I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, B. G. Dragovich, Spontaneous reduction in multidimensional ($D = 10, 11$) supergravity theories with arbitrary signature,
TMF, 1987, Volume 70, Number 3, 422–431

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 70, № 3
март, 1987

СПОНТАННАЯ РЕДУКЦИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ($D=10, 11$) ТЕОРИЯХ СУПЕРГРАВИТАЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИГНАТУРОЙ

Арефьева И. Я., Волович И. В., Драгович Б. Г. [1]

Рассматриваются вакуумные решения в многомерных теориях типа Калуцы – Клейна с произвольной сигнатурой. Получены решения 11- и 10-мерных теорий супергравитации, удовлетворяющие критериям отсутствия духов в эффективной безмассовой 4-мерной теории. Построены решения, соответствующие двум 4-мерным вселенным, и обсуждаются их возможные космологические следствия. Для $D=10$, $N=2$ супергравитации получены вакуумные решения с нулевой космологической постоянной.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время были получены значительные результаты на пути построения единой теории элементарных частиц в подходе, связанном с многомерными теориями типа Калуцы – Клейна и суперструн (см., например, [1–6]). Обычно в этом подходе предполагается, что дополнительные к 4-мерному пространству-времени измерения являются пространственноподобными. Однако представляет интерес рассмотрение и времениподобных дополнительных измерений. Гипотеза о существовании дополнительных компактифицированных времениподобных измерений рассматривалась в [7]. Естественно встать на точку зрения динамического определения сигнатуры пространства-времени. Имеется в виду следующее. Вначале допускаются произвольные сигнатуры, а затем выясняется, при каких сигнатурах могут существовать вакуумные решения [8]. Рассмотрение дополнительных времениподобных измерений может помочь в решении проблем космологической постоянной и киральных фермионов. Действительно, например, в низкоэнергетической эффективной 10-мерной полевой теории суперструн [4, 5] со стандартной сигнатурой имеется теорема запрета [9], в силу которой невозможна нетривиальная спонтанная компактификация с 4-мерным пространством-временем Минковского; допуская дополнительные времениподобные измерения, авторы [10] нашли нетривиальные вакуумные решения с 4-мерным пространством Минковского, т. е. в этом случае решается проблема космологической постоянной. Другой пример решения проблемы космологической постоянной при помощи введения дополнительных времениподобных изменений будет приведен в настоящей работе. Заметим также, что теоремы о невозможности получения киральных фермионов в подходе Калуцы – Клейна [1, 11, 12] существенно используют предположение о пространственноподобности дополнительных измерений.

---

[1] Институт физики, Белград, СФРЮ.

В теориях типа Калуцы — Клейна при введении дополнительных времениподобных измерений, вообще говоря, появляются проблемы, связанные с возможным возникновением в эффективной 4-мерной теории духов и тахионов [13].

Заметим в этой связи, что в современных теориях типа Калуцы — Клейна в качестве наблюдаемых рассматривают только безмассовые частицы. Массивные частицы имеют в этом подходе в первом приближении массу, обратно пропорциональную размерам дополнительного пространства, и эта масса выбирается порядка планковской. Тем самым обсуждение теории массивных частиц оказывается за рамками рассматриваемого квазиклассического приближения, и их изучение следует вести с учетом квантования гравитации. Поэтому мы ограничиваемся построением удовлетворительной теории нулевых мод без духов, оставляя в стороне проблемы, связанные с массивными духами и тахионами. При этом на первый взгляд возникает проблема, связанная с возможным появлением тахионов, поскольку они имеют нулевой порог рождения. Однако т. к. абсолютное значение их массы очень велико (порядка планковской), то для их рождения требуется большой импульс. Другими словами, можно сказать, что в соответствующей квантовой теории должно быть введено обрезание на больших энергиях и импульсах. Можно надеяться, что в теории суперструн, где, по-видимому, отсутствуют ультрафиолетовые расходимости [4, 5], такое эффективное обрезание возникает естественным образом.

В настоящей работе в разделе 2 получены вакуумные решения уравнений 11-мерной супергравитации с произвольной сигнатурой в дополнительном пространстве. Среди них имеются решения, удовлетворяющие критериям отсутствия духов [10] (см. приложение) в эффективной безмассовой 4-мерной теории. Указаны также решения, соответствующие произведению двух 4-мерных вселенных, и обсуждаются их возможные космологические следствия. В разделе 3 построены вакуумные решения уравнений $D=10$, $N=2$ некиральной супергравитации с произвольной сигнатурой. В частности, получены решения с нулевой космологической постоянной.

2. ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ 11-МЕРНОЙ ТЕОРИИ

Одна из наиболее привлекательных возможностей построения единой теории поля связана с супергравитацией в максимально допустимой размерности пространства-времени, равной 11 [14]. Вакуумные решения в этой теории в стандартной сигнатуре рассматривались в многочисленных работах с использованием анзаца Фройнда — Рубина [15] (см., например, [3, 16]). При этом в этой теории имеются известные трудности, связанные с киральными фермионами и проблемой космологической постоянной. В этом разделе мы рассмотрим вакуумные решения в этой теории с произвольной сигнатурой дополнительных измерений.

Лагранжиан бозонного сектора $D=11$, $N=1$ теории [14] имеет вид [3]

$$(1)\qquad L=\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,R-\frac{1}{24}\sqrt{|g|}\,F_{MNPQ}F^{MNPQ}+$$
$$+\frac{4}{(12)^4}\,\varepsilon^{M_1\dots M_{11}}F_{M_1\dots M_4}F_{M_5\dots M_8}A_{M_9\dots M_{11}},$$

где g_{MN} — метрика на многообразии M^{11}; M, $N=0, 1, \ldots, 10$; A_{MNK} — кососимметричный тензор, $F_{MNPQ}=4\partial_{[M}A_{NPQ]}$; $\varepsilon^{M_1\cdots M_{11}}$ — абсолютно кососимметричный тензор, $\varepsilon^{01\cdots 10}=1$; g — детерминант матрицы g_{MN}.

Соответствующие уравнения движения имеют вид

(2а) $$R_{MN}-{}^1/{}_2 g_{MN}R=-T_{MN}={}^1/{}_3[F_{MPQR}F_N{}^{PQR}-{}^1/{}_8 g_{MN}F_{PQRS}F^{PQRS}],$$

(2б) $$\nabla_M F^{MPQR}=-\frac{1}{576\sqrt{|g|}}\varepsilon^{M_1\ldots M_8PQR}F_{M_1\ldots M_4}F_{M_5\ldots M_8},$$

а тождества Бьянки —

(2в) $$\partial_{[R}F_{MNPQ]}=0.$$

Для D-мерного многообразия с T времениподобными измерениями будем использовать обозначение $M_T{}^D$, причем времениподобным измерениям в сигнатуре метрики будет соответствовать знак «—». Для 11-мерной теории будем с использованием анзаца Фройнда — Рубина [15] искать решения вида

(3) $$M_T^{11}=M_t{}^4\times M_{T-t}^7,$$

где M_{T-t}^7 также может быть произведением многообразий:

(4) $$M_{T-t}^7=\prod_{i=1}^{L}M_{t_i}^{d_i}.$$

Здесь $1\leqslant L\leqslant 3$, поскольку размерность $d_i\geqslant 2$, ввиду того что окружность имеет нулевую кривизну и не удовлетворяет приведенным ниже уравнениям. Отметим, что в разбиении (3) $M_t{}^4$ не обязательно соответствует реальному пространству-времени $M_1{}^4$. Пространство $M_1{}^4$ может входить в M_{T-t}^7.

Рассмотрим следующий анзац, соответствующий разбиению (3):

(5) $$g_{MN}=\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{\hat\mu\hat\nu}\end{pmatrix},$$

здесь $\mu, \nu=0, 1, 2, 3$; $\hat\mu, \hat\nu=4, \ldots, 10$. Положим аналогично [15]

(6) $$F_{\mu\nu\rho\sigma}=\sqrt{(-1)^t g^{(4)}}\,\lambda_t\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},$$

где λ_t — константа размерности массы. Остальные компоненты F_{MNPQ} равны 0. При этом уравнения (2б), (2в) удовлетворяются. Далее, из (6) имеем

(7) $$F^2\equiv F^2_{\mu\nu\rho\sigma}=(-1)^t\,24\lambda_t{}^2.$$

Подставляя (6) и (7) в определение тензора энергии-импульса T_{MN} (2а), получим

(8) $$T_{\mu\nu}=-(-1)^t\lambda_t{}^2 g_{\mu\nu},\quad T_{\hat\mu\hat\nu}=-(-1)^{t+1}\lambda_t{}^2 g_{\hat\mu\hat\nu}.$$

Производя свертку (2а) с g_{MN}, получим

(9) $$(1-D/2)R=-\mathbf{T},\ \mathbf{T}=g_{MN}T^{MN}.$$

В нашем случае $T={}^1/_8F^2$, т. е. имеем

$$(10)\qquad R={}^1/_{36}F^2.$$

Таким образом, уравнение (2а) принимает вид

$$R_{\mu\nu}-{}^1/_2 g_{\mu\nu}{}^1/_{36}F^2=(-1)^t\lambda_t^2 g_{\mu\nu},$$

$$R_{\hat\mu\hat\nu}-{}^1/_2 g_{\hat\mu\hat\nu}{}^1/_{36}F^2=(-1)^{t+1}\lambda_t^2 g_{\hat\mu\hat\nu},$$

