УДК 513.836

Характер Чженя — Дольда в кобордизмах. I

В. М. Бухштабер (Москва)

Введение

Формулировка результатов

Первоначально настоящая работа была стимулирована следующей задачей С. П. Новикова: дать эффективное описание отображения комплексных многообразий $f: M^n \to M^m$ в терминах группы унитарных бордизмов $U_*(M^m) \otimes Q$, где Q — поле рациональных чисел. Решение этой задачи содержится в § 1 и основано на полученной формуле для характера Чженя — Дольда ch^U в теории U_*:

$$\mathrm{ch}^{U_*}: U_* \to \mathcal{H}_*(\ ;\Omega_*^U \otimes Q),$$

где $\Omega_*^U = U_*$ (точка) (определение ch^U см. ниже).

Основными результатами настоящей работы являются:

a) вывод формул для характера Чженя — Дольда ch^U и ch_U в теории унитарных бордизмов U_* и кобордизмов U^* соответственно (см. §§ 1, 2);

b) вывод формулы формального ряда над кольцом Ω_U^*, задающего сложение в формальной группе «геометрических» кобордизмов и формулы для ряда $(k\Psi_U^k(u))$, где $u \in U^2(CP^\infty)$ и Ψ_U^k — операторы Адамса в U^*-теории, введенные в работе [9] (см. § 4).

В работе [9] структура формальной группы «геометрических» кобордизмов описана в терминах ряда А. С. Мищенко $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1} \in U^2(CP^\infty) \otimes Q$. Как показано в § 3, ряд $g(u)$ однозначно определяется формулой $\mathrm{ch}_U(g(u)) = x$, где x — образующая группы $H^2(CP^\infty; \mathbf{Z})$. Такая интерпретация ряда $g(u)$ позволила получить ряд результатов об операциях в теории унитарных кобордизмов U^* и об операциях из теории U^* в теорию $\mathcal{H}^*(;\Omega_U^* \otimes Q)$ (см. § 3). Например, a) получены формулы формальных рядов $\varepsilon(u)$, задающих мультипликативные проекторы в кобордизмах, введенные в работе [2], что является ответом на вопрос Дж. Ф. Адамса (см. [2]); b) получены формулы для мультипликативных операций $\Pi_n: U^* \to \mathcal{H}^*(;\Omega_U^* \otimes Q)$, однозначно определяемых условиями $\Pi_n^*(1) = 1$, $\Pi_n^*([CP^i]) = 0$, $0 < i \neq n$, $\Pi_n^*([CP^n]) = [CP^n]$, и показано, что для любого комплекса X и числа n операция Π_n разлагается в композицию

$$\Pi_n: U^*(X) \to \mathcal{H}^*\left(X;\ \Omega_U^*\left[\frac{1}{n+1}\right]\right) \to \mathcal{H}^*(X;\ \Omega_U^* \otimes Q).$$

Определение и общие свойства характера Чженя — Дольда

Пусть $h^* = \sum h^n$ — обобщенная теория когомологий и h^* (точка) $= \Lambda^* = \sum \Lambda_n$.

Определение 1. Характером Чженя — Дольда для теории h^* называется отображение теорий когомологий

$$\mathrm{ch}_h : h^* \to \mathcal{H}^*(\ ;\ \Lambda^* \otimes Q);\quad \mathcal{H}^i(\ ;\ \Lambda^* \otimes Q) = \sum_{l \geqslant 0} H^l(\ ;\ \Lambda^{i-l} \otimes Q),$$

которое для X-точка представляет собой канонический гомоморфизм $\Lambda^* \to \Lambda^* \otimes Q$, где H^* — классические когомологии.

Теорема существования и единственности характера Чженя — Дольда доказана впервые Дольдом (см. [5]). В случае, когда h^* — Z_2-градуированная K-теория, характер Чженя — Дольда ch_h совпадает с известным характером Чженя ch (см. [5]). Этим объясняется наш выбор названия и обозначения для отображения ch_h.

Для любой обобщенной теории гомологий $h_* = \sum h_n$ существует аналогично определяемый характер Чженя — Дольда

$$\mathrm{ch}^h : h_* \to \mathcal{H}_*(\ ;\ \Lambda_* \otimes Q).$$

Перечислим основные свойства характера Чженя — Дольда ch_h:

a) *Для любого конечного комплекса X гомоморфизм* $\mathrm{ch}_h \otimes Q : h^*(X) \otimes Q \to \mathcal{H}^*(X;\ \Lambda^* \otimes Q)$ *является изоморфизмом.*

b) *Если теория h мультипликативна, то* ch_h *— кольцевой гомоморфизм.*

Пусть A^h — кольцо Стинрода стабильных операций в теории h. Действие кольца A^h на Λ^* позволяет для любого X в группе $\mathcal{H}^*(X;\ \Lambda^* \otimes Q)$ ввести структуру A^h-модуля.

c) *Характер Чженя — Дольда* ch_h *является гомоморфизмом A^h-модулей.*

Доказательство этих свойств легко следует из конструкции характера Чженя — Дольда, данной в [5].

Определение 2. Характером Чженя в теории h называется мультипликативное отображение

$$\chi_h : K^*(X) \to h^*(X) \otimes Q,$$

однозначно определяемое условием $\mathrm{ch}_h(\chi_h(\xi)) = \mathrm{ch}\,\xi$ для любого $\xi \in K^*(X)$.

Из свойства a) характера Чженя — Дольда следует, что для любого одномерного расслоения ξ над конечным комплексом X имеет место формула

$$\chi_h(\xi) = e^g,\quad \mathrm{ch}_h(g) = c_1(\xi),$$

где c_1 — первый класс Чженя расслоения ξ.

В работе [9] определен характер Чженя $\sigma\mathrm{h} : K^* \to U^* \otimes Q$. Как показано в § 3, характеры Чженя $\sigma\mathrm{h}$ и χ_h совпадают.

§ 1. Определение и свойства обобщенного класса Тодда. Формула для характера Чженя — Дольда в теории унитарных бордизмов

Пусть U^* — теория унитарных кобордизмов. Как известно, $U^*(*) = \Omega_U^* = \mathbf{Z}[y_1, \ldots, y_n, \ldots]$, $\dim y_n = -2n$ (см. [10]). Кольцо A^U описано в [9].

Для любого комплексного расслоения ξ над X, $\dim \xi = n$, определен универсальный класс Тома $u(\xi) \in U^{2n}(M(\xi))$, соответствующий отображению $M(\xi) \to MU(n)$, где $M(\xi)$ — комплекс Тома расслоения ξ. Изоморфизм Тома $U^i(X) \to \widetilde{U}^{i+2n}(M(\xi))$, определяемый классом $u(\xi)$, обозначим через φ_U. В теории когомологий $\mathcal{H}^*(\ ; \Omega_U^* \otimes Q)$ зафиксируем изоморфизм Тома φ_H, определяемый классом Тома $\mu_{\mathbf{Z}}(u(\xi))$, где $\mu_{\mathbf{Z}} : U^* \to H^*(\ ; \mathbf{Z})$ — естественная аугментация унитарных кобордизмов.

Определим характеристический класс $\mathcal{P}(\xi)$ расслоения ξ по формуле

$$\mathcal{P}(\xi) = \varphi_H^{-1} \operatorname{ch}_U u(\xi) \in \mathcal{H}^0(X; \Omega_U^* \otimes Q).$$

Непосредственно из определения характеристического класса $\mathcal{P}(\xi)$ следует, что $\mathcal{P}(n) = 1 \in \mathcal{H}^0(X; \Omega_U^* \otimes Q)$, где n — тривиальное расслоение, и для любых ξ и η имеет место формула $\mathcal{P}(\xi + \eta) = \mathcal{P}(\xi) \cdot \mathcal{P}(\eta)$. Это позволяет определить экспоненциальный гомоморфизм

$$\mathcal{P} : K^0(X) \to (1 + \widetilde{\mathcal{H}}^0(X; \Omega_U^* \otimes Q)).$$

Определение 1.1. Обобщенным классом Тодда $T(\xi)$ комплексного расслоения ξ называется характеристический класс $\mathcal{P}(-\xi)$.

Для квазикомплексного многообразия M^{2n} положим $T(M^{2n}) = T(\tau(M^{2n}))$, где τ — касательное расслоение к M^{2n}.

Лемма 1.2. *Обобщенный класс Тодда расслоений является единственным характеристическим классом со значениями в теории когомологий $\mathcal{H}^*(\ ; \Omega_U^* \otimes Q)$, удовлетворяющим условиям:*

a) *для любых расслоений ξ и η над X имеет место формула $T(\xi + \eta) = T(\xi) \cdot T(\eta)$;*

b) *для любого квазикомплексного многообразия M^{2n} имеет место формула*

$$(T(M^{2n}), \langle M^{2n} \rangle) = [M^{2n}],$$

где $[M^{2n}]$ — класс бордизмов многообразия M^{2n} и $\langle M^{2n} \rangle$ — фундаментальный класс в когомологиях.

