Алгебра и логика, 43, N 4 (2004), 459—481

УДК 510.5

Σ-ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В НАСЛЕДСТВЕННО КОНЕЧНЫХ НАДСТРОЙКАХ И ПАРЫ МОДЕЛЕЙ[*)]

А. И. СТУКАЧЕВ

Введение

В данной работе изучается понятие Σ-определимости алгебраических систем в наследственно конечных надстройках, которое позволяет, в частности, ввести аналоги понятия конструктивности для несчетных моделей. Ю. Л. Ершов в [1, 2] рассматривал следующую проблему: охарактеризовать класс теорий, имеющих несчетные модели, Σ-определимые в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками. В [1] получен критерий этого свойства в терминах конструктивизируемости ${}^*\omega$-спектра теории, в [2] выдвинута гипотеза о том, что данным свойством обладают все c-простые теории.

В настоящей работе вводится понятие относительной неразличимости, посредством которого единым способом даются критерии Σ-определимости несчетной модели c-простой теории в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками и бесконечными моделями пустой сигнатуры (с равенством). В качестве следствия устанав-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 02-01-00540, Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-2069.2003.1, программы "Университеты России", проект УР 04.01.019.

ливается существование c-простой теории (бесконечной сигнатуры), никакая несчетная модель которой не является Σ-определимой в наследственно конечных надстройках над плотными линейными порядками.

Понятие относительной неразличимости базируется на рассмотрении пары моделей, основные множества которых имеют непустое пересечение. В теории допустимых множеств рассматриваются также пары моделей как алгебраические системы сигнатуры, полученной объединением (непересекающихся) сигнатур исходных моделей, с добавлением одноместных предикатных символов, выделяющих их основные множества. В качестве носителя такой системы берется объединение носителей исходных моделей, причем нет никаких ограничений на их взаимное расположение. Для так определенных пар моделей в работе устанавливается критерий рекурсивной насыщенности. В качестве следствия показывается, что пара, образованная моделями c-простых теорий, является рекурсивно насыщенной. Приводится пример теории T (с простой моделью $\mathfrak{M}_0$), все модели которой рекурсивно насыщены, но для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M})$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_0$. Полученные результаты позволяют указать пример моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ таких, что $O(\mathfrak{M}) = O(\mathfrak{N}) = \omega$, но $O(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) > \omega$, где $O(\mathfrak{A})$ — наименьший ординал, не лежащий в допустимом множестве $\mathrm{HYP}(\mathfrak{A})$ (см. [3, 4]).

Терминология, а также все используемые в тексте работы обозначения являются стандартными и соответствуют [3—6]. Рассматриваются алгебраические системы не более чем счетной сигнатуры, причем не уменьшая общности можно считать, что сигнатура содержит только предикатные символы. Запись $\sigma = \langle P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k}, \dots \rangle$ означает, что P_k — n_k-местный предикатный символ сигнатуры σ, и если $f(k) = n_k$ — вычислимая функция, то сигнатура σ также называется вычислимой. Если $\mathfrak{A}$ — модель сигнатуры σ, то через $P_k^{\mathfrak{A}}$ обозначается интерпретация предикатного символа P_k в модели $\mathfrak{A}$, а через $|\mathfrak{A}|$ — ее основное множество. Через $M^{<\omega}$ обозначается множество всех конечных наборов из элементов произвольного множества M.

§ 1. Σ-определимость над классами моделей c-простых теорий

Напомним понятие Σ-определимости алгебраической системы в допустимом множестве [3], обобщающее понятие конструктивизируемости. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система вычислимой предикатной сигнатуры $\langle P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k}, \dots\rangle$, $\mathbb{A}$ — допустимое множество сигнатуры σ_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система $\mathfrak{M}$ называется Σ-*определимой в допустимом множестве* $\mathbb{A}$, если существует вычислимая последовательность Σ-формул сигнатуры σ_0

$$\Phi(x_0, y),\ \Psi(x_0, x_1, y),\ \Psi^*(x_0, x_1, y),\ \Phi_0(x_0, \dots, x_{n_0-1}, y),$$

$$\Phi_0^*(x_0, \dots, x_{n_0-1}, y),\ \dots,\ \Phi_k(x_0, \dots, x_{n_k-1}, y),\ \Phi_k^*(x_0, \dots, x_{n_k-1}, y),\ \dots,$$

такая, что для некоторого параметра $a \in A$ множество $M_0 \leftrightharpoons \Phi^{\mathbb{A}}(x_0, a)$ непусто, отношение $\eta \leftrightharpoons \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2$ является отношением конгруэнтности на алгебраической системе

$$\mathfrak{M}_0 \leftrightharpoons \langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \dots, P_k^{\mathfrak{M}_0}, \dots\rangle,$$

где $P_k^{\mathfrak{M}_0} \leftrightharpoons \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \dots, x_{n_k-1}) \cap M_0^{n_k}$, $k \in \omega$,

$$\Psi^{*\mathbb{A}}(x_0, x_1, a) \cap M_0^2 = M_0^2 \setminus \Psi^{\mathbb{A}}(x_0, x_1, a),$$

$$\Phi_k^{*\mathbb{A}}(x_0, \dots, x_{n_k-1}, a) \cap M_0^{n_k} = M_0^{n_k} \setminus \Phi_k^{\mathbb{A}}(x_0, \dots, x_{n_k-1})$$

для всех $k \in \omega$ и система $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-системе $\mathfrak{M}_0 / \eta$. В этом случае говорят, что данная последовательность формул (с параметром $a \in A$) Σ-*определяет* систему $\mathfrak{M}$ в допустимом множестве $\mathbb{A}$.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда допустимое множество $\mathbb{A}$ является наследственно конечной надстройкой. Ординалами любой наследственно конечной надстройки являются натуральные числа, и только они, поэтому понятие Σ-определимости в этом случае наиболее близко понятию конструктивизируемости. Для $\mathbb{A} = \mathrm{HF}(\varnothing)$ понятия Σ-определимости в $\mathbb{A}$ и конструктивизируемости совпадают. Случай, когда

$\mathbb{A} = \mathrm{HF}(\mathfrak{M})$, а $\mathfrak{M}$ — бесконечная счетная модель, можно свести к рассмотрению относительной конструктивизируемости, использующей понятие вычислимости с оракулом. Наконец, случай, когда в качестве $\mathbb{A}$ берется наследственно конечная надстройка над несчетной моделью, интересен тем, что позволяет ввести некоторый аналог (относительной) конструктивизируемости и для несчетных систем.

Очевидно, что любая алгебраическая система $\mathfrak{M}$ может быть Σ-определена в подходящей наследственно конечной надстройке (например, тривиальным образом в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$). Поэтому более содержательным является вопрос о Σ-определимости $\mathfrak{M}$ в наследственно конечных надстройках над моделями из некоторого класса K. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ *Σ-определима над классом K*, если $\mathfrak{M}$ Σ-определима в $\mathrm{HF}(\mathfrak{A})$ для некоторой модели $\mathfrak{A}$ из класса K. В дальнейшем нас будут интересовать классы вида $\mathrm{Mod}(T)$, т. е. классы моделей некоторых теорий.

Теория T называется *c-простой* [3], если она счетно категорична, модельно полна, разрешима и имеет разрешимое множество полных формул. Всюду далее предполагается, что сигнатура c-простой теории вычислима (т. е. не обязательно конечна). Вследствие ω-категоричности всякая c-простая теория имеет единственную с точностью до изоморфизма счетную модель и, более того, разрешимую модель, которая единственна с точностью до вычислимого изоморфизма. *Разрешимой* называется модель, основное множество которой является вычислимым множеством натуральных чисел, все определимые отношения которой также (равномерно) вычислимы. Модель называется *вычислимой*, если ее основное множество также является вычислимым множеством натуральных чисел, но равномерно вычислимы лишь отношения, определимые атомарными формулами. Наряду с этими понятиями будем также использовать понятия конструктивизируемой и сильно конструктивизируемой моделей [7].