или с учетом (7)

$$(11)\qquad R_{\mu\nu}=(-1)^t\frac{4}{3}\lambda_t^2 g_{\mu\nu},\qquad R_{\hat\mu\hat\nu}=(-1)^{t+1}\frac{2}{3}\lambda_t^2 g_{\hat\mu\hat\nu}.$$

Отметим, что полная кривизна R в силу (10) равна

$$(12)\qquad R=(-1)^t\frac{2}{3}\lambda_t^2$$

и не зависит от сигнатуры многообразия M_t^7.

Рассмотрим возможные варианты решений уравнений (11) с различной сигнатурой M_T^{11}, $T=0,1,\dots,11$. Будем использовать следующие обозначения. Решения уравнений

$$(13а)\qquad R_{mn}=\Lambda^2 g_{mn},$$

$$(13б)\qquad R_{mn}=-\Lambda^2 g_{mn}$$

на многообразии M_t^d, так называемом пространстве Эйнштейна, будем обозначать соответственно S_t^d и $Л_t^d$. Разложение пространств Эйнштейна S_t^7 и $Л_t^7$ на пространства меньшей размерности приведены ниже. Отметим, что уравнения (13а) и (13б) переходят друг в друга заменой $g_{mn}\to -g_{mn}$, и соответственно S_t^d переходит в $Л_t^d$, т. е. $S_t^d=Л^d_{d-t}$. Заметим также, что S_0^d может быть, в частности, обычной сферой S^d радиуса Λ^{-1}, а S_d^d может быть многообразием постоянной отрицательной кривизны. Представляет интерес перечисление всех возможных решений уравнений (11) независимо от возможности дать в данный момент физическую интерпретацию каждому решению.

0. $M_0^{11}=S_0^4\times Л_0^7$. Это чисто евклидовы решения, в качестве $Л_0^7$ можно рассматривать компактные пространства постояной отрицательной кривизны (см. [17]). Такие решения могут представлять интерес для квантовой гравитации (см. [18]).

1. $M_1^{11}=Л_1^4\times S_0^7$, $S_0^4\times Л_1^7$. В качестве пространства $Л_1^4$ можно выбрать хорошо известные пространства AdS^4, а S_0^7 можно считать обычной сферой S^7. Решение такого вида $\mathrm{AdS}^4\times S^7$ рассматривается в [15, 3]. В качестве решения $S_0^4\times Л_1^7$ можно взять $S^4\times\mathrm{AdS}^7$ (см. [15, 19]). Другой выбор, приводящий к 4-мерному пространству-времени, есть $Л_1^7=\mathrm{AdS}^4\times Л^3$ [8], где $Л^3$ — компактное пространство постоянной отрицательной кривизны.

2. $M_2^{11}=S_2^4\times Л_0^7$, $Л_1^4\times S_1^7$, $S_0^4\times Л_2^7$. В решении $S_2^4\times Л_0^7$ отсутствует 4-мерное пространство-время. Одно из интересных решений вида $Л_1^4\times S_1^7$ есть решение с двумя 4-мерными вселенными

$$(14)\qquad \mathrm{AdS}^4\times\mathrm{dS}^4\times S^3.$$

Среди решений вида $S_0^4 \times Л_2^7$ отметим наличие решения вида $S_0^4 \times \mathrm{AdS}^4 \times Л_1^3$.

3. $M_3^{11} = Л_3^4 \times S_0^7$, $S_2^4 \times Л_1^7$, $Л_1^4 \times S_2^7$, $S_0^4 \times Л_3^7$. Среди решений вида $Л_1^4 \times S_2^7$ имеется решение $\mathrm{AdS}^4 \times \mathrm{dS}^4 \times \mathrm{dS}^3$.

4. $M_4^{11} = S_4^4 \times Л_0^7$, $Л_3^4 \times S_1^7$, $S_2^4 \times Л_2^7$, $Л_1^4 \times S_3^7$, $S_0^4 \times Л_4^7$ Отметим, что для решения $S_4^4 \times Л_0^7$ имеется полное разделение пространственных и временных переменных. Среди решений вида $Л_3^4 \times S_1^7$ имеется решение $Л_3^4 \times \times \mathrm{dS}^4 \times S^3$, где $Л_3^4$ можно выбрать совпадающим с dS^4. Среди решений вида $Л_1^4 \times S_3^7$ имеются решения $\mathrm{AdS}^4 \times Л^3 \times S^4$ типа, отмеченного в пункте 1, но с учетом отождествления $S_3^3 = Л_0^3$. Среди решений вида $S_0^4 \times Л_4^7$ имеется решение типа $S_0^4 \times \mathrm{AdS}^4 \times S_0^3$.