Доказательство. Свойство а) класса T следует из соответствующего свойства для класса $\mathcal{P}$. Пусть $f : S^{2N+2n} \to MU(N)$, $N > n$, — отображение, соответствующее классу бордизмов $[M^{2n}]$, и $u_N \in U^{2N}(MU(N))$ — универсальный класс. Имеем: $f^* \operatorname{ch}_U(u_N) = [M^{2n}]$. Так как $\operatorname{ch}_U(u_N) = \varphi_H \mathcal{P}(\eta_N)$, где $\eta_N \to BU(N)$ — универсальное расслоение, то $f^* \operatorname{ch}_U(u_N) = \varphi_H \mathcal{P}(\nu)$, где ν — нормальное расслоение для вложения $M^{2n} \subset S^{2N+2n}$. Таким образом, $[M^{2n}] = (\varphi_H(\mathcal{P}(\nu)), \langle S^{2N+2n} \rangle) = (T(M^{2n}), \langle M^{2n} \rangle)$, и свойство b) доказано.

Итак, характеристический класс, удовлетворяющий условиям a) и b) леммы 1.2, существует. С другой стороны, любой характеристический класс T, удовлетворяющий условиям a) и b), определяет мультипликативное преобразование $\overline{\mathrm{ch}}_U : U^* \to \mathcal{H}^*(\ ;\ \Omega_U^* \otimes Q)$ такое, что для $u_N \in U^{2n}$ $(MU(N))$ $\mathrm{ch}_U(u_N) = \varphi_H T^{-1}(\eta_N)$ и для $X = *$ гомоморфизм $\overline{\mathrm{ch}}_U : \Omega_U^* \to \Omega_U^* \otimes Q$ представляет собой каноническое вложение. Следовательно, единственность обобщенного класса Тодда следует из единственности характера Чженя — Дольда. Лемма доказана.

Для любого комплексного расслоения ξ над X определен универсальный класс Тома $t(\xi) \in \widetilde{K}^0(M(\xi))$ такой, что для хопфовского расслоения ρ_n над CP^n имеет место формула

$$t(\rho_n) = (1 - \overline{\rho}_{n+1}) \in \widetilde{K}^0(CP^{n+1}),$$

где $\overline{\rho}_{n+1}$ — расслоение, комплексно сопряженное с расслоением ρ_{n+1}. В работе [6] показано, что, используя универсальный класс Тома $t(\xi)$, можно определить преобразование «Римана — Роха» $\mu : U^*(X) \to K^*(X)$ такое, что

a) $\mu(u(\xi)) = t(\xi)$ для любого расслоения ξ;

b) $\mu(\sigma_1(\xi)) = (\dim \xi) - \overline{\xi}$, где $\sigma_1(\xi) \in U^2(X)$ — первый класс Чженя расслоения ξ;

c) $\mu([M^{2n}]) = \mathrm{Td}(M^{2n})$ для любого квазикомплексного многообразия M^{2n}, где $\mathrm{Td}(M^{2n})$ — род Тодда в смысле Хирцебруха.

Обозначим через $K^{\#}$ и $H^{\#}$ соответствующие K-теории и обычным когомологиям Z_2-градуированные теории когомологий.

Лемма 1.3. *Описанное выше преобразование μ определяет отображение теорий когомологий $\mu : U^* \to K^{\#}$, причем имеет место формула*

$$\mu \cdot \mathrm{ch}_U = \mathrm{ch} \cdot \mu.$$

Доказательство. Обозначим через a образующую группы $H^2(S^2; \mathbf{Z})$. Положим $b = \sigma_1(\rho_1)$. Имеем: $\mu(b) = (1 - \overline{\rho}_1) = (\rho_1 - 1)$, $\mathrm{ch}\,\mu(b) = a$. Так как изоморфизм Ботта $\beta : K^0(X) \to K^0(S^2X)$ индуцирован умножением на элемент $(\rho_1 - 1) \in \widetilde{K}^0(S^2)$, то, используя определение преобразования μ (см. [6]), легко получить, что μ определяет преобразование теорий когомологий $\mu : U^* \to K^{\#}$. Формула $\mu \cdot \mathrm{ch}_U = \mathrm{ch} \cdot \mu$ следует теперь из того, что два отображения теорий когомологий $\mu \cdot \mathrm{ch}_U$ и $\mathrm{ch} \cdot \mu : U^* \to H^{\#}(\ ;\ Q)$ для $X = *$ определяют гомоморфизм $\Omega_U^* \to \mathbf{Z} \subset Q$, совпадающий с гомоморфизмом Тодда.

Классический класс Тодда расслоения ξ, соответствующий формальному ряду $Q(z) = -\dfrac{z}{e^{-z} - 1}$ (см. [12]), представляет собой характеристический класс $\mathrm{bh}(-\xi)$, где $\mathrm{bh}(\xi) = \varphi_H^{-1}\,\mathrm{ch}\,t(\xi)$. Из леммы 1.3 следует формула $\mu T(\xi) = \mathrm{bh}(-\xi)$. Этим объясняется наше название для характеристического класса $T(\xi)$.

Теорема 1.4. *Для любого комплексного векторного расслоения ξ над X имеет место формула*

$$T(\xi) = \exp\left\{\sum \frac{[N^{2i}]}{d(i)} \mathrm{ch}_i(\xi)\right\},$$

где ch_i — $2i$*-мерная компонента характера Чженя* $\mathrm{ch}(\xi)$, N^{2i} — *замкнутое квазикомплексное многообразие, однозначно определяемое условиями* $c_\omega(N^{2i}) = (c_{i_1}(N^{2i}) \ldots c_{i_k}(N^{2i}), \langle N^{2i}\rangle) = 0$, *если* $\omega \neq (i)$, *и* $c_i(N^{2i}) = (-1)^{i-1}(i-1)!\, d(i)$, *и где положительные числа* $d(i)$ *определяются следующим образом*:

$$d(1) = 2, \quad d(2n+1) = 1, \ n > 0,$$

и

$$\nu_p(d(2n)) = \begin{cases} 0, & \text{если } 2n \not\equiv 0 \bmod (p-1), \\ 1 + \nu_p(2n), & \text{если } 2n \equiv 0 \bmod (p-1), \end{cases} \qquad (*)$$

где $\nu_p(n)$ — *показатель при* p *в разложении числа* n *на простые множители.*

Доказательство. Стандартный замкнутый диск $D^{2n} \subset C^n$ можно рассматривать как компактное (U, fr)-многообразие, для которого $c_\omega(D^{2n}) = 0$, $\omega \neq n$, и $c_n(D^{2n}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ (см. [6]). Вычислим род Тодда $\mathrm{Td}(D^{2n})$, используя формулу $\left(-\frac{z}{e^{-z}-1}\right) = \exp\left\{\frac{z}{2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{B_t}{2t} \cdot \frac{z^{2t}}{(2t)!}\right\}$ (см. [1]), где B_t — число Бернулли. Имеем $\mathrm{Td}(D^{2n}) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Td}(D^{4n+2}) = 0$, $n > 0$, $\mathrm{Td}(D^{4n}) = (-1)^{n+1} B_n/2n$. Представим число $B_n/2n$ в виде несократимой дроби a_n/b_n. В работе [1] показано, что число b_n равно описанному в формулировке теоремы 1.4 числу $d(2n)$.

Применяя теорему 15.1 работы [6], мы получаем теперь, что существуют замкнутые квазикомплексные многообразия N^{2i} такие, что в группе $\Omega_{U,\mathrm{fr}}$ имеют место равенства $[N^2] = 2[D^2]$, $[N^{4n+2}] = [D^{4n+2}]$, $n > 0$, и $[\bar{N}^{4n}] = d(2n)[D^{4n}]$.

Пусть $s_\omega(\xi) \in H^{2n}(X; \mathbf{Z})$, $\omega = (i_1, \ldots, i_l)$, $\sum i_k = n$, — характеристический класс расслоения ξ, в записи через образующие Ву имеющий вид $\sum t_1^{i_1} \ldots t_l^{i_l}$. Рассмотрим характеристический класс $\widetilde{T} = \exp\left\{\sum \frac{[N^{2i}]}{s_{(i)}(N^{2i})} s_{(i)}(\xi)\right\}$ и покажем, что он удовлетворяет условиям леммы 1.2. Так как для любых ξ и η имеет место формула $s_{(i)}(\xi + \eta) = s_{(i)}(\xi) + s_{(i)}(\eta)$, то $\widetilde{T}(\xi + \eta) = \widetilde{T}(\xi) \cdot \widetilde{T}(\eta)$. Покажем, что класс $\widetilde{T}$ определяет тождественное отображение $\widetilde{T}: \Omega_U^* \to \Omega_U^*$. Так как $s_{(i)}(N^{2i}) \neq 0$ для любого i, то

$$\Omega_U^*/\mathbf{Z}[[N^2], \ldots, [N^{2i}], \ldots] = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n},$$

где все A_{2n} — конечные группы (см. [10], [8]). Поэтому достаточно показать, что гомоморфизм $\widetilde{T}$, ограниченный на кольцо $\mathbf{Z}[[N^2], \ldots, [N^{2i}], \ldots]$, является тождественным отображением, т. е. что $(\widetilde{T}(N^{2i}), \langle N^{2i}\rangle) = [N^{2i}]$. Имеем: $s_{(i)}(\xi) = (-1)^{i-1} i c_i + P(c_1, \ldots, c_{i-1})$. Следовательно,

$$(\widetilde{T}(N^{2n}), \langle N^{2n}\rangle) =$$

$$= \left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{[N^{2i}]}{s_{(i)}(N^i)} s_{(i)}\right\} \exp\left\{\frac{[N^{2n}]}{s_{(n)}(N^{2n})} s_{(n)}(\tau(N^{2n})\right\}, \langle N^{2n}\rangle\right) = [N^{2n}],$$