В терминах разрешимых моделей сформулируем необходимое условие, при котором c-простая теория имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом моделей другой c-простой теории. Для этого введем следующее общее понятие, имеющее смысл для произвольной пары моделей с пересекающимися основными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — некоторые алгебраические системы, то множество $I \subseteq |\mathfrak{M}| \cap |\mathfrak{N}|$ называется множеством $\mathfrak{M}$-*неразличимых элементов в* $\mathfrak{N}$, если для любых $i_0, \ldots, i_n, i'_0, \ldots, i'_n \in I$

$$\langle \mathfrak{M}, i_0, \ldots, i_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, i'_0, \ldots, i'_n \rangle \Rightarrow \langle \mathfrak{N}, i_0, \ldots, i_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, i'_0, \ldots, i'_n \rangle.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть T_1 и T_2 — c-простые теории. Если теория T_2 имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом* $\mathrm{Mod}(T_1)$, *то существуют разрешимые модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ теорий T_1 и T_2, соответственно, такие, что в модели $\mathfrak{N}$ есть бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов, где $\mathfrak{M}^*$ — некоторое обогащение модели $\mathfrak{M}$ конечным числом констант.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть некоторая несчетная модель теории T_2 Σ-определима в наследственно конечной надстройке над некоторой (несчетной) моделью $\mathfrak{M}'$ теории T_1 посредством набора Σ-формул

$$\Gamma = \langle \Phi, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_k, \Phi_k^*, \ldots \rangle,$$

(где формулы Ψ и Ψ^* определяют отношение равенства), причем не нарушая общности можно считать, что параметром является набор праэлементов $\bar{m}' \in |\mathfrak{M}'|^{<\omega}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — разрешимая модель теории T_1. Поскольку T_1 — c-простая теория, найдется набор $\bar{m}_0$ элементов $\mathfrak{M}$ такой, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}', \bar{m}' \rangle$. Любая модель c-простой теории является достаточно насыщенной, поэтому $\langle \mathrm{HF}(\mathfrak{M}), \bar{m}_0 \rangle \equiv \langle \mathrm{HF}(\mathfrak{M}'), \bar{m}' \rangle$ (напомним: модель $\mathfrak{M}_0$ называется *достаточно насыщенной* [3], если $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1$ и $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_1)$ для некоторой ω-насыщенной модели $\mathfrak{M}_1$). Тогда набор формул Γ с параметром $\bar{m}_0$ корректно определяет в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ модель $\mathfrak{N}'$, которая будет моделью теории T_2. Система формул Γ с данным набором параметров не может определять модель с конечным носителем (иначе конечной была бы и модель, определяемая этим набором в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}')$), следовательно, $\mathfrak{N}'$ будет счетной моделью теории T_2. Кроме того, по всякой сильной конструктивизации модели $\mathfrak{M}$ набор Γ позволяет построить конструктивизацию модели $\mathfrak{N}'$. По способу построения будем использовать для модели $\mathfrak{N}'$ обозначение $\Gamma(\mathrm{HF}(\mathfrak{M}), \bar{m}_0)$.

Известно [3], что любой элемент наследственно конечной надстройки $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ представим в виде значения терма $t_\varkappa(\bar{m})$, где $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ — набор праэлементов, а $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$. Покажем существование таких элемента $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$, набора $\bar{m}_1 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ и бесконечного множества $X \subseteq M$, что $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi^*(t_\varkappa(m, \bar{m}_1), t_\varkappa(m', \bar{m}_1), \bar{m}_0)$ для любых различных m, m' из множества X. Действительно, в противном случае (поскольку $\mathfrak{M}$ — простая модель теории T_1) набор формул Γ определял бы не более чем счетные модели над любыми моделями теории T_1.

Так как модель $\mathfrak{M}$ разрешима и Ψ^* — Σ-формула, можно найти бесконечное вычислимое множество $I \subseteq X$. Для этого достаточно взять произвольное $x_0 \in X$, найти (эффективно) $x_1 = \mu x(\mathrm{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi^*(x_0, x_1, \bar{m}_0))$ и так продолжать далее, в результате $I \leftrightharpoons \{x_0, x_1, \ldots\}$.

Важным является следующее свойство. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — достаточно насыщенная модель. Если $a_0, a_1 \in \mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0)$, то типы элементов a_1 и a_2 в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}_0)$ совпадают тогда и только тогда, когда существуют $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathrm{HF}(n)$, $\bar{m}_0$, $\bar{m}_1 \in M_0^n$ такие, что $a_0 = t_\varkappa(\bar{m}_0)$, $a_1 = t_\varkappa(\bar{m}_1)$, а типы наборов $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_1$ совпадают в $\mathfrak{M}_0$ (док-во см. в [3]). Поскольку $\mathfrak{M}$ достаточно насыщена, для любых $i_0, \ldots, i_n, i'_0, \ldots, i'_n \in I$ из $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}_2, i_0, \ldots, i_n \rangle \equiv$ $\equiv \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_2, i'_0, \ldots, i'_n \rangle$ следует

$$\langle \mathrm{HF}(\mathfrak{M}), t_\varkappa(i_0, \bar{m}_1), \ldots, t_\varkappa(i_n, \bar{m}_1) \rangle \equiv \langle \mathrm{HF}(\mathfrak{M}), t_\varkappa(i'_0, \bar{m}_1), \ldots, t_\varkappa(i'_n, \bar{m}_1) \rangle,$$

где $\bar{m}_2$ — набор, являющийся конкатенацией наборов $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_1$. Модель $\mathfrak{N}'$ определяется в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ набором Σ-формул, поэтому на основе произвольной конструктивизации μ модели $\mathfrak{M}$ можно построить конструктивизацию ν наследственно конечной надстройки $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$, для которой $\mu^{-1}(i) = \nu^{-1}(t_\varkappa(i, \bar{m}_0))$ при всех $i \in I$. На основе этой конструктивизации легко получить разрешимую модель $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{N}'$ такую, что I будет бесконечным вычислимым множеством $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}_2 \rangle$-неразличимых элементов в $\mathfrak{N}$. $\square$