5. $M_5^{11} = S_4^4 \times Л_1^7$, $Л_3^4 \times S_2^7$, $S_2^4 \times Л_3^7$, $Л_1^4 \times S_4^7$, $S_0^4 \times Л_5^7$. Среди решений вида $S_4^4 \times Л_1^7$ имеется решение $S_4^4 \times \mathrm{AdS}^4 \times Л^3$. Для того чтобы отсутствовали духи в AdS^4, требуется (см. приложение), чтобы было $b_1(Л^4) = b_3(Л^4) = 0$. Среди решений вида $Л_1^4 \times S_4^7$ имеются решения $\mathrm{AdS}^4 \times \mathrm{dS}^4 \times S_3^3$, где имеем случай двух 4-мерных вселенных с компактным дополнительным пространством.

6. $M_6^{11} = S_4^4 \times Л_2^7$, $Л_3^4 \times S_3^7$, $S_2^4 \times Л_4^7$, $Л_1^4 \times S_5^7$, $S_0^4 \times Л_6^7$. Отметим что среди решений вида $Л_1^4 \times S_5^7$ имеется решение $\mathrm{AdS}^4 \times S_5^5 \times S_0^2$. Это решение не приводит к духам в AdS^4, если взять $S_5^5 = Л^5$ и $b_1(Л^5) = b_3(Л^5) = 0$.

7. $M_7^{11} = S_4^4 \times Л_3^7$, $Л_3^4 \times S_4^7$, $S_2^4 \times Л_5^7$, $Л_1^4 \times S_6^7$, $S_0^4 \times G_7^7$. Среди решений вида $S_4^4 \times Л_3^7$ имеются решения $S_4^4 \times Л_3^3 \times Л_0^4$ с полным разделением времени- и пространственноподобных измерений.

8. $M_8^{11} = S_4^4 \times Л_4^7$, $Л_3^4 \times S_5^7$, $S_2^4 \times Л_6^7$, $Л_1^4 \times S_7^7$. Среди решений вида $Л_1^4 \times S_7^7$ имеется решение $\mathrm{AdS}^4 \times Л^7$, где $Л^7$ — компактное гиперболическое многообразие. Если $b_1(S^7) = b_3(S^7) = 0$ и т. к. S^7/Γ не имеет векторных полей Киллинга, то в AdS^4 духов не будет.

9—11. В этих случаях число пространственных измерений меньше 3, поэтому здесь нельзя выделить 4-мерную вселенную.

Всевозможные решения, связанные с разбиением 7-мерных многообразий на произведения многообразий меньшей размерности, имеют вид $M_p^7 = \prod\limits_{\Sigma p_i = p,\ \Sigma k_i = 7} S_{p_i}^{k_i}$, $p = 0, 1, \ldots, 7$, либо то же самое с заменой S на $Л$. Выше мы особо выделили решения, содержащие 4-мерные вселенные.

Особый интерес представляют, как нам кажется, решения типа $\mathrm{AdS}^4 \times S_1^4 \times S^3$ и $\mathrm{AdS}^4 \times \mathrm{dS}^4 \times S^3$, которые мы будем называть произведением двух вселенных. Обсудим представляющиеся здесь возможности более подробно и в более общем контексте. Предположим, что в некоторой теории получены вакуумные решения вида $M_1^4 \times \widetilde{M}_1^4 \times B$, где многообразия $\widetilde{M}_1^4$ и B компактные и достаточно малого объема (порядка планковского). Несмотря на малые размеры многообразие $\widetilde{M}_1^4$ имеет свое время, и там возможна своя динамика, т. е. его можно рассматривать как самостоятельную вселенную. Переходы из M_1^4 в $\widetilde{M}_1^4$ будут возможны только при очень высоких энергиях порядка планковских, а переходы из $\widetilde{M}_1^4$ в M_1^4 в принципе возможны и при относительно низких энергиях порядка обратного радиуса вселенной M_1^4. С точки зрения вселенной M_1^4 с каждой точкой этой вселенной связана вселенная $\widetilde{M}_1^4$, и наоборот с точки зрения вселенной $\widetilde{M}_1^4$ с каждой точкой этой вселенной связана вселенная M_1^4.