так как $c_\omega(N^{2n}) = 0$, $\omega \neq n$. Таким образом, мы доказали, что для любого ξ имеет место равенство $T(\xi) = \widetilde{T}(\xi)$. Вычислим $s_{(i)}(N^{2i})$. Имеем: $s_{(1)}(N^2) = s_{(1)}(2(D^2)) = 2 = d(1)$, $s_{(2i+1)}(N^{4i+2}) = s_{(2i+1)}(D^{4i+2}) = (2i+1)!$, $s_{(2i)}(N^{4i}) = (-1)^{2i-1} 2i \cdot d(2i) c_{2i}(D^{4i}) = (2i)!\, d(2i)$. Подставляя теперь числа $s_{(i)}(N^{2i})$ в формулу для класса T, мы получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: M^{2n} \to M^{2m}$ квазикомплексных многообразий. Обозначим через $\tau(f)$ элемент $(\tau(M^{2n}) - f^*\tau(M^{2m})) \in K^0(M^{2n})$. Пусть $[f] \in U_{2n}(M^{2m})$ — класс бордизмов отображения f. Применяя общую теорему Римана — Роха (см. [4]) к случаю $h_1 = U^*$, $h_2 = \mathscr{H}^*(\,;\Omega_* \otimes Q)$ и $\tau = \mathrm{ch}_U$, мы получаем теорему, позволяющую при помощи теоремы 1.4 вычислять класс бордизмов $[f]$.

Теорема 1.5. *Имеет место формула*

$$\mathrm{ch}_U D_U[f] = f_! T(\tau(f)),$$

где D_U — оператор двойственности Пуанкаре в кобордизмах, $f_!$ — гомоморфизм Гизина в когомологиях.

Отметим, что формула теоремы 1.5 особенно полезна в случае, когда f — вложение (в этом случае $\tau(f)$ — нормальный пучок) или когда f — гладкое расслоение со слоем квазикомплексное многообразие (в этом случае $\tau(f)$ — расслоение вдоль слоев).

Для любого конечного комплекса X и n-двойственного к нему комплекса D_nX имеет место естественный изоморфизм Ω_U-модулей (см. [7]):

$$\omega_U: \widetilde{U}_k(X) \xrightarrow{=} \widetilde{U}^{n-k-1}(D_nX).$$

Обозначим через ω_H изоморфизм Александера $\omega_H: \widetilde{H}_k(X) \xrightarrow{=} \widetilde{H}^{n-k-1}(D_nX)$. Изоморфизм ω_H позволяет определить естественный изоморфизм Ω_U-модулей

$$\omega_H: \widetilde{\mathscr{H}}_k(X; \Omega_*^U \otimes Q) \xrightarrow{=} \widetilde{\mathscr{H}}^{n-k-1}(D_nX; \Omega_U^* \otimes Q).$$

Для любого $x \in U_k(X) = \widetilde{U}_k(X \cup *)$ положим $\overline{\mathrm{ch}}^U x = \omega_H^{-1} \mathrm{ch}_U \omega_H x$ и определим естественный гомоморфизм Ω_*^U-модулей

$$\overline{\mathrm{ch}}^U: U_*(X) \to \mathscr{H}_*(X; \Omega_*^U \otimes Q), \quad x \to \overline{\mathrm{ch}}^U x.$$

Так как $\overline{\mathrm{ch}}^U$ определяет преобразование теорий гомологий и $\overline{\mathrm{ch}}^U(1) = 1$ для

$1 \in U_0(*)$, то из теоремы единственности для характера Чженя — Дольда следует, что $\overline{\mathrm{ch}}^U = \mathrm{ch}^U$.

Пусть M^{2n} — квазикомплексное многообразие и $\{M^{2n}\} \in U_{2n}(M^{2n})$ — его фундаментальный класс в бордизмах.

Теорема 1.6. *Имеем*

$$\mathrm{ch}^U \{M^{2n}\} = DT(M^{2n}),$$

где D — оператор двойственности в когомологиях.

Доказательство. Пусть ν — нормальный пучок к M^{2n} при вложении $M^{2n} \subset S^{2N+2n+1}$. По теореме Атья (см. [3]) имеет место формула $D_{2N+2n+1}(M^{2n} \cup *) = M(\nu)$. Из определения фундаментального класса $\{M^{2n}\}$ следует, что $\omega_U(\{M^{2n}\}) = u(\nu)$. Следовательно,

$$\mathrm{ch}^U \{M^{2n}\} = \omega_H^{-1} \mathrm{ch}_U \, \omega_U \{M^{2n}\} = DT(M^{2n}).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.7. *Пусть $x \in U_{2n}(X)$ — класс бордизмов отображения $f: M^{2n} \to X$, тогда $\mathrm{ch}^U(x) = f_* DT(M^{2n})$.*

Если комплекс X — H-пространство, то группы $U_*(X)$ и $\mathcal{H}_*(X; \Omega_*^U \otimes Q)$ являются кольцами относительно умножения Понтрягина.

Следствие 1.8. *Для любого H-пространства X гомоморфизм*

$$\mathrm{ch}^U : U_*(X) \to \mathcal{H}_*(X; \Omega_*^U \otimes Q)$$

является кольцевым.

Доказательство. Пусть $\alpha \in U_{2n}(X)$ и $\beta \in U_{2m}(X)$ — элементы, представителями которых являются отображения квазикомплексных многообразий $f_\alpha : M^{2n} \to X$, $f_\beta : M^{2m} \to X$. Рассмотрим композицию отображений

$$M^{2n} \times M^{2m} \xrightarrow{f_\alpha \times f_\beta} X \times X \xrightarrow{\varphi} X,$$

где φ — умножение в X. Имеем $\mathrm{ch}^U(\alpha \cdot \beta) = \varphi_*(f_\alpha \times f_\beta)_* D(T(M^{2n} \times M^{2m})) = f_{\alpha,*} DT(M^{2n}) \cdot f_{\beta,*} DT(M^{2m})$. Таким образом, следствие 1.8 доказано в частном случае, но, как известно, общий случай легко сводится к этому. Следствие доказано.

Замечание. Для H-пространств X, являющихся конечными комплексами, следствие 1.8 можно вывести непосредственно из формулы $\mathrm{ch}^U = \omega_H^{-1} \mathrm{ch}_U \, \omega_U$.

Для любого разбиения $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$, $|\omega| = \sum i_l = n$, рассмотрим гомоморфизм $s_\omega : \Omega_n^U \to \mathbf{Z}$, сопоставляющий классу бордизмов $[M^{2n}]$ число Чженя $s_\omega(M^{2n})$. Символом s_ω мы будем обозначать также гомоморфизм $\Omega_n^U \otimes Q \to Q$, продолжающий гомоморфизм s_ω, а число $s_\omega(\sigma)$ для любого $\sigma \in \Omega_n^U \otimes Q$ называть характеристическим числом элемента σ. Обозначим через $\Omega_n^U(\mathbf{Z})$ подгруппу в $\Omega_n^U \otimes Q$, порожденную элементами, характеристические числа s_ω которых являются целыми числами для всех разбиений ω, $|\omega| = n$.

Например, $\Omega_0^U(\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$ (образующая $1\in\Omega_0^U$), $\Omega_2^U(\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$ $\left(\text{образующая } \frac{[CP^1]}{2}\right)$, $\Omega_4^U(\mathbf{Z})=\mathbf{Z}+\mathbf{Z}$ $\left(\text{образующие } \frac{[CP^1]^2}{4} \text{ и } \frac{[CP^2]}{3}\right)$. Из свойств характеристических чисел Чженя легко следует, что группа $\Omega_*^U(\mathbf{Z})=\sum\Omega_n^U(\mathbf{Z})$ является градуированным кольцом. Естественное вложение $\Omega_U^*\subset\Omega_U^*(\mathbf{Z})$ определяет в кольце $\Omega_*^U(\mathbf{Z})$ структуру Ω_*^U-модуля.

Для клеточного комплекса X определим естественный гомоморфизм

$$\varkappa: H^*(X;\mathbf{Z})\to \operatorname{Hom}_{\Omega_*^U}(U_*(X),\Omega_*^U\otimes Q)$$

по формуле $\varkappa(y)(\alpha)=(y,\operatorname{ch}^U\alpha)$, где $y\in H^*(X;\mathbf{Z})$, $\alpha\in U_*(X)$. Имеет место теорема «целочисленности» для характера Чженя — Дольда в бордизмах.

