Иосифа Виссарионовича Сталина.