Переходы из $\tilde{M}_1^4$ в M_1^4 будут проявляться как выбросы материи и энергии в M_1^4.

Рассматриваемый динамический подход интересно сопоставить с высказанной Джинсом в общей форме идеей о том, что могут существовать «сингулярные точки», в которых «материя втекает в наш мир из какого-то иного и совершенно постороннего пространства» [20, с. 352].

Не исключено, что эти процессы могут проявляться в космологии, а также в ядрах галактик и квазарах, механизм выделения энергии в которых не имеет до сих пор общепринятого объяснения.

Заметим также, что идея о наличии дополнительных времениподобных измерений в подходах типа Калуцы — Клейна может пролить новый свет на природу космологической сингулярности, поскольку при подходе к сингулярности по макровремени начинает играть роль и микровремя и следует учитывать динамику по всем этим времениподобным измерениям.

3. ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ $D=10$, $N=2$ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

В этом разделе будут рассмотрены вакуумные решения с произвольной сигнатурой в некиральной $D=10$, $N=2$ супергравитации. Эта теория получается размерной редукцией [21] из 11-мерной теории, имеет больше свободных параметров и может оказаться более подходящей для феноменологии [22], чем исходная 11-мерная супергравитация.

Вакуумные решения в этой теории со стандартной сигнатурой рассматривались в работах [21—24]. При этом 4-мерное пространство-время оказывалось пространством анти-де Ситтера.

Лагранжиан соответствующего бозонного сектора $D=10$, $N=2$ некиральной супергравитации имеет следующий вид [22]:

$$L=\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,R-\sqrt{|g|}\,\nabla_M\varphi\nabla^M\varphi-\frac{1}{8}\sqrt{|g|}\,r^2e^{3\varphi}F_{MN}F^{MN}-$$
$$-\frac{1}{6}\sqrt{|g|}\,e^{-2\varphi}F_{MNP}F^{MNP}-\frac{1}{24}\sqrt{|g|}\,e^{\varphi}F'_{MNPQ}F'^{MNPQ}+$$
$$+\frac{1}{4(12)^2}\,\varepsilon^{M_1\ldots M_{10}}F'_{M_1\ldots M_4}F'_{M_5\ldots M_8}A_{M_9M_{10}},$$

где $|g|$ есть абсолютное значение определителя 10-мерного метрического тензора, φ — скалярное поле, r — константа, соответствующая радиусу одиннадцатой координаты, $F'_{MNPQ}=F_{MNPQ}+4rA_{[M}F_{NPQ]}$ и $F_{M_1\ldots M_n}=$ $=n\partial_{[M_1}A_{M_2\ldots M_n]}$. Можно заметить, что здесь появились три новых бозонных поля: φ, A_M и A_{MN}. Уравнения движения имеют вид

$$R_{MN}=2\partial_M\varphi\partial_N\varphi+e^{3\varphi}\frac{r^2}{2}\left(F_{MP}F_N{}^P-\frac{1}{16}g_{MN}F_{PQ}F^{PQ}\right)+ \tag{15а}$$
$$+e^{-2\varphi}\left(F_{MPQ}F_N{}^{PQ}-\frac{1}{12}g_{MN}F_{PQR}F^{PQR}\right)+$$
$$+e^{\varphi}\left(\frac{1}{3}F'_{MPQR}F'_N{}^{PQR}-\frac{1}{32}g_{MN}F'_{PQRS}F'^{PQRS}\right),$$

$$\nabla_M\nabla^M\varphi=\frac{3}{16}r^2e^{3\varphi}F_{MN}F^{MN}-\frac{1}{6}e^{-2\varphi}F_{MNP}F^{MNP}+ \tag{15б}$$

$$+\frac{1}{48}e^{\varphi}F'_{MNPQ}F'^{\,MNPQ},$$

(15в) $$r\nabla_M(e^{3\varphi}F^{MN})=\frac{2}{3}e^{\varphi}F'^{\,NPQR}F_{PQR},$$

(15г) $$\nabla_M(e^{-2\varphi}F^{MNP})=\nabla_M(re^{\varphi}F'^{\,MNPQ}A_Q)-$$
$$-\frac{3}{(12)^3}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{M_1\ldots M_8NP}F'_{M_1\ldots M_4}F'_{M_5\ldots M_8},$$

(15д) $$\nabla_M(e^{\varphi}F'^{\,MNPQ})=\frac{1}{72}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{M_1\ldots M_7NPQ}F'_{M_1\ldots M_4}F_{M_5\ldots M_7}.$$