Теорема 1.9. *Для любого клеточного комплекса X гомоморфизм $\varkappa$ разлагается в композицию*

$$H^*(X;\mathbf{Z})\to \operatorname{Hom}_{\Omega_*^U}(U_*(X),\Omega_*^U(\mathbf{Z}))\to \operatorname{Hom}_{\Omega_*^U}(U_*(X),\Omega_*^U\otimes Q).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого элемента $y\in H^{2k}(X;\mathbf{Z})$ и класса бордизмов $[M^{2n},f]\in U_{2n}(X)$ элемент $(y,\operatorname{ch}^U[M^{2n},f])$ принадлежит группе $\Omega_{2n-2k}^U(\mathbf{Z})$. Положим $(y,\operatorname{ch}^U[M^{2n},f])=\sigma$. Согласно следствию 1.7 имеет место формула $\sigma=(Df^*y,T(M^{2n}))$. Пусть $S_\omega\in A^U$—операция в кобордизмах, соответствующая разбиению ω (см. [9]). Легко проверить, что $s_\omega(\sigma)=(Df^*y,S_\omega T(M^{2n}))$, $|\omega|=n-k$, где S_ω рассматривается как операция в теории когомологий $\mathscr{H}^*(\ ;\Omega_U^*\otimes Q)$. Используя свойство с) характера Чженя — Дольда (см. введение) и определение операций S_ω (см. [9]), получаем

$$S_\omega T(M^{2n})=S_\omega(\varphi_H^{-1}\operatorname{ch}_U u(\nu))=\varphi_H^{-1}\operatorname{ch}_U S_\omega u(\nu)=\varphi_H^{-1}\operatorname{ch}_U(\varphi_U\cdot\sigma_\omega(\nu)),\qquad(1.10)$$

где $\sigma_\omega(\nu)\in U^{2n-2k}(M^{2n})$ — характеристический класс Коннера — Флойда нормального расслоения ν многообразия M^{2n}. Обозначим через $[M^{2k},g]\in U_{2k}(M^{2n})$ класс бордизмов $D_U\sigma_\omega(\nu)$, двойственный по Пуанкаре к $\sigma_\omega(\nu)$. Из равенств (1.10) получаем:

$$S_\omega T(M^{2n})=\varphi_H^{-1}\operatorname{ch}_U(\varphi_U\cdot D_U[M^{2k},g]).\qquad(1.11)$$

Комплекс Тома $T(\nu)$ двойствен по Спаньеру—Уайтхеду комплексу $M^{2n}\cup *$. Используя известные формулы $\omega_U=\varphi_U\cdot D_U$ и $\omega_H=\varphi_H\cdot D_H$ (см. [4]), из (1.11) получаем

$$S_\omega T(M^{2n})=D_H\omega_H^{-1}\operatorname{ch}_U\omega_U[M^{2k},g]=D_H\operatorname{ch}^U[M^{2k},g].\qquad(1.12)$$

Таким образом,

$$s_\omega(\sigma)=(f^*y,DS_\omega T(M^{2n}))=(f^*y,\operatorname{ch}^U[M^{2k},g])=(g^*f^*y,D_HT(M^{2k}))=$$
$$=(g^*f^*y,\langle M^{2k}\rangle),$$

и, следовательно, для любого разбиения ω, $|\omega|=n-k$, число $s_\omega(\sigma)$ является целым. Теорема доказана.

§ 2. Формула для характера Чженя — Дольда в теории унитарных кобордизмов

Пусть u — канонический образующий группы $U^2(CP^\infty)$. Рассмотрим отображение

$$f: \prod_{i=1}^{n} CP_i^\infty \to MU(n), \quad f^*(u(\eta_n)) = u_1 \ldots u_n,$$

где $u_i \in U^2(CP^\infty)$ и η_n — универсальное расслоение над $BU(n)$. Так как $f^*: U^*(MU(n)) \to U^*\left(\prod CP^\infty\right)$ — мономорфизм, то элемент $\mathrm{ch}_U(u(\eta_n)) \in U^{2n}(MU(n))$ полностью определяется формальным рядом

$$\mathrm{ch}_U(u) = x + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x^{i+1}, \quad \alpha_i \in \Omega_{-2i+2} \otimes Q, \ x = \mu_{\mathbf{Z}}(u) \in H^2(CP^\infty; \mathbf{Z}).$$

Отождествив, как обычно, кольцо $A = H^*(MU(n))$ с кольцом $f^*(A)$, получаем

$$\mathrm{ch}_U^{2n}(u(\eta_n)) = (x_1 \ldots x_n)(\alpha_n s_{(n)}(\eta_n) + \\ + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_1 s_{(n-1,1)}(\eta_n) + \ldots + \alpha_1^n s_{(1,\ldots,1)}(\eta_n)).$$

Используя те же рассуждения, что и во второй части доказательства теоремы 1.4, получаем следующую лемму.

Л е м м а 2.1. *Имеет место формула*

$$\mathrm{ch}_U(u) = x\left(1 - \sum \frac{z_n}{s_{(n)}(z_n)} x^n\right),$$

где $z_n \in \Omega_{-2n}$ *— класс бордизмов квазикомплексного многообразия* M^{2n} *такого, что* $s_\omega(-\tau(M^{2n})) = 0$, $\omega \neq (n)$, $s_{(n)}(M^{2n}) = s_{(n)}(\tau(M^{2n})) \neq 0$ *.

Введем характеристические классы Чженя $\bar\sigma_i(\xi) \in \mathcal{H}^{2i}(X; \Omega_U^* \otimes Q)$ комплексного векторного расслоения ξ над конечным комплексом X. Для любого одномерного расслоения ξ положим $\bar\sigma_1(\xi) = c_1(\xi) - \sum \frac{z_n}{s_{(n)}(z_n)} c_1(\xi)^{n+1}$. Легко проверить, что при таком выборе первого класса Чженя выполняются все условия существования классов Чженя в теории $\mathcal{H}^*(\ ; \Omega_U^* \otimes Q)$ (см. [6]). Положим $\bar\sigma(\xi) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \bar\sigma_i(\xi)$. Используя формулу $\bar\sigma(\xi + \eta) = \bar\sigma(\xi) \cdot \bar\sigma(\eta)$ и принцип расщепления для векторных расслоений, можно вывести формулы, связывающие классы $\bar\sigma_i(\xi)$ с характеристическими классами в когомологиях. Например, для любого ξ над X имеет место формула

$$\bar\sigma_1(\xi) = s_{(1)}(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{s_{(n)}(z_n)} s_{(n+1)}(\xi). \tag{2.2}$$

---

* Существование многообразий M^{2n} следует из того факта, что некоторое кратное любого набора из $\pi(n)$ целых чисел является набором чисел Чженя некоторого квазикомплексного мнообразия, где $\pi(n)$ — число разбиений числа n (см. [8], [10]).

Пусть $\sigma_i(\xi)\in U^{2i}(X)$ — класс Чженя расслоения ξ в теории кобордизмов U^* (см. [6]). Для канонического линейного расслоения η над CP^N имеем $\sigma_1(\eta)=u\in U^2(CP^N)$ (см. [6]). Так как $\mathrm{ch}_U(u)=x-\sum\frac{z_n}{s_{(n)}(z_n)}x^{n+1}$, то $\mathrm{ch}_U(\sigma_1(\eta))=\bar{\sigma}_1(\eta)\in\mathcal{H}^2(CP^N;\Omega_U^*\otimes Q)$. Из теоремы единственности для классов Чженя (см. [6]) мы получаем теперь, что для любого расслоения ξ над X и числа i имеет место формула $\mathrm{ch}_U\,\sigma_i(\xi)=\bar{\sigma}_i(\xi)$.

Теорема 2.3. *Для канонического элемента $u\in U^2(CP^\infty)$ имеет место формула*

$$\mathrm{ch}_U(u)=x+\sum[M^{2n}]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где M^{2n} — замкнутое квазикомплексное многообразие, однозначно определяемое условиями $s_\omega(-\tau(M^{2n}))=0$, $\omega\neq n$, $s_{(n)}(M^{2n})=-(n+1)!$, причем

a) $\mathrm{Td}(M^{2n})=(-1)^n$;

b) $\sigma_1(\xi_n)=[M^{2n-2}]a_n$, *где ξ_n и a_n—образующие групп $\widetilde{K}^0(S^{2n})$ и $H^{2n}(S^{2n};\ \mathbf{Z})$ соответственно.*

Доказательство. Из леммы 2.1 и формулы (2.2) получаем

$$\mathrm{ch}_U(\sigma_1(\xi_n))=\bar{\sigma}_1(\xi_n)=-\frac{z_{n-1}}{s_{(n-1)}(z_{n-1})}s_{(n)}(\xi_n)=$$

$$=-\frac{z_{n-1}}{s_{(n-1)}(z_{n-1})}n!\,a_n\in H^{2n}(S^{2n};\Omega_{-2n+2})\subset H^{2n}(S^{2n};\Omega_{-2n+2}\otimes Q).$$

Следовательно, если класс бордизмов z_{n-1} удовлетворяет условиям леммы 2.1 и не делим в группе Ω_{-2n+2}, то число $\frac{n!}{s_{(n-1)}(z_{n-1})}$ — целое. С другой стороны,

$$(-1)^{n-1}a_n=\mathrm{ch}(-\bar{\xi})=\mathrm{ch}(\mu\sigma_1(\xi_n))=\mu\,\mathrm{ch}_U\,\sigma_1(\xi_n)=-\frac{\mathrm{Td}(z_{n-1})}{s_{n-1}(z_{n-1})}n!\,a_n,$$

т. е. $\mathrm{Td}(z_{n-1})=(-1)^n\frac{s_{n-1}(z_{n-1})}{n!}$. Так как род Тодда квазикомплексного многообразия — целое число (см. [6]), то $\frac{s_{(n-1)}(z_{n-1})}{n!}$ — целое число. Следовательно, $s_{(n-1)}(z_{n-1})=\pm n!$ Без ограничения общности можно считать, что $s_{(n-1)}(z_{n-1})=-n!$. Тогда $\mathrm{Td}(z_{n-1})=(-1)^{n-1}$. Теорема доказана.