Выделим теперь подкласс класса c-простых теорий, для которых необходимое условие Σ-определимости несчетных систем будет одновременно и достаточным. Для этого рассмотрим релятивизованный вариант функции Рыль–Нардзевского. Для произвольных ω-категоричной модели $\mathfrak{A}$ и подмножества $X \subseteq A$ определим функцию $R^{\mathfrak{A}}_X : \omega \to \omega$ следующим образом: для каждого $n \in \omega$ пусть $R^{\mathfrak{A}}_X(n)$ — число n-типов, реализуемых в модели $\mathfrak{A}$ элементами из X. Для простоты заменим $R^{\mathfrak{A}}_{|\mathfrak{A}|}$ на $R^{\mathfrak{A}}$. Будем говорить, что ω-категоричная теория имеет *широкие модели*, если $R^{\mathfrak{A}}_X = R^{\mathfrak{A}}$ для (любой) модели $\mathfrak{A}$ этой теории при любом бесконечном подмножестве $X \subseteq |\mathfrak{A}|$. Другими словами, любое бесконечное подмножество широкой модели реализует все типы элементарной теории этой модели. Теория T_E бесконечных систем пустой сигнатуры (с равенством) и теория T_{DLO} плотного линейного порядка без концевых элементов являются примерами c-простых теорий, все модели которых являются широкими.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть T_1 и T_2 — c-простые теории, причем T_1 имеет широкие модели. В этом случае несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $\mathrm{Mod}(T_1)$ тогда и только тогда, когда существуют разрешимые модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ теорий T_1 и T_2, соответственно, такие, что в $\mathfrak{N}$ существует бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов, где $\mathfrak{M}^*$ — обогащение модели $\mathfrak{M}$ конечным числом констант.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость показана в теореме 1, поэтому требуется установить только достаточность. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — разрешимые модели соответственно теорий T_1 и T_2 с сигнатурами σ_1 и σ_2, а модель $\mathfrak{N}$ обладает бесконечным вычислимым множеством $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов $I \subseteq |\mathfrak{N}|$, где $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle$, $\bar{m}_0 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$. Построим конструктивизацию модели $\mathfrak{N}$, взяв в качестве основы скулемовскую оболочку множества $|\mathfrak{M}|$ относительно теории T_2 (для этого множество $|\mathfrak{M}|$ предварительно "проектируется" на множество $I \subseteq |\mathfrak{M}| \cap |\mathfrak{N}|$); в ходе построения непосредственно получается набор Γ Σ-формул, который для подходящей модели $\mathfrak{M}'$ теории T_1 сколь угодно большой мощности определяет в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M}')$ модель теории T_2 той же мощности, что и $\mathfrak{M}'$. При задании на множестве $|\mathfrak{M}|$ структуры подмодели некоторой модели теории T_2 путем проектирования на I требуется, чтобы модель $\mathfrak{M}$ была широкой. Скулемовский терм, соответствующий формуле $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ сигнатуры σ_2, обозначим через $t_\varphi(\bar{x})$; для скулемовских термов существует эффективное представление в любой наследственно конечной надстройке вследствие вычислимости сигнатуры σ_2. При построении новые скулемовские термы добавляются лишь в том случае, если данная формула не реализуется никаким другим элементом, уже попавшим в скулемовскую оболочку к данному шагу.

Конструкция

Для каждого шага t будут эффективно определены множество S_t как часть скулемовского замыкания множества $|\mathfrak{M}|$ относительно теории T_2, функция $p_t : S_t^{<\omega} \to (S_t \upharpoonright I)^{<\omega}$, где $S_t \upharpoonright I$ — подмножество в S_t, образующее соответствующую часть скулемовского замыкания множества I, и множество F_t, являющееся полной диаграммой множества S_t в сигнатуре σ_2. С произвольной моделью $\mathfrak{A}$ свяжем модель $\mathfrak{A}^{<\omega}$, носителем которой является множество $|\mathfrak{A}|^{<\omega}$, а сигнатура состоит из бинарного отношения $\sim$ и двуместной функции $\hat{}$, определенных следующим образом: $\bar{a}_1 \sim \bar{a}_2$ тогда и только тогда, когда наборы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ имеют одинаковую длину и $\langle \mathfrak{A}, \bar{a}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \bar{a}_2 \rangle$, а функция $\hat{}$ по паре наборов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ дает набор $\bar{a}_1\hat{}\bar{a}_2$, являющийся их конкатенацией. Если $\mathfrak{A}$ — счетная модель c-простой теории, то модель $\mathfrak{A}^{<\omega}$ конструктивизируема.

Зафиксируем некоторую конструктивизацию μ модели $\mathfrak{M}^{<\omega}$, конструктивизацию ν модели $\mathfrak{N}^{<\omega}$, а также некоторую вычислимую геделевскую нумерацию $\{\varphi_n(\bar{x}) \mid n \in \omega\}$ формул сигнатуры σ_2.

Шаг 0. Пусть $S_0 \leftrightharpoons |\mathfrak{M}|$ и для любого набора $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ положим $p_0(\bar{m}) \leftrightharpoons \bar{n}$, где $\bar{n}$ — набор элементов из I с наименьшим возможным номером в нумерации μ, имеющий в $\mathfrak{M}^*$ тот же тип, что и набор $\bar{m}$ (т. е. удовлетворяющий эффективно проверяемому условию $\bar{m}_0\hat{}\bar{m} \sim \bar{m}_0\hat{}\bar{n}$). Теперь (эффективно) определим множество

$$F_0 \leftrightharpoons \{\varphi(\bar{m}) \,|\, \bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega},\ \varphi \text{ — формула сигнатуры } \sigma_2,\ \mathfrak{N} \models \varphi(p_0(\bar{m}))\}.$$

Шаг $t+1$. Пусть уже построены множества S_t, F_t и функция p_t. Для наборов элементов из S_t определим понятие эквивалентности относительно $\mathfrak{M}^*$ следующим образом: наборы $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ из $S_t^{<\omega}$ эквивалентны относительно $\mathfrak{M}^*$, если они имеют одинаковую длину и $p_t(\bar{s}_1) = p_t(\bar{s}_2)$. Для случая $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \in S_0$ наборы $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ эквивалентны относительно $\mathfrak{M}^*$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину и $\langle \mathfrak{M}^*, \bar{m}_1\rangle \equiv \langle \mathfrak{M}^*, \bar{m}_2\rangle$.

Вследствие ω-категоричности теории T_1 для каждой формулы $\varphi_n(\bar{x}, y)$, $n < t$, сигнатуры σ_2 существует лишь конечное число попарно неэквивалентных относительно $\mathfrak{M}^*$ наборов $\bar{s}$ элементов из S_t таких, что $\exists y \varphi_k(\bar{s}, y) \in F_t$. Пусть $\{\langle \varphi_{n_k}, \bar{s}_k\rangle \mid 1 \leqslant k \leqslant k_0\}$ — список всех таких формул с соответствующими наборами. Введем промежуточные множества S_t^k, F_t^k и функцию p_t^k для всех $k \leqslant k_0$, положив вначале $S_t^0 \rightleftharpoons S_t$, $F_t^0 \rightleftharpoons F_t$, $p_t^0 \rightleftharpoons p_t$, и для каждого $k \leqslant k_0$ выполним

Э т а п k. Пусть $S_t^k \rightleftharpoons S_t^{k-1}, F_t^k \rightleftharpoons F_t^{k-1}, p_t^k \rightleftharpoons p_t^{k-1}$. Определяем (это можно сделать эффективно), существует ли элемент $c \in S_t^{k-1}$, для которого $\varphi_{n_k}(\bar{s}_k\hat{\ }c) \in F_t^{k-1}$ (эффективность устанавливается индукцией по t; для случая $t = 0$ это видно из следующего замечания: I является множеством $\mathfrak{M}^*$-неразличимых элементов в $\mathfrak{N}$ и модель $\mathfrak{M}^*$ ω-категорична, поэтому проверить то, что данная формула не реализуется элементами из I, можно за конечное число шагов, рассмотрев всевозможные $\mathfrak{M}^*$-типы потенциальных свидетелей реализуемости формулы в $\mathfrak{N}$). Если такой элемент есть, то ничего не делаем; в противном случае поступаем следующим образом.