Здесь, как и в 11-мерном случае, рассматриваем соответствующие вакуумные решения для произвольной сигнатуры 10-мерного метрического тензора g_{MN}. Мы будем рассматривать простейшие решения, для которых $\varphi=c=\mathrm{const}$, а для тензорных полей использовать анзац типа Фроинда — Рубина. Предположим, что $A_{MN}=0$. Тогда $F'_{MNPQ}=F_{MNPQ}$ и могут быть два случая: либо $F'^{\,2}=0$, либо $F'^{\,2}\neq0$. В случае $F'^{\,2}=0$ и $F_{\mu\nu\rho\sigma}\neq0$ должны быть отличны от нуля некоторые компоненты тензора 4 ранга в дополнительном пространстве, однако это противоречит уравнению (15г). Поэтому мы должны рассмотреть решение, при котором некоторые компоненты F_{MN} были бы отличны от нуля. Будем исходить из того, что 10-мерное многообразие можно представить в следующем виде:

$$M_T^{10}=M_t^4\times M_\tau^2\times M_{T-t-\tau}^4,$$

где соответствующие вакуумные величины

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=\sqrt{(-1)^t g^{(4)}}\,\lambda_t\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},\qquad F_{mn}=\sqrt{(-1)^\tau g^{(2)}}\,\frac{1}{r}\,l_\tau\varepsilon_{mn}.$$

В нашем случае уравнения движения (15в)—(15д) автоматически удовлетворяются и остаются следующие 2 уравнения:

(16а) $$R_{MN}=\frac{r^2}{2}e^{3c}\left(F_{MP}F_N{}^P-\frac{1}{16}g_{MN}F_{PQ}F^{PQ}\right)+$$
$$+e^{c}\left(\frac{1}{3}F_{MPQR}F_N{}^{PQR}-\frac{1}{32}g_{MN}F_{PQRS}F^{PQRS}\right),$$

(16б) $$9r^2e^{3c}F_{MN}F^{MN}+F_{MNPQ}F^{MNPQ}=0.$$

Из условия (16б) вытекает следующее соотношение:

$$(-1)^\tau 3e^{2c}l_\tau^2+(-1)^t4\lambda_t^2=0.$$

Соответствующие тензоры Риччи имеют вид

$$R_{\mu\nu}=(-1)^t\,{}^4\!/_3e^{c}\lambda_t^2g_{\mu\nu},\qquad R_{mn}=(-1)^\tau e^{3c}l_\tau^2g_{mn},$$
$$R_{ab}=(-1)^{t+1}\,{}^2\!/_3e^{c}\lambda_t^2g_{ab},$$

где индексы $a,b,\ldots$ относятся к многообразию $M^4_{T-t-\tau}$, для которого $F_{abcd}=0$ в вакууме. Напомним, что полученные вакуумные решения дают

(17) $$M_T^{10}=M_t^4\times M_\tau^2\times M^4_{T-t-\tau}$$

с условием $(-1)^t+(-1)^\tau=0$, т. е. когда t четное, тогда τ нечетное и наоборот.

Здесь не будем перечислять всевозможные решения вида (17), которые можно привести из полученных результатов для тензоров Риччи. Однако заметим, что эти решения являются частью уже полученных решений для 11-мерного случая (учитывая, что одно пространственноподобное измерение компактифицировано). Напишем только решения, соответствующие произведению двух 4-мерных вселенных:

$$M_2^{10}=\mathrm{AdS}^4\times S^2\times \mathrm{dS}^4, \qquad M_4^{10}=\mathrm{AdS}^4\times S_2^2\times \mathrm{dS}^4.$$

Заметим, что при этом не может появиться 2-мерное многообразие M_1^2 вследствие соотношения $(-1)^\tau+(-1)^t=0$.

Существуют также вакуумные решения, которые дают

$$M_T^{10}=M_t^4\times M_{\tau_1}^2\times M_{\tau_2}^2\times M^2_{T-t-\tau_1-\tau_2},$$

где число времениподобных измерений должно удовлетворять условию

$$3e^{2c}[(-1]^{\tau_1}l_{\tau_1}^2+(-1)^{\tau_2}l_{\tau_2}^2+(-1)^{\tau_3}l_{\tau_3}^2]+4(-1)^t\lambda_t^2=0.$$

Риччи-тензор $R_{\mu\nu}$ остается прежним, а

$$R_{mn}(M_{\tau_i})=(-1)^{\tau_i}\frac{1}{2}e^{3c}l^2_{\tau_i}g_{mn}+(-1)^{t+1}\frac{2}{3}e^c\lambda_t^2 g_{mn}.$$

Из этой формулы видно, что одно из 2-мерных многообразий можно привести к плоскому.