Следствие 2.4. *В обозначениях теоремы 2.3 для любого комплексного расслоения ξ над X имеет место формула*

$$\mathrm{ch}_U\,\sigma_1(\xi)=\mathrm{ch}_1(\xi)+\sum[M^{2n}]\,\mathrm{ch}_{n+1}(\xi).$$

Мультипликативное преобразование $\varphi\in A^U$ однозначно определяется, с одной стороны, формальным рядом $\varphi(u)\in U^2(CP^\infty)$, а, с другой стороны, кольцевым гомоморфизмом φ^*: $\Omega_U\to\Omega_U$, который оно индуцирует на кольце когомологий точки $U^*(*)$. Используя характер Чженя, можно установить связь между формальным рядом $\varphi(u)$ и кольцевым гомоморфизмом φ^*.

Лемма 2.5. *Если* $\mathrm{ch}_U\varphi(u) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^{n+1}$, $\alpha_n \in \Omega_{-2n} \otimes Q$, *то* $\varphi^*([M^{2n}]) = (n+1)!\,\alpha_n$.

Доказательство леммы очевидно.

Пример. Пусть $\varphi(u) = \frac{1}{k}\sigma_1(\eta^k)$, где η — каноническое расслоение над CP^∞, тогда по следствию 2.4 имеет место формула

$$\mathrm{ch}_U\left(\frac{1}{k}\sigma_1(\eta^k)\right) = x + \sum [M^{2n}]\frac{k^n}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Таким, образом, $\varphi^*([M^{2n}]) = k^n[M^{2n}]$, и, следовательно, для любого элемента $y \in \Omega_U^{-2n}$ имеет место формула $\varphi^*(y) = k^n y$. Впервые эта формула была получена в [9] другим методом.

Для произвольного набора неотрицательных чисел $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ обозначим через b_ω знаменатель дроби $\frac{(\Sigma i_l)!}{i_1!\ldots i_k!\cdot 2^{i_1}\ldots((k+1)!)^{i_k}}$. Введем числовую функцию $q(n)$, положив $q(n)$ равным наименьшему общему кратному чисел b_ω для всех $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ таких, что $\sum l\cdot i_l = n$. Например, $q(1)=2$, $q(2) = 12$, $q(3) = 24$.

Следствие 2.6. *Формула для обобщенного ряда Тодда канонического расслоения* η *над* CP^∞ *имеет вид*

$$T(\eta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}[M_*^{2n}]\frac{x^n}{q(n)},$$

где M_*^{2n} — *замкнутое квазикомплексное многообразие, однозначно определяемое условиями* $s_\omega(M_*^{2n}) = 0$, $\omega \neq (n)$, $s_{(n)}(M_*^{2n}) = q(n)$, причем

a) $\mathrm{Td}(M_*^2) = 1$;

b) $\mathrm{Td}(M_*^{4n+2}) = 0$, $n > 1$;

c) $\mathrm{Td}(M_*^{4n}) = \frac{B_{2n}}{(2n)!}q(2n)$.

Доказательство. Для класса Тодда T имеет место аналог леммы 2.1:

$$T(\eta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{*}{z}_n}{s_{(n)}(\overset{*}{z}_n)}x^n,$$

где $\overset{*}{z}_n \in \Omega_U^{-2n}$ — такой класс бордизмов, что $s_\omega(\overset{*}{z}_n) = 0$, $\omega \neq (n)$, $s_{(n)}(\overset{*}{z}_n) \neq 0$. По определению $T(\eta) = x^2/\mathrm{ch}_U u$. Используя теорему 2.3 и свойства характеристического класса $s_{(n)}$, нетрудно показать, что $s_{(n)}(\overset{*}{z}_n) = q(n)$. Формула для рода Тодда $\mathrm{Td}(\overset{*}{z}_n)$ следует из формулы для классического класса Тодда в терминах характеристических классов s_ω.

Замечание 2.7. Мультипликативная последовательность Хирцебруха, задаваемая рядом $K(1+z)=1+a_1z+a_2z^2+\ldots$ (см. [12]), определяет кольцевой гомоморфизм $K^*:\Omega_U^*\to Q$. Формула для обобщенного класса Тодда дает возможность установить связь между коэффициентами ряда $K(1+z)$ и гомоморфизмом K^*, а именно, имеет место формула

$$K^*([M_*^{2n}])=q(n)\cdot a_n. \tag{2.8}$$

Естественно возникает вопрос

(2.9). Описать все формальные ряды $K(1+z)=1+a_1z+a_2z^2+\ldots$ такие, что определяемые ими мультипликативные последовательности задают «целочисленные» гомоморфизмы $K^*:\Omega_U^*\to\mathbf{Z}$. Наиболее известным формальным рядом $K(1+z)$ с рациональными коэффициентами, задающим целочисленный гомоморфизм $K^*:\Omega_U^*\to\mathbf{Z}$, является ряд Тодда $K(1+z)=$ $=\dfrac{-z}{e^{-z}-1}$. Из формулы (2.8) следует, что для того, чтобы гомоморфизм K^* был целочисленным, необходимо, чтобы знаменатель коэффициента a_n был делителем числа $q(n)$ для всех n. Очевидно, это условие не является достаточным, однако, ввиду фундаментальности функции $q(n)$, естественно поставить задачу

(2.10). Описать максимальный класс $\mathcal{O}(K)$ рядов $K(1+z)$ такой, что если ряд $K(1+z)=1+a_1z+a_2z^2+\ldots$ принадлежит $\mathcal{O}(K)$ и знаменатель коэффициента a_n является делителем числа $q(n)$ для всех n, то гомоморфизм K^* — целочисленный.

§ 3. Формальный ряд, функционально обратный к ряду $\mathrm{ch}_U(u)$. Следствия

Для формального ряда $f(x)=x+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ix^{i+1}$ обозначим через $[f]^{-1}$ формальный ряд $g(y)=y+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_iy^{i+1}$ такой, что $g(f(x))=x$.

Теорема 3.1. *Для формального ряда* $\mathrm{ch}_U(u)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[M^{2n}]\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (см. § 2) *имеет место равенство*

$$[\mathrm{ch}_U(u)]^{-1}=u+\sum\frac{[CP^n]}{n+1}u^{n+1}.$$

Доказательство. Как отмечалось во введении, характер Чженя — Дольда ch_U устанавливает изоморфизм A^U-модулей

$$\mathrm{ch}_U\otimes Q:U^*(CP^N)\otimes Q\xrightarrow{=}\mathcal{H}^*(CP^N;\ \Omega_U^*\otimes Q).$$

Пусть $g(u)=u+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_iu^{i+1}$ — такой ряд, что $\mathrm{ch}_U(g(u))=x\in H^2(CP^N;\ \mathbf{Z})\subset$ $\subset\mathcal{H}^2(CP^N;\ \Omega_U^*\otimes Q)$. Для любого элемента $a\in A^U$ имеет место равенство $a(x)=a(1)\cdot x$, следовательно, $a(\mathrm{ch}_U\,g(u))=a(1)\cdot\mathrm{ch}_U(g(u))$. Пусть $S_{(k)}\in A^U$ —

операция в кобордизмах, которая в записи через образующие Ву имеет вид $u_1 \ldots u_N \left(\sum u_1^k\right)$. Свойства этой операции описаны в [9]. Имеем при $k>0$

$$S_{(k)}(g(u))=0=S_{(k)}\left(u+\sum \beta_i u^{i+1}\right)=u^{k+1}+\sum_{i=k}^{\infty} \overset{*}{\sigma}_{(k)}(\beta_i)\, u^{i+1}+\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\beta_j u^{j+1+k}.$$

Следовательно,

$$S_{(k)}(\beta_i) = -(i-k+1)\,\beta_{i-k}. \tag{$*$}$$

Так как $\beta_i \in \Omega_U^{-2i}$, то уравнения ($*$) однозначно определяют элементы β_i, и мы получаем $\beta_i = [CP^i]/i+1$. Теорема доказана.

Обозначим через $\pi_n : \overset{*}{\Omega}_U \to \overset{*}{\Omega}_U \otimes Q$ такой кольцевой гомоморфизм, что $\pi_n([CP^i])=0$, $i \neq n$, $i>0$, $\pi_n([CP^n])=[CP^n]$. Композиция преобразований $\pi_n \cdot \mathrm{ch}_U$ определяет мультипликативное преобразование теорий когомологий

$$\Pi_n : U^* \to \mathcal{H}^*(\ ;\overset{*}{\Omega}_U \otimes Q).$$

Теорема 3.2. *Для канонического элемента $u \in U^2(CP^\infty)$ имеют место формулы*

$$\Pi_n(u) = x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{c_{k(n+1)}^k}{(n+1)^k}\cdot\frac{[CP^n]^k}{kn+1}\, x^{kn+1}, \tag{1}$$

$$\Pi_n(u) = x\cdot\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{c_{k(n+1)-1}^{k-1}}{(n+1)^k}\cdot\frac{[CP^n]^k}{kn}\, x^{kn}\right\}. \tag{2}$$

Доказательство. Так как $\Pi_n(u)\in\mathcal{H}^2(CP^\infty;\ Q[[CP^n]])$, то $\Pi_n(u) = x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k[CP^n]^k x^{kn+1}$. Рассмотрим числовой ряд $f(x)=x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x^{kn+1}$. Из теоремы 3.1 и мультипликативности преобразования Π_n следует, что $[f]^{-1}=u+\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$. Таким образом, согласно известной формуле обращения числовых рядов (см. [11], стр. 1255) имеем

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\varepsilon} -\ln\left(1-\frac{x\left(1+\frac{z^n}{n+1}\right)^{-1}}{z}\right)dz,$$

т. е.

$$\alpha_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{kn+1}\,\frac{\left(1+\frac{z^n}{n+1}\right)^{-kn+1}}{z^{kn+1}}\,dz=(-1)^k\frac{c_{k(n+1)}^k}{(kn+1)\cdot(n+1)^k}.$$

Формула (1) доказана.

