È. L. Pekarev, Regular and completely irregular factorizations of a characteristic function, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1976, Volume 10, Issue 1, 85–86

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 85—86.

О РЕГУЛЯРНОЙ И ВПОЛНЕ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ФАКТОРИЗАЦИЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Э. Л. Пекарев

Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & T & \mathfrak{H} \\ F & & G^+ \\ \mathfrak{F} - S^+ & \mathfrak{G} & \end{pmatrix}$ — узел в смысле [1]. Здесь $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{J}$-пространства [2] с индефинитными скалярными произведениями, $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $F \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{H}]$, $G \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{G}]$, $S \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$. Следуя [3] (см. сноску к этой статье), будем писать этот узел в более компактной форме $\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & U & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{G} & & \mathfrak{F} \end{pmatrix}$, где $U = \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix}$ — $\mathfrak{J}$-унитарный оператор из $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{F}$ в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}$. С каждым узлом сопоставляется характеристическая оператор-функция (х. о.-ф.) $\Theta(\zeta) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F$, значения которой — операторы из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$. Каждое инвариантное пространство оператора T порождает факторизацию узла и его х.о.-ф. Если исходный узел прост, то факторизация х.о.-ф. является регулярной. Будем в этом случае говорить, что факторизация самого узла регулярна. В случае сжатий ряд критериев регулярности был получен в [4], [5], причем эти критерии формулируются в терминах граничных значений х.о.-ф.

В настоящей заметке рассматривается другой «крайний» случай — так называемые вполне нерегулярные факторизации. Доказывается (теорема 1), что произвольная факторизация х.о.-ф. может быть сведена к двум указанным крайним случаям. Для сжатий соответствующее построение (теорема 3) проводится по граничным значениям компонент факторизации.

1. Пусть $\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}_i & U_i & \mathfrak{H}_i \\ \mathfrak{G}_i & & \mathfrak{F}_i \end{pmatrix}$ $(i = 1,2)$ — простые узлы, причем $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_2$ и $\alpha = \alpha_1\alpha_2$. Обозначим через $\mathfrak{H}_\alpha^{(0)}$ избыточное пространство узла α. Условие $\mathfrak{H}_\alpha^{(0)} = (0)$ означает регулярность факторизации $\alpha = \alpha_1\alpha_2$. В противоположность этому вводится следующее

Определение. Факторизация $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ двух простых узлов α_1 и α_2 называется *вполне нерегулярной*, если в $\mathfrak{H}_1$ и в $\mathfrak{H}_2$ нет ненулевых векторов, ортогональных $\mathfrak{H}_\alpha^{(0)}$.

Пусть P_1 и P_2 — ортопроекторы на $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно, действующие в пространстве $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. Положим $\mathfrak{H}_{12} = \overline{P_1 \mathfrak{H}_\alpha^{(0)}}$, $\mathfrak{H}_{21} = \overline{P_2 \mathfrak{H}_\alpha^{(0)}}$, $\mathfrak{H}_{11} = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_{12}$, $\mathfrak{H}_{22} = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{H}_{21}$. Полная нерегулярность равносильна тому, что $\mathfrak{H}_{11} = (0)$, $\mathfrak{H}_{22} = (0)$.

Легко видеть, что подпространство $\mathfrak{H}_{11}$ инвариантно относительно T_1, $\mathfrak{H}_{22}$ — относительно T_2^*. Пусть $\alpha_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}$ и $\alpha_2 = \alpha_{21}\alpha_{22}$ — соответствующие факторизации узлов α_1 и α_2. В силу простоты α_1 и α_2 эти факторизации регулярны. Имеем $\alpha = \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}$.

Теорема 1. а) *Факторизация* $\alpha_0 = \alpha_{12}\alpha_{21}$ *вполне нерегулярна.* б) *Если* $\hat{\alpha}_0$ — *простая часть узла* α_0, *то факторизации* $\alpha' = \alpha_{11}\hat{\alpha}_0$ *и* $\alpha'' = \hat{\alpha}_0\alpha_{22}$ *регулярны.* в) *Произведения* $\alpha'\alpha_{22} = \alpha_{11}\alpha''$ *совпадают с простой частью* $\hat{\alpha}$ *узла* α (*и, следовательно, представляют собой регулярную факторизацию* $\hat{\alpha}$).

2. В этом пункте мы используем вспомогательный аппарат параллельного сложения неотрицательных операторов, введенный в [6] для конечномерных пространств и в [7] для произвольных гильбертовых пространств. Паралльную сумму неотрицательных операторов A и B будем обозначать через $A : B$.