В случае, когда не фиксируется сигнатура дополнительных измерений, появляется возможность рассмотреть решения, при которых напряженность поля A_{MN} отлична от нуля, а именно рассмотрим анзац

(18а) $\quad A_{MNP}=0, \quad A_N=0, \quad F_{\mu\nu\rho}=0, \quad \mu,\nu,\rho=0,1,2,3,$

(18б) $\quad F_{mnk}=\sqrt{(-1)^{\tau_1}g^{(3)}}\,f_{\tau_1}\varepsilon_{mnk}, \quad m,n,k=4,5,6,$

(18в) $\quad F_{abc}=\sqrt{(-1)^{\tau_2}g^{(3)}}\,f_{\tau_2}\varepsilon_{abc}, \quad a,b,c=7,8,9.$

Уравнение (15б) приводит к соотношениям

(19) $\quad (-1)^{\tau_1}+(-1)^{\tau_2}=0, \quad f_{\tau_1}=f_{\tau_2}=f.$

Заметим, что оставшиеся уравнения (15в)—(15д) при этом автоматически удовлетворяются. Соотношение (19) выполняется в случае, если число времениподобных измерений в M_τ^3 и M_t^3 отличается по модулю 2, т. е. $\tau_1-\tau_2\equiv1 \pmod 2$. Подставляя соотношения (18) в уравнения (15а), получаем следующие уравнения для метрики:

$$R_{\mu\nu}=0, \qquad R_{mn}=2e^{-2c}(-1)^{\tau_1}f^2g_{mn}, \qquad R_{ab}=2e^{-2c}(-1)^{\tau_2}f^2g_{ab}.$$

Таким образом, мы получаем представление M^{10} в виде

$$M_T^{10}=M_t^4\times M_{\tau_1}^3\times M_{\tau_2}^3, \qquad T=t+\tau_1+\tau_2,$$

где τ_1 и τ_2 удовлетворяют уравнению $\tau_1-\tau_2\equiv1 \pmod 2$. Замечательным свойством этого решения является компактификация при $t=1$ на 4-мерное плоское пространство Минковского $\mathscr{M}^4$. Приведем при $t=1$ возможные решения

(20а) $M_2^{10}=\mathscr{M}^4\times S^3\times Л_1^3$,

(20б) $M_4^{10}=\mathscr{M}^4\times S^3\times Л_3^3$,

(20в) $M_4^{10}=\mathscr{M}^4\times Л_1^3\times S_2^3$.

В решении (20б) дополнительные времениподобные измерения могут быть компактифицированы, если в качестве $Л_3^3$ взято, например, $Л_3^3=S^3/\Gamma$, Γ действует не свободно, причем в этом случае $b_1(Л_3^3)=0$, т. е. критерий отсутствия безмассовых духов выполняется.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в работе рассмотрены вакуумные решения 10- и 11-мерных теорий супергравитации с произвольной сигнатурой. Отметим, что в пространстве M_t^{11} майорановские спиноры могут существовать при $t\equiv 1,2 \pmod 4$, т. е., в частности, в полученных выше случаях решений вида произведения двух 4-мерных вселенных. Было бы интересно рассмотреть вопрос о возможности построения суперсимметричных теорий поля на многообразиях с произвольной сигнатурой. Представляет значительный интерес исследование космологических аспектов полученных решений с двумя вселенными. Следует также провести дальнейший физический анализ решений 10-мерной супергравитации с нулевой космологической постоянной.

Эта работа была выполнена во время визита одного из авторов (Б. Г. Д.) в МИАН (Москва) и ОИЯИ (Дубна), сотрудникам которых он выражает благодарность за гостеприимство.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем критерий отсутствия духов в безмассовом 4-мерном секторе теории Калуцы – Клейна с дополнительными времениподобными измерениями. Заметим, что в современных теориях Калуцы – Клейна только безмассовые частицы рассматриваются как наблюдаемые, т. к. массовые частицы имеют чрезвычайно большую массу, порядка планковской. В [10] показано, что безмассовые духи отсутствуют в 4-мерном пространстве-времени при выполнении следующих двух условий: 1) внутреннее пространство не допускает векторных полей Киллинга; 2) если в теории имеются антисимметричные тензорные поля ранга l, то необходимо, чтобы все числа Бетти b_{2k+1} внутреннего пространства исчезали для $2k+1\leqslant l$.