Положим $f(x)=xe^{F(x)}$, где $F(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{kn}$, и вычислим ряд $F(x)$. Так как $f(x)+\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}=x$, то $e^{F(x)}+\frac{x^n e^{(n+1)F(x)}}{n+1}=1$. Следовательно, $\sqrt[n]{\frac{(n+1)(1-e^{F(x)})}{e^{(n+1)F(x)}}}=x$. Таким образом, $F(x)=\left[\sqrt[n]{\frac{(n+1)(1-e^z)}{e^{(n+1)z}}}\right]^{-1}$. Имеем

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\varepsilon}-\ln\left(1-\frac{x\sqrt[n]{e^{(n+1)z}}}{\sqrt[n]{(n+1)(1-e^z)}}\right)dz.$$

Положим $v=1-e^z$, $e^z=1-v$, $dz=-\frac{dv}{1-v}$. Тогда

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|v|=\varepsilon}\ln\left(1-\frac{x\sqrt[n]{(1-v)^{n+1}}}{\sqrt[n]{n+1}\cdot\sqrt[n]{v}}\right)\frac{dv}{1-v},$$

$$a_k=\frac{1}{kn}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|v|=\varepsilon}\left(-\frac{(1-v)^{kn+k-1}}{(n+1)^k v^k}\right)dv=(-1)^k\frac{c_{k(n+1)-1}^{k-1}}{(n+1)^k\cdot kn}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.3. *Для любого конечного комплекса X мультипликативное преобразование Π_n разлагается в композицию*

$$U^*(X)\to\mathscr{H}^*\left(X;\mathbf{Z}\left[[CP^n],\frac{1}{n+1}\right]\right)\to\mathscr{H}^*(X;\Omega_U^*\otimes Q).$$

Доказательство. Достаточно доказать включение $\Pi_n(u)\in\mathscr{H}^*\left(CP^\infty;\mathbf{Z}\left[[CP^n],\frac{1}{n+1}\right]\right)$ для канонического элемента $u\in U^2(CP^\infty)$. Имеем

$$\frac{c_{k(n+1)}^k}{kn+1}=\frac{(k(n+1))!}{k!\,(kn+1)!}=\frac{c_{k(n+1)+1}^k}{(kn+1)+k};$$

так как числа $(kn+1)$ и $(kn+1)+k$ взаимно просты, то $c_{k(n+1)}^k$ делится на $(kn+1)$ для любого k. Используя формулы (1) теоремы 3.2 для ряда $\Pi_n(u)$, мы получаем утверждение следствия.

Формальный ряд $g(u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[CP^n]}{n+1}u^{n+1}$ впервые появился в работе [9] (см. приложение 1, теорема А. С. Мищенко) в связи с вычислением первого класса Чженя $\sigma_1(\xi_1\times\xi_2)$ тензорного произведения одномерных расслоений ξ_1 и ξ_2. Как показано в [9], ряд $g(u)$ однозначно определяется равенством

$$g(\sigma_1(\xi_1\otimes\xi_2))=g(\sigma_1(\xi_1))+g(\sigma_1(\xi_2)). \tag{3.4}$$

Покажем, как используя характер Чженя — Дольда ch_U, можно вывести из равенства (3.4) формулу для ряда $g(u)$, и тем самым получить новое доказательство теоремы А. С. Мищенко.

Теорема 3.5. *Элемент* $g(u) \in U^2(CP^\infty) \otimes Q$, *удовлетворяющий равенству* (3.4), *имеет вид*

$$g(u) = u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим каноническое отображение

$$\Delta: CP^\infty \times CP^\infty \to CP^\infty, \quad \Delta^* x = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Из равенства (3.4) следует, что для элемента $g(u) \in U^2(CP^\infty) \otimes Q$ имеет место равенство $\Delta^* g(u) = g(u) \otimes 1 + 1 \otimes g(u)$. Имеем

$$\mathrm{ch}_U(\Delta^* g(u)) = \Delta^* \mathrm{ch}_U g(u) = \mathrm{ch}_U g(u) \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ch}_U g(u).$$

Очевидно, в когомологиях $\mathscr{H}^*(CP^\infty; \overset{*}{\Omega}_U \otimes Q)$ единственным элементом y, для которого имеет место равенство $\Delta^* y = y \otimes 1 + 1 \otimes y$, является элемент x, следовательно, $\mathrm{ch}_U(g(u)) = x$. Применяя теорему 3.1, получаем утверждение теоремы.

В работе [9] введено мультипликативное преобразование «характер Чженя»

$$\sigma\mathrm{h}: K^0(X) \to U^*(X) \otimes Q$$

по формуле $\sigma\mathrm{h}(\xi) = e^{g(\sigma_1(\xi))}$.

Следствие 3.6. *Характер Чженя* $\sigma\mathrm{h}$ *совпадает с характером Чженя* χ_U.

Доказательство. Для канонического элемента $\eta \in K^{0'}(CP^\infty)$ имеем

$$\sigma\mathrm{h}(\eta) = e^{g(u)}, \quad \mathrm{ch}_U \sigma\mathrm{h}(\eta) = e^x = \mathrm{ch}_K(\eta) = \mathrm{ch}_U \chi_U(\eta).$$

Следовательно, $\sigma\mathrm{h} = \chi_U$.

Пусть $\{K_i(c_1, \ldots, c_i)\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, — произвольная мультипликативная последовательность Хирцебруха от классов Чженя, $K(1+z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ — соответствующий ей формальный степенной ряд и $K^*: \Omega_U \to Q$ — индуцированный ею гомоморфизм. Непосредственно из определения обобщенного класса Тодда следует, что для канонического одномерного расслоения η над CP^∞ имеет место формула $K^*(T(\eta)) = K(1+z)$, где z—образующая группы $H^2(CP^\infty; \mathbf{Z})$. Имеем $\mathrm{ch}_U(u) = \dfrac{z}{T(\eta)}$, $K^*(\mathrm{ch}_U(u)) = \dfrac{z}{K(1+z)}$. Применяя теорему 3.1, мы получаем объяснение и новое доказательство следующей теоремы Новикова (см. [11]).

Теорема 3.7. *Для любой мультипликативной последовательности* $\{K_i\}$ *имеет место формула*

$$\frac{z}{K(1+z)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{**}([CP^n])}{n+1} u^{n+1}\right]^{-1}_{u=z}.$$

Теорема 3.8. *Существует единственный элемент* $g(u) \in U^2(CP^\infty) \otimes Q$, *обладающий следующими свойствами, каждое из которых можно принять за его определение*:

1) $\mathrm{ch}_U(g(u)) = x$, *где* x — *образующий группы* $K^2(CP^\infty; \mathbf{Z})$;

2) $S_{(k)}(g(u)) = 0$, $k > 0$, *где* $S_{(k)} \in A^U$;

3) $g(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$;

4) $\Delta^* g(u) = g(u) \otimes 1 + 1 \otimes g(u) \in U^2(CP^\infty \times CP^\infty) \otimes Q$, *где* $\Delta: CP^\infty \times CP^\infty \to CP^\infty$ — *такое отображение, что* $\Delta^* x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$;

5) $g(u) = \sigma_1(\ln \eta)$, *где* η — *каноническое линейное расслоение над* CP^∞, $\ln \eta \in K^0(CP^\infty \otimes Q)$ *рассматривается как соответствующий формальный ряд по степеням элемента* $(1 - \eta) \in K^0(CP^\infty)$ *и* σ_1 — *первый класс Чженя в кобордизмах*;

6) *мультипликативная операция* $\Phi \in A^U \otimes Q$, *определяемая рядом* $g(u)$, *такова, что* $\Phi^*(1) = 1$ *и* $\Phi^*(y) = 0$, $y \in \Omega_U^{-2n}$, $n > 0$, *и, следовательно,* Φ *является проекционным оператором, т. е.* $\Phi^2 = \Phi$.

Доказательство теоремы легко провести, используя предыдущие результаты настоящей работы. Например, эквивалентность свойств 1) и 6) следует из леммы 2.5. Отметим, что свойства 2), 4) и 6) формального ряда $\sum \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$ впервые были доказаны в [9].

Замечание 3.9. Мультипликативная операция $\Phi \in A^U \otimes Q$, соответствующая ряду $\sum \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$, дает пример операции из $A^U \otimes Q$, определяющей целочисленный гомоморфизм $\Phi^*: \Omega_U^* \to \Omega_U^*$. Возникает задача, тесно связанная с задачами (2.9) и (2.10) замечания 2.7.

(3.10). Описать все мультипликативные операции из $A^U \otimes Q$, определяющие целочисленные гомоморфизмы $\Omega_U^* \to \Omega_U^*$.