Добавляем в S_t^k все скулемовские термы, эквивалентные скулемовскому терму $t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s}_k)$ относительно $\mathfrak{M}^*$, т. е. все термы вида $t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s})$, для которых $p_t^{k-1}(\bar{s}) = p_t^{k-1}(\bar{s}_k)$. Доопределяем функцию p_t^k на S_t^k, полагая для всех новых термов $p_t^k(t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s})) \rightleftharpoons t_{\varphi_{n_k}}(p_t^{k-1}(\bar{s}))$. Множество F_t^k доопределяется так: для всякого вновь добавленного скулемовского терма $t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s})$ и для всякой полной относительно теории T_2 формулы θ сигнатуры σ_2 от $\mathrm{lh}(\bar{s}) + 1$ переменной (здесь $\mathrm{lh}(\bar{s})$ — длина набора $\bar{s}$) добавляем в F_t^k формулу $\theta(\bar{s}, t_{\varphi_{n_k}}(\bar{s}))$, если формула θ имеет наименьший геделевский номер среди полных формул ρ от $\mathrm{lh}(\bar{s}) + 1$ переменной, для которых

$$\exists y(\rho(\bar{s}, y) \wedge \varphi_{n_k}(\bar{s}, y)) \in F_t^{k-1}.$$

Далее, для произвольного набора $\bar{s} \in S_t^k$ добавляем формулу $\theta(\bar{s})$ в F_t^k, если θ — полная относительно T_2 формула сигнатуры σ_2 с наименьшим геделевским номером, для которой $\theta(\bar{s})$ совместна (относительно теории T_2) со всеми формулами из $F_t^k \upharpoonright \bar{s}$, где $F_t^k \upharpoonright \bar{s} \leftrightharpoons \{\varphi(\bar{s}') \mid \varphi(\bar{s}') \in F_t, \bar{s}' \in \in (\mathrm{sp}(\bar{s}))^{<\omega}\}$, а функция sp определяется индуктивно: для $m \in M$ полагаем $\mathrm{sp}(m) \leftrightharpoons \{m\}$, для всех скулемовских термов из S_t полагаем $\mathrm{sp}(t_\varphi(\bar{s})) \leftrightharpoons \leftrightharpoons \{t_\varphi(\bar{s})\} \cup \mathrm{sp}(\bar{s})$, наконец, для кортежей полагаем $\mathrm{sp}(\langle s_1, \ldots, s_n\rangle) \leftrightharpoons \leftrightharpoons \mathrm{sp}(s_1) \cup \ldots \cup \mathrm{sp}(s_n)$.

Полученное таким образом множество F_t^k требуется также замкнуть по логической выводимости относительно теории T_2. Как видно из описания, множество F_t^k определяется индуктивно, а стало быть, по теореме Ганди (см. [3, 4]), эффективно. Описание этапа k закончено.

Для завершения шага $t+1$ остается положить $S_{t+1} \leftrightharpoons S_t^{k_0}$, $F_{t+1} \leftrightharpoons \leftrightharpoons F_t^{k_0}$, $p_{t+1} \leftrightharpoons p_t^{k_0}$.

Описание конструкции закончено. Из ее свойств непосредственно следует, что полученная система с основным множеством $\bigcup\limits_{t\in\omega} S_t$ и (полной) диаграммой $\bigcup\limits_{t\in\omega} F_t$ является моделью теории T_2; а тогда по конструктивизации модели $\mathfrak{M}^{<\omega}$ можно построить сильную конструктивизацию модели $\mathfrak{N}$. Очевидно, что это построение может быть описано вычислимым набором Σ-формул сигнатуры $\sigma_1 \cup \{\in, U\}$, который в наследственно конечной надстройке над подходящей моделью $\mathfrak{M}'$ теории T_1 определяет несчетную модель теории T_2. Действительно, пусть $\theta(x, \bar{y})$ — полная формула теории T_1, для которой множество $I_\theta \leftrightharpoons \{i \in I \mid \mathfrak{M} \models \models \theta(i, \bar{m}_0)\}$ бесконечно (такая формула существует в силу ω-категоричности теории T_1). Возьмем модель $\mathfrak{M}'$ и набор ее элементов $\bar{m}'$ такие, что формула $\theta(x, \bar{m}')$ определяет в $\mathfrak{M}'$ несчетное подмножество. Если Γ — набор Σ-формул, задаваемый изложенной выше конструкцией, то из свойств этой конструкции вытекает, что $\Gamma(\mathrm{HF}(\mathfrak{M}'), \bar{m}')$ — несчетная модель теории T_2. Таким образом, несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $\mathrm{Mod}(T_1)$. $\square$

На самом деле, можно несколько расширить область применения предыдущей теоремы. Например, никакой плотный линейный порядок с концевыми элементами не может быть широкой моделью, хотя легко убедиться, что утверждения о Σ-определимости несчетной модели c-простой теории над плотными линейными порядками с концевыми элементами и без концевых элементов равносильны. Предыдущая теорема останется верной, если в ее формулировке ослабить требования на счетную модель $\mathfrak{M}$ теории T_1. А именно, если множество всех n-типов, реализуемых в модели $\mathfrak{M}$ элементами множества $X \subseteq |\mathfrak{M}|$, обозначить через $S_X^{\mathfrak{M}}(n)$, то достаточно наложить на $\mathfrak{M}$ следующие ограничения: для любого бесконечного множества $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ существует (бесконечное) определимое множество $D \subseteq |\mathfrak{M}|$, для которого $S_X^{\mathfrak{M}} = S_D^{\mathfrak{M}}$. Условия $S_X^{\mathfrak{M}} = S^{\mathfrak{M}}$ и $R_X^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{M}}$ равносильны, поэтому всякая широкая модель обладает данным свойством. Доказательство в этом более общем случае отличается от предыдущего только тем, что на начальном шаге берется не все множество $|\mathfrak{M}|$, а его определимое подмножество D (напомним, что для любой модели c-простой теории для подмножеств этой модели Σ-определимость в наследственно конечной надстройке равносильна обычной определимости).

Из теоремы Рамсея при помощи таких же рассуждений, что и в доказательстве теоремы Эренфойхта–Мостовского, вытекает следующее свойство ω-категоричных моделей: если $\mathfrak{M}$ — ω-категоричная модель, то для любых бесконечного множества $I \subseteq |\mathfrak{M}|$ и набора $\bar{m}_0 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ существует бесконечное множество $J \subseteq I$ такое, что для всех наборов $\bar{j}_1, \bar{j}_2$ элементов из J

$$\langle \mathfrak{M}, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, \bar{j}_2 \rangle \Rightarrow \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_2 \rangle,$$

где $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle$.

Эффективной версией этого свойства является такое понятие: будем говорить, что c-простая теория T допускает *эффективную элиминацию констант*, если для разрешимой модели $\mathfrak{M}$ теории T верно следующее: для любых бесконечного вычислимого множества $I \subseteq |\mathfrak{M}|$ и набора $\bar{m}_0 \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$ существует бесконечное вычислимое множество $J \subseteq I$ такое, что для всех наборов $\bar{j}_1, \bar{j}_2$ элементов из множества J

$$\langle \mathfrak{M}, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, \bar{j}_2 \rangle \Rightarrow \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}^*, \bar{j}_2 \rangle,$$

где $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{M}, \bar{m}_0 \rangle$, причем множество J находится по множеству I и набору $\bar{m}_0$ эффективно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Теории T_{DLO} и T_E допускают эффективную элиминацию констант.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle L, < \rangle$ — разрешимый плотный линейный порядок, и $\bar{l} = \langle l_0, \ldots, l_n \rangle \in L^{<\omega}$. Если k — число попарно различных элементов набора $\bar{l}$, то L разбивается этими элементами на конечное число интервалов $U_0, \ldots, U_k$. Поэтому для любого бесконечного множества $I \subseteq L$ найдется интервал U_i, $i \leqslant k$, для которого $J \risingdotseq I \cap U_i$. Очевидно, что для любых $\bar{j}_1, \bar{j}_2 \in J^{<\omega}$ из $\langle L, <, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle L, <, \bar{j}_2 \rangle$ следует $\langle L, <, \bar{l}, \bar{j}_1 \rangle \equiv \langle L, <, \bar{l}, \bar{j}_2 \rangle$. Поскольку J есть пересечение множества I с определимым подмножеством L, из вычислимости I вытекает вычислимость J.