Действительно, если внутреннее пространство имеет векторное поле Киллинга, то согласно стандартной процедуре Калуцы – Клейна в 4-мерном пространстве-времени будем иметь калибровочное поле, причем из-за того, что дополнительные измерения времениподобны, кинетический член в действии для этого поля будет иметь неправильный знак. Таким образом, приходим к условию 1. Условие 2 можно пояснить следующим образом. Если в лагранжиане многомерной теории имеются антисимметричные поля, то в 4-мерном пространстве-времени будем иметь безмассовые поля, возникающие из нулевых мод оператора Ходжа – де Рама, причем для нечетного ранга эти поля будут духами. Если же числа Бетти внутреннего пространства исчезают, то безмассовые духи отсутствуют. Таким образом, получаем условие 2. Заметим, что условия 1 и 2 являются достаточными для отсутствия духов, но не являются необходимыми.

Литература

[1] *Witten E.* // Nucl. Phys. 1981. V. 186. № 2. P. 412–433.
[2] *Salam A.. Strathdee J.* // Ann. Phys. 1982. V. 141. № 2. P. 316–341.
[3] *Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.* // Phys. Rep. 1985. V. 130. № 1. P. 1–141.
[4] *Schwarz J. H.* Superstring: Preprint CALT-68-1252. Pasadena, 1985.
[5] *Green M. B.* Developments in Superstring Fild Theory: Preprint CALT-68-1219. Pasadena, 1984.
[6] *Арефьева И. Я., Волович И. В.* // УФН. 1985. Т. 164. № 4. С. 655–681.
[7] *Сахаров А. Д.* // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. В. 2. С. 375–383.
[8] *Арефьева И. Я., Волович И. В.* // ТМФ. 1985. Т. 64. № 2. С. 329–335.
[9] *Freedman D., Gibbons G., West P.* // Phys. Lett. 1983. V. 124B. P. 491.
[10] *Арефьева И. Я., Волович И. В.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. В. 12. С. 535–537. *Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* // Phys. Lett. 1985. V. 164. № 2. P. 287–292.
[11] *Witten E.* Princeton preprint, 1983.
[12] *Wetterich C.* // Nucl. Phys. 1983. V. 211. № 1. P. 177–189.
[13] *Scherk J.* // Recent Developments in Gravitation. Ed. M. Levy and S. Deser. NY – London: Plenum Publ. Corp., 1979.
[14] *Cremmer E., Julia B., Scherk J.* // Phys. Lett. Ser. B. 1978. V. 76. № 3. P. 409–412.
[15] *Freund P. G. O., Rubin M. A.* // Phys. Lett. 1980. V. B97. № 3. P. 233–235.
[16] *Castellani L., Romans L. J., Warner N. P.* // Nucl. Phys. 1984. V. B241. № 2. P. 429–462.
[17] *Винберг Э. Б.* // УМН. 1985. Т. 40. № 1. С. 29–71. *Макаров В. С.* // Проблемы геометрии. Т. 15 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР). М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3–59.
[18] *Hawking S. W.* // Recent Developments in Gravitation. Ed. M. Levy and S. Deser. NY – London: Plenum Publ. Corp., 1979.
[19] *Pilch K., van Nieuwenhnizen P., Townsend P.* Compactifications of $d=11$ Supergravity on S^4 (or $11=7+4$ too): Preprint ITP-SB-83-51. NY: Stony Brook, 1983.
[20] *Jeans L. H.* Astronomy and Cosmogony. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1928.
[21] *Giani F., Pernici M.* // Phys. Rev. 1984. V. D30. № 2. P. 325–333. *Campbell I. C. G., West P. G.* // Nucl. Phys. 1984. V. B243. № 1. P. 112–124.
[22] *Erawa Z. F., Koh I. G.* // Phys. Lett. 1984. V. 142B. № 2. P. 153–156; 157–162.
[23] *Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.* // ТМФ. 1984. Т. 61. № 2. С. 241–247; ЯФ. 1984. Т. 39. № 5. С. 1314–1320.
[24] *Watamura S.* // Phys. Lett. 1983. V. 129B. № 1. P. 188–192.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3.I.1986 г.

SPONTANEOUS REDUCTION IN MANY-DIMENSIONAL (D = 10, 11) THEORIES OF SUPERGRAVITY WITH ARBITRARY SIGNATURE

Aref'eva I. Ya., Volovich I. V., Dragović D. G.

Vacuum solutions in many-dimensional theories of the Kaluza – Klein type with arbitrary signature are considered. Solutions of 10- and 11-dimensional theories of supergravity are obtained which satisfy the criterions of ghost absence in the effective massless 4-dimensional theory. Solutions are constructed which correspond to two 4-dimensional universes and their possible cosmological implications are discussed. For the $D=10$, $N=2$ supergravity vacuum solutions with vanishing cosmological constant are obtained.