Обозначим через ζ элемент $(\eta - 1) \in K^0(CP^\infty)$. Из теоремы 3.8 и следствия 2.4 непосредственно следует, что для любого n имеет место формула

$$\sigma_1(\ln(1+\zeta))^n = [M^{2n-2}] g(u)^n. \tag{3.11}$$

Пусть $q > 0$ — произвольное число. Обозначим через $R(q)$ кольцо $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_k}, \ldots\right]$, где p_k — все простые числа такие, что $p_k \not\equiv 1 \bmod q$. Например, $R(2) = \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. В работе Адамса [2] показано, что для любого $0 \leqslant \alpha < q$ элемент $E_\alpha \eta = \sum\limits_{n \equiv \alpha \bmod q} \frac{(\ln(1+\zeta))^n}{n!} = \sum \frac{a_r}{b_r} \zeta^r$ принадлежит кольцу $\widetilde{K}^0(CP^\infty) \otimes R(q)$ для любого q. Докажем теперь теорему, первая часть которой представляет собой теорему Адамса (см. [2]) (мы даем ее новое доказательство), а вторая часть представляет собой ответ на вопрос Адамса (см. [2], стр. 110).

Теорема 3.12. a) *Для любого числа* $q>0$ *существует мультипликативный проектор* $\varepsilon_q \in A^U \otimes R(q)$ *такой, что кольцом когомологий точки теории когомологий, определяемой проектором* ε_q, *является кольцо* $R(q)[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$, $\dim x_n = -2qn$.

b) *Проектор* ε_q *однозначно определяется формальным рядом*

$$\varepsilon_q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[M^{2qn}]}{(qn+1)!} g(u)^{qn+1} \in U^2(CP^\infty) \otimes R(q),$$

где $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$ *и элементы* $[M^{2qn}]$ *описаны в теореме* 2.3.

Доказательство. Для любого q рассмотрим ряд Адамса

$$E_{1,q}(\eta) = \sum_{n \equiv 1 \bmod q} \frac{(\ln(1+\zeta))^n}{n!} \in \widetilde{K}^0(CP^\infty) \otimes R(q).$$

Обозначим через ε_q мультипликативную операцию, задаваемую формальным рядом $\varepsilon_q(u) = \sigma_1(E_{1,q}(\eta)) \in U^2(CP^\infty) \otimes R(q)$. Из формулы (3.11) следует, что

$$\sigma_1(E_{1,q}(\eta)) = \sum_{n \equiv 0 \bmod q} \frac{[M^{2n}]}{(n+1)!} g(u)^{n+1}.$$

Так как

$$\mathrm{ch}_U \sigma_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[M^{2n}]}{(n+1)!} x^{n+1} \in \mathcal{H}^2(CP^\infty; \Omega_U^* \otimes Q),$$

то по лемме 2.5 гомоморфизм $\varepsilon_q^*\colon \Omega_U^* \otimes R(q) \to \Omega_U^* \otimes R(q)$ однозначно определяется формулой

$$\varepsilon_q^*([M^{2n}]) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \bmod q, \\ [M^{2n}], & \text{если } n \equiv 0 \bmod q, \end{cases}$$

Так как $\varepsilon_q^* \cdot \varepsilon_q^* = \varepsilon_q^*$, то операция ε_q является проектором. Теорема доказана.

Рассмотрим более подробно проектор ε_2. Имеем $E_{1,2}(\eta) = \sum_{n \equiv 1 \bmod 2} \frac{(\ln(1+\zeta))^n}{n!}$. Следовательно,

$$E_{1,2}(\eta) = \frac{e^{\ln(1+\zeta)} - e^{-\ln(1+\zeta)}}{2} = \frac{\eta - \bar{\eta}}{2},$$

где $\bar{\eta}$ — расслоение, сопряженное с η. По определению элемент $\sigma_1(-\bar{\eta}) = -\sigma_1(\Psi^{-1}(\eta)) \in U^2(CP^\infty)$ представляет собой элемент $\Psi_U^{-1}(u)$ (см. [9]). Таким образом, $\sigma_1(E_{1,2}(\eta)) = (u + \Psi_U^{-1} u)/2$, т. е. $\varepsilon_2(u) = (u + \Psi_U^{-1}(u))/2$. Из рассмотрения гомоморфизмов $\varepsilon_2^*\colon \Omega_U^* \to \Omega_U^* \otimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ и $r\colon \Omega_U^* \to \Omega_{SO}^*$ легко следует, что преобразование $r\colon \operatorname{Im} \varepsilon_2\left(U^*(X)\left[\frac{1}{2}\right]\right) \to SO^*(X)\left[\frac{1}{2}\right]$ является изоморфизмом теории когомологий.

§ 4. Формула для первого класса Чженя тензорного произведения одномерных расслоений

Рассмотрим клеточный комплекс $S_U(CP^n)$, где n — число или ∞ (см. [9]) комплексного проективного пространства CP^n в теории унитарных бордизмов. Имеют место изоморфизмы $U_*(CP^n) \cong S_U(CP^n)$, $U^*(CP^n) = \mathrm{Hom}_{\Omega_U}(S_U(CP^n), \Omega_U) = \overset{*}{S_U}(CP^n)$. Скалярное произведение $(a, b) \in \Omega_U$, $a \in U^*(CP^n)$, $b \in U_*(CP^n)$, определенное при помощи этих изоморфизмов, обладает всеми свойствами соответствующего скалярного произведения в классических когомологиях, в частности, для конечных n определена «операция Чеха» $\cap$ такая, что $(a \cap b, c) = (a, bc)$, где $a, c \in U^*(CP^n)$, $b \in U_*(CP^n)$, $a \cap b \in U_*(CP^n)$ и для отображений $f\colon CP^n \to CP^m$ имеет место формула $f_*(f^*(a) \cap b) = a \cap f_*(b)$ (см. [9], [11]). Пусть $u \in U^2(CP^n)$ — каноническая образующая, соответствующая для конечных n гиперплоскому сечению $CP^{n-1} \subset CP^n$. Обозначим через $v_q \in U_{2q}(CP^n)$ такие элементы, что $(v_q, u^i) = \delta_{q,i}$. Пусть $(CP^i) \in U_{2i}(CP^n)$ — класс бордизмов канонического вложения $CP^i \subset CP^n$. Легко показать, что для любых i, n и элемента (CP^i) имеет место формула

$$(CP^i) = \sum_{q=0}^{i} [CP^{i-q}]\, v_q. \tag{4.1}$$

Обозначим через u_i новые образующие Ω_U-модуля $U^*(CP^n)$, однозначно определяемые формулой

$$(u_l, (CP^i)) = \delta_{l,i}. \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2) легко следует, что в группе $U_*(CP^n)$ имеет место формула

$$Du_l = v_{n-l}, \tag{4.3}$$

где D — оператор двойственности Пуанкаре — Атья в кобордизмах.

Лемма 4.4. *Для любого $l \geqslant 0$ имеет место формула $u_l = u_0 \cdot u^l$.*

Доказательство. Пусть $f\colon CP^i \to CP^n$ — вложение и $\{CP^i\} \in U_{2i}(CP^i)$ — фундаментальный цикл CP^i в бордизмах. Имеем

$$(u_0 \cdot u^l, (CP^i)) = (u_0 \cdot u^l, f_*\{CP^i\}) = (f^*u_0 \cdot f^*u^l, \{CP^i\}) =$$
$$= (f^*u_0, f^*u^l \cap \{CP^i\}) = (f^*u_0, (CP^{i-l})) = \delta_{0,i-l} = \delta_{i,l} = (u_l, (CP^i)).$$

Лемма доказана.

Напомним, что многообразие Милнора $H_{r,t}$ определяется как алгебраическое подмногообразие в $CP^r \times CP^t$, реализующее цикл $(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2) \in H_2(CP^r \times CP^t)$ (см. [10]). Имеем $H_{r,t} = H_{t,r}$, $H_{r,0} = CP^{r-1}$. Пусть ξ_r — каноническое линейное расслоение над CP^r и $f\colon H_{r,t} \subset CP^r \times CP^t$ — вложение. Используя очевидное равенство $\tau(H_{r,t}) = f^*((r+1)\xi_r + (t+1)\xi_t - \xi_r \otimes \xi_t)$, где τ — касательное расслоение к $H_{r,t}$, можно вычислить характеристические числа многообразия $H_{r,t}$ и, следовательно, класс бордизмов $[H_{r,t}]$. Непосредственно из определения многообразий $H_{r,t} \subset CP^r \times CP^t$ следует, что $D\sigma_1(\xi_r \otimes \xi_t) = (H_{r,t}) \in U_{2r+2t-2}(CP^r \times CP^t)$.

Лемма 4.5. *Для любых r и t и канонического линейного расслоения $\xi_r \otimes \xi_t$ над $CP^r \times CP^t$ имеет место формула*

$$\sigma_1(\xi_r \otimes \xi_t) = u_1 \otimes 1 + 1 \otimes u_1 + \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant r \\ 0 \leqslant j \leqslant t \\ i+j>1}} [H_{i,j}]\, u_i \otimes u_j.$$

Доказательство. Пусть $f\colon CP^i \times CP^j \to CP^r \times CP^t$, $i \leqslant r$, $j \leqslant t$, —каноническое вложение. Так как элементы u_i образуют аддитивный базис Ω_U-модуля $U^*(CP^n)$ для любого n, то $\sigma_1(\xi_r \otimes \xi_t) = u_1 \otimes 1 + 1 \otimes u_1 + \sum \alpha_{i,j} u_i \otimes u_j$, $\alpha_{i,j} \in \Omega_{-2i-2j+2}$. Имеем $(f^*\sigma_1(\xi_r \otimes \xi_t), \{CP^i\} \otimes \{CP^j\}) = \alpha_{i,j}$. Представим класс бордизмов $(H_{i,j})$ в виде $\sum a_{k,l} v_k \otimes v_l$, где v_k — аддитивные образующие, сопряженные с элементами u^k. Так как $\varepsilon(v_l) = 0$ при $l > 0$, где $\varepsilon\colon U_* \to \Omega_*^U$ — естественная аугментация, то $a_{0,0} = [H_{i,j}]$. Имеем

$$(f^*\sigma_1(\xi_r \otimes \xi_t),\ \{CP^i\} \otimes \{CP^j\}) = (D(H_{i,j}),\ \{CP^i\} \otimes \{CP^j\}) =$$
$$= \left(\sum a_{k,l} v_k \otimes v_l,\ 1 \otimes 1\right) = a_{0,0} = [H_{i,j}],$$

где $1 \in U^0(CP^i)$ и $1 = \varepsilon^*(1)$, $1 \in \Omega_U^0 = \mathbf{Z}$. Лемма доказана.