Пусть теперь $\langle S \rangle$ — разрешимая бесконечная модель пустой сигнатуры, $\bar{s} = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle \in S^{<\omega}$, $I \subseteq S$ — бесконечное вычислимое множество. Достаточно взять $J \risingdotseq I \setminus \{s_0, \ldots, s_n\}$. $\square$

Из двух предыдущих утверждений непосредственно следуют критерии Σ-определимости несчетной модели c-простой теории над классом плотных линейных порядков и над классом бесконечных моделей пустой сигнатуры. Общему понятию $\mathfrak{M}$-неразличимости в данных двух случаях соответствуют хорошо известные в теории моделей понятия упорядоченной неразличимости и тотальной неразличимости [6]. Пусть T_{DLO} обозначает теорию плотного линейного порядка, а T_E — теорию бесконечных систем пустой сигнатуры.

Подмножество вычислимой модели назовем *вычислимым*, если оно является вычислимым подмножеством натуральных чисел; упорядоченное подмножество — *вычислимым*, если вычислимым является также и отношение порядка.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть T — некоторая c-простая теория.*

1) *Теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом* $\mathrm{Mod}(T_{\mathrm{DLO}})$*, тогда и только тогда, когда в некоторой разрешимой модели*

теории T существует бесконечное вычислимое множество упорядоченно неразличимых элементов.

2) *Теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом* $\mathrm{Mod}(T_E)$*, тогда и только тогда, когда в некоторой разрешимой модели теории T существует бесконечное вычислимое множество тотально неразличимых элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое непосредственно следует из теоремы 2 и предложения 1. □

Ю. Л. Ершов [2] выдвинул гипотезу о том, что любая c-простая теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую над классом $\mathrm{Mod}(T_{\mathrm{DLO}})$. Однако основываясь на теореме 3, можно указать пример c-простой теории (бесконечной сигнатуры), для которой это не так. Для этого воспользуемся конструкцией из [8, 9].

Пусть $\mathcal{T} \subseteq 2^{<\omega}$ — бинарное дерево (здесь $2 = \{0, 1\}$). Через $P(\mathcal{T})$ обозначается множество бесконечных путей в этом дереве. Для модели $\mathfrak{M}$ с носителем ω через $\mathcal{I}(\mathfrak{M})$ обозначается множество всех конечных последовательностей упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{M}$ (т. е. $\mathcal{I}(\mathfrak{M}) \subseteq \omega^{<\omega}$, а порядок определяется отношением следования в наборе). Будем говорить, что проблема поиска бесконечного пути в дереве $\mathcal{T}$ *эффективно эквивалентна* проблеме поиска бесконечной последовательности упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{M}$, и обозначать это через $P(\mathcal{T}) \approx \mathcal{I}(\mathfrak{M})$, если существуют $e, f \in \omega$, для которых

(i) $\varphi_e^I \in P(\mathcal{T})$, если $I \in \mathcal{I}(\mathfrak{M})$,

(ii) $\varphi_f^\pi \in \mathcal{I}(\mathfrak{M})$, если $\pi \in P(\mathcal{T})$,

(iii) $\varphi_e^I = \pi$ для всех $\pi \in P(\mathcal{T})$, если $\varphi_f^\pi = I$,

где $\{\varphi_n \mid n \in \omega\}$ — некоторая вычислимая нумерация всех одноместных частично вычислимых функций с оракулом (см. [5]).

ТЕОРЕМА 4 [9]**.** *Для любого бесконечного вычислимого бинарного дерева $\mathcal{T}$ существует разрешимая модельно полная ω-категоричная теория T с разрешимым множеством полных формул такая, что для любой разрешимой модели $\mathfrak{M}$ теории T имеет место $P(\mathcal{T}) \approx \mathcal{I}(\mathfrak{M})$.*

Пусть $\mathcal{T}_0$ — бесконечное рекурсивное бинарное дерево, не имеющее бесконечных рекурсивных ветвей, а T_0 — построенная по этому дереву теория. Если $\mathfrak{M}_0$ — счетная модель теории T_0, то любое бесконечное множество упорядоченно неразличимых элементов $\mathfrak{M}_0$ невычислимо. Поэтому и по теореме 3 никакая несчетная модель теории T_0 не может быть Σ-определима над классом $\mathrm{Mod}(T_{\mathrm{DLO}})$. В то же время T_0 — c-простая теория. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Существует c-простая теория T_0, никакая несчетная модель которой не является Σ-определимой над классом* $\mathrm{Mod}(T_{\mathrm{DLO}})$.

Теория, полученная с использованием конструкции из [7], имеет бесконечную сигнатуру. Можно ли построить c-простую теорию конечной сигнатуры, удовлетворяющую условию теоремы 5, автору неизвестно.

В связи с этим представляется интересным следующий вопрос: верно ли, что для любой c-простой теории T (конечной сигнатуры) существует c-простая теория T' такая, что никакая несчетная модель теории T' не является Σ-определимой над классом $\mathrm{Mod}(T)$. Отметим в связи с этим вопросом одно следствие из теоремы 1.

Если T_1, T_2 — c-простые теории, а несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $\mathrm{Mod}(T_2)$, то из необходимого условия Σ-определимости несчетных моделей следует, что существуют разрешимые модели $\mathfrak{M} \models T_1$ и $\mathfrak{N} \models T_2$ такие, что для некоторого бесконечного вычислимого множества $I \subseteq |\mathfrak{M}| \cap |\mathfrak{N}|$ выполняется неравенство $R_I^{\mathfrak{N}}(n) \leqslant R_I^{\mathfrak{M}}(n)$ для всех $n \in \omega$.

В заключение параграфа приведем еще одно понятие. Пусть K_1 — некоторый класс моделей произвольной конечной сигнатуры σ_1, K_2 — некоторый класс моделей вычислимой предикатной сигнатуры $\sigma_2 = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots\rangle$. Класс K_2 называется *спектрально Σ-определимым над классом* K_1, если существует вычислимая последовательность

$$\Gamma = \langle \Phi, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_k, \Phi_k^*, \ldots\rangle$$