Следствие 4.6. *Для любых r и t имеет место формула*

$$(H_{r,t}) = v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_1 + \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant r \\ 0 \leqslant j \leqslant t \\ i+j>1}} [H_{i,j}]\, v_i \otimes v_j \in U_{2r+2t-2}(CP^r \times CP^t).$$

Лемма 4.7. *Для элемента $u_0 \in U^0(CP^\infty)$ имеет место формула*

$$u_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} [CP^n]\, u^n}.$$

Доказательство. Так как $\sigma_1(\xi_\infty) = u$, то из лемм 4.4 и 4.5 получаем

$$u = \left(u_1 + \sum_{i=2}^{\infty} [H_{i,0}]\, u_i\right) = u_0\left(u + \sum_{i=2}^{\infty} [CP^{i-1}]\, u^i\right).$$

Лемма доказана.

Сформулируем результаты лемм 4.4, 4.5 и 4.7 в виде теоремы.

Теорема 4.8. *Пусть $\eta \otimes \eta$ — каноническое линейное расслоение над*

$CP^\infty \times CP^\infty$. *Имеет место формула*

$$\sigma_1(\eta\otimes\eta) = \Big[u\otimes 1 + 1\otimes u + \sum_{\substack{r\geqslant 0\\ t\geqslant 0\\ r+t>1}} [H_{r,t}]\, u^r\otimes u^t\Big]\times$$

$$\times\left[\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}[CP^n]u^n\right)\otimes\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}[CP^n]u^n\right)\right]^{-1},$$

где u — *каноническая образующая группы* $U^2(CP^\infty)$ *и* $H_{r,t}$ — *многообразие Милнора.*

Обозначим через $H_{r_1,\ldots,r_k}$, $r_i\geqslant 0$, алгебраические подмногообразия в многообразии $M_\omega = CP^{r_1}\times \ldots \times CP^{r_k}$, реализующие цикл $x_1\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1+\ldots \ldots + 1\otimes \ldots \otimes x$. Простым обобщением теоремы 4.8 является

Теорема 4.9. *Пусть* $\prod_{i=1}^{k}\eta_i$ — *каноническое линейное расслоение над* $\prod CP_i^\infty$. *Имеет место формула*

$$\sigma_1(\underbrace{\eta\otimes\ldots\otimes\eta}_{k}) =$$

$$= \frac{u\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1+\ldots+1\otimes\ldots\otimes 1\otimes u+\sum [H_{r_1,\ldots,r_k}]\,u^{r_1}\otimes u^{r_2}\otimes\ldots\otimes u^{r_k}}{\left(1+\sum[CP^n]u^n\right)\otimes\ldots\otimes\left(1+\sum[CP^n]u^n\right)}.$$

Следствие 4.10. *Для канонического элемента* $u\in U^2(CP^\infty)$ *имеет место формула*

$$\Psi_U^k(u) = \frac{1}{k}\left(\frac{ku+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sum\limits_{\Sigma r_i=n}[H_{r_1,\ldots,r_k}]\right)u^n}{1+\sum[CP^n]u^n}\right).$$

Обозначим через M_k^{n-1} подмногообразие в CP^n, реализующее цикл $kx\in H_2(CP^n)$. Многообразие M_k^{n-1} является гиперплоским сечением k-й тензорной степени хопфовского расслоения над CP^n. Используя метод доказательства теоремы 4.8, получаем следующую теорему.

Теорема 4.11. *Для канонического элемента* $u\in U^2(CP^\infty)$ *имеет место формула*

$$\Psi_U^k(u) = \frac{1}{k}\left(\frac{ku+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[M_k^{n-1}\right]u^n}{1+\sum[CP^n]u^n}\right).$$

(Поступила в редакцию 7/IV 1970 г.)

Примечание при корректуре.

Сформулируем некоторые результаты второй части работы. Рассмотрим преобразование $\varphi : H_*(X; \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\Omega_U}(U^*(X), \Omega_U(\mathbf{Z}))$, $\varphi(x)(v) = (x, ch_U v)$, двойственное к преобразованию $\varkappa$ из теоремы 1.9. Преобразование φ определяет преобразование A^U-модулей $\varphi_1 : H_*(X, \Omega_U(\mathbf{Z})) \to \mathrm{Hom}_{\Omega_U}(U^*(X), \Omega_U(\mathbf{Z}))$, а также преобразование $\varphi_2 : H_*(X; \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}_{A^U}(U^*(X), \Omega_U(\mathbf{Z}))$, причем, и φ_1 и φ_2 являются изоморфизмами, если группа $H^*(X; \mathbf{Z})$ не имеет кручения. Используя преобразования φ_1 и φ_2, мы получаем две новые спектральные последовательности универсальных коэффициентов (В. М. Бухштабер, Успехи матем. наук, **26**, вып. **1** (1971)). Здесь мы отметим только нестандартную спектральную последовательность из этой заметки.

Рассмотрим в $\Omega_U(\mathbf{Z})$ фильтрацию градуированными S-модулями $0 \subset N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\infty = \Omega_U(\mathbf{Z})$, где $N_0 = \Omega_U$, $N_i = \{\sigma \in \Omega_U(\mathbf{Z})\}$, $S_\omega(\sigma) \in N_{i-1}$, $|\omega| > 0$, $S_\omega \in S \subset A^U = (\Omega_U \cdot S)^\wedge$, $i > 0\}$.

Теорема. *Фильтрация $\{N_i\}$ в $\Omega_U(\mathbf{Z})$ определяет 3-градуированную спектральную последовательность*

$$\{E_r^{s,t,q},\ s \geqslant 0,\ s+t \leqslant 0,\ q \geqslant 0,\ d_r^{s,t} : E_r^{s,t,q} \to E_r^{s-r,t+r-1,q}\}$$

такую, что $E_1^{0,*,*} = \mathrm{Ext}_{A^U}^{*,*}(\Omega_U, \Omega_U)$, $E_1^{s,*,*} = \Lambda^{*,*}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) \otimes N_s/N_{s-1}$, $s > 0$, $E_\infty^{*,*,*} = E_1^{0,0,0} = \mathbf{Z}$, *где* $\Lambda^{*,*}$ — *внешняя алгебра*, $\lambda_n \in \Lambda^{-s-1,2n}$, *и если* $a \in (N_s/N_{s-1})_p$, *то* $\lambda_n \otimes a \in E_1^{s,-s-1,2n+p}$.

Следствие. $\mathrm{Ext}_{A^U}^{1,*}(\Omega_U, \Omega_U) = N_1/N_0$.

Непосредственно из определения представления (*) кольца A^U на кольцо Ω_U (см. [9]) мы получаем, что определен гомоморфизм $\lambda : \Omega_{U,\mathrm{fr}} \to N_1$.

Следствие. *Для того чтобы элемент из группы $\Omega_U^{-8n} \otimes Q$ реализовывался компактным (U, fr)-многообразием, необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал групп N_1. В группе N_1^{8n+4} компактными (U, fr)-многообразиями реализуется подгруппа индекса 2.*

Литература

1. Дж. Ф. Адамс, О группах $J(x)$. II, Математика, **11**: **4** (1967), 3—42.
2. J. F. Adams, Lectures on generalised cohomology, Lecture Notes in mathematic, № **99** (1969), 1—138.
3. М. Ф. Атья, Пространства Тома, Математика, **10**: **5** (1966), 48—70.
4. Э. Дайер. Соотношения между теориями когомологий, Математика, **9** : **2** (1965), 15—18.
5. А. Дольд, Соотношения между ординарными и экстраординарными теориями гомологий, Математика, **9**: **2** (1965), 8—14.
6. П. Коннер, Э. Флойд, О соотношении теории бордизмов и K-теории, Дополнение к книге «Гладкие периодические отображения», Москва, изд-во «Мир», 1969.
7. П. Коннер, Э. Флойд, Гладкие периодические отображения, Москва, изд-во «Мир», 1969.
8. J. Milnor, Cobordism ring and complex analogue, Amer. J. Math., **82**, № **3** (1960), 505—521.
9. С. П. Новиков, Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов, Изв. АН СССР, серии матем., **31** (1967), 855—951.
10. С. П. Новиков, Гомотопические свойства комплексов Тома, Матем. сб., **57 (99)** (1962), 406—442.
11. С. П. Новиков, Операторы Адамса и неподвижные точки, Изв. АН СССР, серия матем., **32** (1968), 1245—1263.
12. Чжень Шен-Шэнь, Комплексные многообразия, Москва, ИЛ, 1961.