Σ-формул сигнатуры $\sigma_1 \cup \{\in, U\}$ такая, что для любых модели $\mathfrak{M}$ из класса K_1 и элемента $a \in \mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ набор формул Γ с параметром a корректно определяет в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ модель сигнатуры σ_2, принадлежащую классу K_2, и выполняется условие

$$\mathrm{Sp}(\Gamma(K_1)) = \mathrm{Sp}(K_2),$$

где $\mathrm{Sp}(K)$ обозначает класс мощностей моделей из класса K, а $\Gamma(K)$ обозначает класс всех моделей, Σ-определимых в наследственно конечных надстройках над моделями из K посредством последовательности формул Γ с произвольным параметром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если T_1 и T_2 — c-простые теории, то класс $\mathrm{Mod}(T_2)$ спектрально Σ-определим над классом $\mathrm{Mod}(T_1)$ тогда и только тогда, когда некоторая несчетная модель теории T_2 Σ-определима над классом $\mathrm{Mod}(T_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, поэтому требуется проверить только достаточность. Пусть для некоторой модели $\mathfrak{M}'$ теории T_1 в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ при помощи последовательности Σ-формул Γ определима несчетная модель теории T_2, причем можно считать, что параметром формул из Γ является набор праэлементов $\bar{m}' \in |\mathfrak{M}'|^{<\omega}$. Поскольку теория T_2 является c-простой, у нее существует вычислимая модель $\mathfrak{N}_0$, которая, очевидно, Σ-определима в любой наследственно конечной надстройке. Вследствие этого можно определить последовательность Σ-формул Γ^* такую, что для любых модели $\mathfrak{M}$ теории T_2 и элемента $a \in \mathrm{HF}(\mathfrak{M})$

$$\Gamma^*(\mathrm{HF}(\mathfrak{M}), a) \leftrightharpoons \begin{cases} \Gamma(\mathrm{HF}(\mathfrak{M}), a), & \text{если } a = \bar{m} \text{ и } \langle \mathfrak{M}, \bar{m}\rangle \equiv \langle \mathfrak{M}', \bar{m}'\rangle, \\ \mathfrak{N}_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это условие эффективно проверяется, так как T_1 также является c-простой теорией. Из $\langle \mathfrak{M}, \bar{m}\rangle \equiv \langle \mathfrak{M}', \bar{m}'\rangle$ вытекает $\langle \mathrm{HF}(\mathfrak{M}), \bar{m}\rangle \equiv \langle \mathrm{HF}(\mathfrak{M}'), \bar{m}'\rangle$, поэтому последовательность формул Γ^* в наследственно конечной надстройке над любой моделью теории T_1 для любого параметра корректно определяет модель теории T_2. Тот факт, что так можно определить модель произвольной бесконечной мощности, устанавливается как в доказательстве теоремы 2. $\square$

§ 2. О парах рекурсивно насыщенных систем

Пусть $\sigma_1 = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle$ и $\sigma_2 = \langle Q_0^{m_0}, \ldots, Q_l^{m_l}, \ldots \rangle$ — предикатные сигнатуры (можно считать, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$), $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — модели сигнатур σ_1 и σ_2, соответственно. Под *парой* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ будем понимать модель сигнатуры $\sigma \leftrightharpoons \langle M^1, N^1, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots, Q_0^{m_0}, \ldots, Q_l^{m_l}, \ldots \rangle$, основным множеством которой является объединение $|\mathfrak{M}| \cup |\mathfrak{N}|$, а предикатные символы интерпретируются следующим образом: $M^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = |\mathfrak{M}|$, $N^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = |\mathfrak{N}|$, $P_i^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = P_i^{\mathfrak{M}}$, $i = 1, \ldots, k, \ldots$, $Q_j^{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} = Q_j^{\mathfrak{N}}$, $j = 1, \ldots, l, \ldots$.

Зафиксировав некоторые геделевские нумерации формул сигнатур σ_1, σ_2 и σ, будем отождествлять произвольные множества формул этих сигнатур с соответствующими множествами их геделевских номеров. В частности, множество формул будем называть рекурсивным, если таковым является множество геделевских номеров этих формул (при условии вычислимости сигнатур σ_1 и σ_2). На протяжении этого параграфа для единства используемой здесь терминологии при описании свойств объектов будем употреблять термин "рекурсивный" вместо "вычислимый".

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ вычислимой сигнатуры σ' называется *рекурсивно насыщенной*, если для любого конечного набора $\bar{a}$ элементов из $|\mathfrak{A}|$ любое локально выполнимое в $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ рекурсивное множество формул (с одним и тем же множеством свободных переменных) сигнатуры $\sigma' \cup \langle \bar{a} \rangle$ выполнимо в $(\mathfrak{A}, \bar{a})$. Релятивизацией данного определения получается понятие X-рекурсивно насыщенной системы для произвольного множества $X \subseteq \omega$ (рассматриваются множества формул, рекурсивные с оракулом X).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — модели вычислимых сигнатур. Модель $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда*

1) *модель $\mathfrak{M}$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, \bar{n})$-рекурсивно насыщена для всех $\bar{n} \in |\mathfrak{N}|^{<\omega}$;*

2) *модель $\mathfrak{N}$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$-рекурсивно насыщена для всех $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ_1 и σ_2 — сигнатуры моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, соответственно (не нарушая общности, их можно считать предикатными), и пусть для моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выполняются условия 1 и 2, соответственно. Покажем, что модель $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ является рекурсивно насыщенной. Предположим, что $\{\theta^k(\bar{z}) \mid k \in \omega\}$ — рекурсивное множество формул сигнатуры σ, которое локально реализуется в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Не нарушая общности, можно считать, что для любого $k \in \omega$ справедлива импликация $\theta^{k+1}(\bar{z}) \to \theta^k(\bar{z})$ (для этого требуется перейти к множеству формул $\theta^k_*(\bar{z}) \leftrightharpoons \theta^0(\bar{z}) \wedge \ldots \wedge \theta^k(\bar{z})$, $k \in \omega$).

Для удобства изложения вместо одноместных предикатов M и N, выделяющих основные множества $|\mathfrak{M}|$ и $|\mathfrak{N}|$, будем рассматривать язык с переменными двух сортов: $\bar{x}$ и $\bar{m}$ — для переменных и констант, соответствующих элементам из $\mathfrak{M}$, $\bar{y}$ и $\bar{n}$ — элементам из $\mathfrak{N}$. Далее будем считать, что рассматриваемое нами множество формул имеет вид $\{\theta^k(\bar{x}, \bar{y}) \mid k \in \omega\}$, причем все связанные переменные в этих формулах также одного из двух возможных сортов. В самом деле, всякая формула $\theta(\ldots, z, \ldots)$ в модели $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ эквивалентна дизъюнкции $(M(z) \wedge \theta) \vee (N(z) \wedge \theta)$ или, в наших обозначениях, $\theta(\ldots, x, \ldots) \vee \theta(\ldots, y, \ldots)$.

По любой формуле $\theta^k(\bar{x}, \bar{y})$ эффективно находится ее пренексная нормальная форма. Ввиду эквивалентностей $P_i(\ldots, z, \ldots) \wedge N(z) \equiv$ $\equiv Q_j(\ldots, z, \ldots) \wedge M(z) \equiv \neg(z = z)$, в матрице пренексной нормальной формы каждый дизъюнктивный член $\theta^k_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ эквивалентен конъюнкции $\varphi^k_i(\bar{x}_i) \wedge \psi^k_i(\bar{y}_i)$, где $\varphi^k_i(\bar{x}_i)$ и $\psi^k_i(\bar{y}_i)$ — элементарные конъюнкции, в которые входят только предикаты и переменные, определенные соответственно на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Опишем процедуру, позволяющую проносить кванторы из кванторной приставки внутрь матрицы, в ходе которой цепочкой эквивалентных преобразований пренексная нормальная форма формулы $\theta^k(\bar{x}, \bar{y})$ переходит в формулу вида $(\varphi^k_1(\bar{x}) \wedge \psi^k_1(\bar{y})) \vee \ldots \vee (\varphi^k_{n_k}(\bar{x}) \wedge \psi^k_{n_k}(\bar{y}))$, где $\varphi^k_i(\bar{x})$ и $\psi^k_i(\bar{y})$ — произвольные формулы, все предикаты, а также свободные и связанные переменные которых определены на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, соответственно. Кванторы $\exists x$ и $\exists y$ проносятся внутрь дизъюнкции очевидным образом ввиду эквивалентности

$$\exists y(\theta^k_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \vee \ldots \vee \theta^k_{n_k}(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k})) \equiv$$
$$\equiv (\varphi^k_1(\bar{x}_1) \wedge \exists y \psi^k_1(\bar{y}_1)) \vee \ldots \vee (\varphi^k_{n_k}(\bar{x}_{n_k}) \wedge \exists y \psi^k_{n_k}(\bar{y}_{n_k}))$$

(аналогично для квантора $\exists x$). Для кванторов $\forall x$ и $\forall y$ имеем

$$\forall y(\theta_1^k(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \vee \ldots \vee \theta_{n_k}^k(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k})) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{S \subseteq \{1,\ldots,n_k\}} \left(\bigwedge_{s \in S} \varphi_s^k(\bar{x}_s) \wedge \left(\forall y \left(\bigvee_{s \in S} \psi_s^k(\bar{y}_s) \right) \right) \right).$$

Проделав эту процедуру для всех кванторов из кванторной приставки пренексной нормальной формы формулы $\theta^k(\bar{x}, \bar{y})$, в итоге получим формулу вида

$$(\varphi_1^k(\bar{x}, \bar{m}) \wedge \psi_1^k(\bar{y}, \bar{n})) \vee \ldots \vee (\varphi_{n_k}^k(\bar{x}, \bar{m}) \wedge \psi_{n_k}^k(\bar{y}, \bar{n})),$$

где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — наборы параметров из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, соответственно, входящие в формулы $\theta^k(\bar{x}, \bar{y})$. Для каждого $k \in \omega$ положим

$$\Psi_k(\bar{y}, \bar{n}) \leftrightharpoons \bigvee_{S \in \mathcal{S}_k} \bigwedge_{s \in S} \psi_s^k(\bar{y}, \bar{n}),$$

где по определению $\mathcal{S}_k = \left\{ S \subseteq \{1, \ldots, n_k\} \;\middle|\; \mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \left(\bigvee_{s \in S} \varphi_s^k(\bar{x}, \bar{m}) \right) \right\}$. Исходный тип $\{\theta^k(\bar{x}, \bar{y}) \mid k \in \omega\}$ локально реализуется в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, поэтому $\mathcal{S}_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \omega$. Множество формул $\{\Psi_k(\bar{y}, \bar{n}) \mid k \in \omega\}$ является $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$-рекурсивным и по условию локально реализуется в модели $\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N}$ является $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$-рекурсивно насыщенной, этот тип реализуется в $\mathfrak{N}$ некоторым набором элементов $\bar{c}$.

Рассмотрим формулы

$$\Phi_k(\bar{x}, \bar{m}) \leftrightharpoons \bigvee_{s \in S_k(\bar{c})} \varphi_s^k(\bar{x}, \bar{m}),$$

где $S_k(\bar{c}) = \{l \in \{1, \ldots, n_k\} \mid \mathfrak{N} \models \psi_l^k(\bar{c}, \bar{n})\}$. Множество формул $\{\Phi_k(\bar{x}, \bar{m}) \mid k \in \omega\}$ является $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, \bar{n}, \bar{c})$-рекурсивным и локально реализуется в $\mathfrak{M}$ вследствие выбора $\bar{c}$. Так как $\mathfrak{M}$ является $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{n}, \bar{c})$-рекурсивно насыщенной, существует набор $\bar{a}$ элементов из $\mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{M} \models \Phi_k(\bar{a}, \bar{m})$ для всех $k \in \omega$. Таким образом, набор $\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle$ реализует в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ тип $\{\theta^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{m}, \bar{n}) \mid k \in \omega\}$, что и требовалось доказать.

Для доказательства в обратную сторону предположим, что система $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена. Пусть $\bar{n}$ — произвольный набор элементов из $|\mathfrak{N}|$, и $Q = \gamma(\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, \bar{n}))$, где γ — некоторая геделевская нумерация формул сигнатуры σ_2. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ является Q-рекурсивно насыщенной. Пусть $\{\varphi_k(\bar{x}, \bar{m}) \mid k \in \omega\}$ — Q-рекурсивное множество формул (с параметрами $\bar{m}$ из $|\mathfrak{M}|$), оно представимо в виде

$$\{\theta_k(\bar{x}, \bar{m}) \mid \exists D_u \subseteq Q \ \langle k, u\rangle \in W_z\}$$

для некоторого z, где $\theta_k = \gamma^{-1}(k)$ (вследствие того, что Q — полный тип, можно опустить квантор $\exists D_v \subseteq N \setminus Q$). Тогда (локальная) выполнимость этого множества в модели $\mathfrak{M}$ равносильна (локальной) выполнимости в модели $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивного множества

$$\{(\theta_k(\bar{x}, \bar{m}) \wedge \psi_u(\bar{n})) \mid \langle k, u\rangle \in W_z\}$$

формул сигнатуры σ, где $\psi_u = \gamma(i_1) \wedge \ldots \wedge \gamma(i_n)$ для $D_u = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Поскольку $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена, из локальной выполнимости этого множества вытекает его выполнимость в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, что равносильно выполнимости исходного типа в $\mathfrak{M}$. Аналогично устанавливается, что модель $\mathfrak{N}$ является P-рекурсивно насыщенной для всех P вида $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$. $\square$

Модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ назовем *локально разрешимой*, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$ разрешима для любого набора $\bar{m}$ элементов из $|\mathfrak{M}|$. В частности, всякая модель c-простой теории является локально разрешимой. Из теоремы 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть модели* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *локально разрешимы. Пара* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *рекурсивно насыщены.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *— рекурсивно насыщенные модели такие, что* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$*, а* $\mathfrak{M}$ *локально разрешима. Пара* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{N}$ *локально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ рекурсивно насыщена. Допустим, что модель $\mathfrak{N}$ не является локально разрешимой, т. е. существует набор $\bar{n}$ элементов из $|\mathfrak{N}|$, для которого $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, \bar{n})$ не является разрешимой. Так как $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, то тип, реализуемый в модели $\mathfrak{N}$ набором $\bar{n}$, является типом и относительно $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, а поскольку согласно теореме 1 модель

$\mathfrak{M}$ $\mathrm{Th}(\mathfrak{N},\bar{n})$-насыщена, то этот тип должен реализоваться в $\mathfrak{M}$ некоторым набором $\bar{m}$. Значит, $\mathrm{Th}(\mathfrak{M},\bar{m}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N},\bar{n})$, что противоречит локальной разрешимости модели $\mathfrak{M}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}$ локально разрешима. В этом случае $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ будет рекурсивно насыщенной в силу следствия 1. □

Основываясь на теореме 6, приведем пример пары моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ такой, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ рекурсивно насыщены, однако $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ таковой не является. Построенные модели будут, помимо всего прочего, элементарно эквивалентны. Возьмем сигнатуру $\sigma \leftrightharpoons \{P^1_\varepsilon \mid \varepsilon \in E\}$, $E = \{0,1\}^{<\omega}$, состоящую из счетного числа одноместных предикатов, занумерованных конечными последовательностями из 0 и 1. Пусть $D \subseteq E$ — бесконечное рекурсивное бинарное дерево, не имеющее бесконечных рекурсивных ветвей. На основе этого дерева в [3] была построена теория T_D со следующим набором аксиом:

$\forall x P_\Lambda(x)$,

$\forall x(P_{\varepsilon 0}(x) \vee P_{\varepsilon 1}(x) \to P_\varepsilon(x))$, $\varepsilon \in E$,

$\forall x((P_{\varepsilon 0}(x) \to \neg P_{\varepsilon 1}(x)) \wedge (P_{\varepsilon_1}(x) \to \neg P_{\varepsilon_0}(x)))$, $\varepsilon \in E$,

$\exists x(P_\varepsilon(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 0}(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 1}(x))$, $\varepsilon \in D$,

$\forall x \neg P_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \in E \setminus D$,

$\forall x \forall y(P_\varepsilon(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 0}(x) \wedge \neg P_{\varepsilon 1}(x) \wedge P_\varepsilon(y) \wedge \neg P_{\varepsilon 0}(y) \wedge \neg P_{\varepsilon 1}(y) \to x = y)$, $\varepsilon \in E$.

Теория T_D полна и разрешима. Из отсутствия бесконечных рекурсивных ветвей в дереве D следует, что всякая модель теории T_D рекурсивно насыщена. Вследствие этого же, единственной локально разрешимой моделью теории T_D будет ее простая модель $\mathfrak{M}_0$. Поэтому если $\mathfrak{M}$ — модель теории T_D, неизоморфная $\mathfrak{M}_0$, то, по предложению 6, $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ не является рекурсивно насыщенной. Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $\mathfrak{M}_0$ — простая модель теории T_D, то для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T_D модель $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}_0)$ рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_0$.*

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры, тогда определено допустимое множество $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$. Если через $O(\mathfrak{M})$ обозначить наименьший ординал, не лежащий в $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}$ будет рекурсивно насыщенной тогда и только тогда, когда $O(\mathfrak{M}) = \omega$ (см. [3, 4]). Известно, что всякая модель имеет рекурсивно насыщенное элементарное расширение, поэтому существуют рекурсивно насыщенные модели со сколь угодно сложной элементарной теорией. Если зафиксировать так полученную модель $\mathfrak{M}$ с достаточно сложной элементарной теорией, то, выбирая рекурсивно насыщенную, но не $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$-рекурсивно насыщенную модель $\mathfrak{N}$ (о существовании таких моделей см. [10]) и используя теорему 6, можно убедиться, что пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ не является рекурсивно насыщенной. Итак, получено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существуют модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с конечными сигнатурами, для которых $O(\mathfrak{M}) = O(\mathfrak{N}) = \omega$, но $O(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) > \omega$.*

Обозначим через $pp(\mathrm{HYP}(\mathfrak{M}))$ чистую часть допустимого множества $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$, т. е. множество элементов, транзитивное замыкание которых не содержит праэлементов. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная система. В этом случае можно зафиксировать некоторую вычислимую нумерацию $\nu : \omega \to pp(\mathrm{HYP}(\mathfrak{M}))$ (все такие нумерации вычислимо эквивалентны). Чистые Σ-подмножества в $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$ в случае, когда $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ является c-простой теорией описывает

ЛЕММА 1. *Пусть $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ — c-простая теория. Произвольное подмножество $P \subseteq pp(\mathrm{HYP}(\mathfrak{M}))$ является Σ-подмножеством в $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\nu^{-1}(P)$ вычислимо перечислимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \subseteq pp(\mathrm{HYP}(\mathfrak{M}))$ определяется Σ-формулой $\Phi(x, \bar{c})$ с набором параметров $\bar{c}$. По Φ можно эффективно построить $\exists$-формулу $\Phi^*(x)$ сигнатуры $\langle +, \cdot, 0, 1\rangle$ такую, что для любого $x_0 \in pp(\mathrm{HYP}(\mathfrak{M}))$

$$\mathrm{HYP}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0, \bar{c}) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \Phi^*(\nu^{-1}(x_0)).$$

В самом деле, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ — c-простая теория, то $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$ как допустимое множество Σ-определимо в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ (см. [11, 12]), и можно применить соответствующий результат для $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$. □

Отметим, что из использованного в доказательстве предыдущей леммы утверждения из [11, 12] следует, что для модели $\mathfrak{M}$ c-простой теории произвольная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$.

Для всякого допустимого множества $\mathbb{A}$ в [13] было определено понятие $\Sigma_{\mathbb{A}}$-насыщенности. А именно, модель $\mathfrak{N}$ сигнатуры σ называется $\Sigma_{\mathbb{A}}$-*насыщенной*, если для каждого множества формул $p(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры σ, являющегося Σ-определимым в $\mathbb{A}$, из того, что каждое $\mathbb{A}$-конечное подмножество $q(\bar{x}, \bar{n})$ реализуемо в $\mathfrak{N}$, следует, что $p(\bar{x}, \bar{n})$ реализуемо в $\mathfrak{N}$ (где $\bar{n} \in |\mathfrak{N}|^{<\omega}$ — набор параметров).

Для произвольных моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ рассмотрим следующие условия:

(1) $\mathfrak{N}$ является рекурсивно насыщенной;

(2) $\mathfrak{N}$ является $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$-рекурсивно насыщенной для всех $\bar{m} \in |\mathfrak{M}|^{<\omega}$;

(3) $\mathfrak{N}$ является $\Sigma_{\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})}$-насыщенной.

Для любых $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют место импликации (3) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (1). Однако в общем случае обратные импликации не имеют места. Выделим класс моделей, для которых эти три условия равносильны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *— c-простая теория, то*

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$$

для любой модели $\mathfrak{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для модели $\mathfrak{M}$ выполняются условия утверждения. Теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{a})$ разрешима для любого набора $\bar{a} \in M^{<\omega}$, следовательно, имеет место импликация (1) $\Rightarrow$ (2). Остается показать, что из рекурсивной насыщенности модели $\mathfrak{N}$ следует, что $\mathfrak{N}$ является $\Sigma_{\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})}$-насыщенной. Это так, поскольку всякое чистое Σ-подмножество $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$ в случае, когда $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ является c-простой теорией, вычислимо перечислимо в смысле леммы 1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Л. Ершов*, Определимость в наследственно конечных надстройках, Докл. РАН, **340**, N 1 (1995), 12—14.

2. *Yu. L. Ershov*, Σ-definability of algebraic structures, in: Y. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode, J. B. Remmel (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, Recursive model theory (Stud. Logic Found. Math., **138**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 235—260.

3. *Ю. Л. Ершов*, Определимость и вычислимость (Сиб. школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.

4. *J. Barwise*, Admissible sets and structures, Berlin, Springer-Verlag, 1975.

5. *Р. Соар*, Вычислимо перечислимые множества и степени, Казань, Казанское матем. об-во, 2000.

6. *Дж. Сакс*, Теория насыщенных моделей, М., Мир, 1976.

7. *Ю. Л. Ершов*, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

8. *H. A. Kierstead, J. B. Remmel*, Indiscernibles and decidable models, J. Symb. Log., **48**, N 1 (1983), 21—32.

9. *H. A. Kierstead, J. B. Remmel*, Degrees of indiscernibles in decidable models, Trans. Am. Math. Soc., **289**, N 1 (1985), 41—57.

10. *A. Macintyre, D. Marker*, Degrees of recursively saturated models, Trans. Am. Math. Soc., **282**, N 2 (1984), 539—554.

11. *А. И. Стукачев*, Σ-допустимые семейства над линейными порядками, Алгебра и логика, **41**, N 2 (2002), 228—252.

12. *А. И. Стукачев*, Об определимости в допустимых множествах вида $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$, в сб. тр. 33-й регион. молодеж. конф. "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, 2002, 47—50.

13. *J. P. Ressayre*, Models with compactness properties relative to an admissible language, Ann. Math. Logic, **11**, N 1 (1977), 31—56.

Поступило 27 января 2003 г.

Адрес автора:

СТУКАЧЕВ Алексей Ильич, Институт математики СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: aistu@math.nsc.ru