Лемма. *Пусть A и B — неотрицательные операторы. Для того чтобы неотрицательный оператор $X \leqslant A$ был решением уравнения $(A - X) : (B + X) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы X представлялся в виде $X = (A + B)^{1/2} P (A + B)^{1/2} - B$, где P — ортопроектор на некоторое подпространство из $\overline{\mathfrak{R}(A + B)}$ ($\mathfrak{R}(C)$ — область значений оператора C).*

Пусть $\mathfrak{F}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ — гильбертовы пространства. Рассмотрим при $i = 1, 2, 3$ сжатия $\Theta_i : \mathfrak{F}_i \to \mathfrak{F}_{i-1}$ и положим $D_i = I - \Theta_i^* \Theta_i$, $D_{*i} = I - \Theta_i \Theta_i^*$.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны*: 1) $D_1 : (D_{*2} + \Theta_2 D_{*3} \Theta_2^*) = 0$; 2) $D_1 : D_{*2} = 0$ *и* $(\Theta_2^* D_1 \Theta_2) : (D_{*3} + D_2) = 0$. *Если* Θ_2^* — *мономорфизм, то в* 2) *можно отбросить равенство* $D_1 : D_{*2} = 0$.

3. В настоящем пункте все узлы предполагаются сжимающими [5], пространства узлов — сепарабельными.

Пусть $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $\Theta_i(\zeta)$ — х.о.-ф. α_i $(i = 1, 2)$. При помощи граничных значений $\Theta_i(e^{it})$ $(i = 1, 2)$ определим на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ функции $D_1(t) = I - \Theta_1^*(e^{it})\Theta_1(e^{it})$ и $D_{*2}(t) = I - \Theta_2(e^{it})\Theta_2^*(e^{it})$. Тогда критерий регулярности из [4], [5] можно сформулировать следующим образом.

Факторизация $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ *простых узлов* α_1 *и* α_2 *является регулярной в том и только том случае, когда* $D_1(t) : D_{*2}(t) = 0$ *п.в.*

Пусть $\alpha_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}$ — факторизация α_1 из теоремы 1, так что (см. [1]) $\Theta_1(\zeta) = \Theta_{11}(\zeta)\Theta_{12}(\zeta)$, где $\Theta_{1j}(\zeta)$ — х.о.-ф. α_{1j} $(j = 1, 2)$. Нетрудно убедиться в том, что $\Theta_{12}(\zeta)$ — внешняя функция, и, следовательно, $\Theta_{11}(\zeta)$ определяется по $\Theta_{12}(\zeta)$ однозначно. Напомним [4], что для любой измеримой о.ф. $N_0(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $0 \leqslant N_0(t) \leqslant I$, существует такая аналитическая о.ф. $\Theta_0(\zeta)$ $(|\zeta| < 1)$, что 1) $\Theta_0^*(e^{it})\Theta_0(e^{it}) \leqslant N_0(t)$ п.в.; 2) $\Theta_0(\zeta)$ является правым делителем каждой аналитической о.ф. $\Theta(\zeta)$, для которой $\Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it}) \leqslant N_0(t)$ п.в. Будем называть $\Theta_0(\zeta)$ максимальной для $N_0(t)$.

Теорема 3. *Функция* $\Theta_{12}(\zeta)$ *является максимальной для о.ф.* $N_0(t) = \Theta_i^*(e^{it})\Theta_1(e^{it}) + \Lambda(t)P_0(t)\Lambda(t)$, *где* $\Lambda(t) = [D_1(t) + D_{*2}(t)]^{1/2}$, $P_0(t)$ — *ортопроектор на* $\overline{\mathfrak{R}(\Lambda(t))} \ominus \overline{\Lambda^{-1}(t))\mathfrak{R}(D_{*2}^{1/2}(t))}$ *) $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Доказательство основано на следующих соображениях.

Если $\Theta_0(\zeta)$ максимальна для $N_0(t)$, то, очевидно, $D_0(t) = I - \Theta_0^*(e^{it})\Theta_0(e^{it}) \leqslant D_1(t)$ п.в. Далее, из критерия Ю. А. Розанова [8] разрешимости факторизационной задачи вытекает, что $D_0(t)$ представима в виде $D_0(t) = D_1(t) - \Lambda(t)P(t)\Lambda(t)$, где $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — некоторая измеримая о.ф., значениями которой являются ортопроекторы на подпространства из $\overline{\mathfrak{R}(\Lambda(t))}$. Значит, $(D_1(t) - D_0(t)) : (D_{*2}(t) + D_0(t)) = 0$ п.в. согласно лемме из п. 2. Тогда из теорем 1 и 2 следует [3], [4], что $\Theta_{12}(\zeta)$ является правым делителем $\Theta_0(\zeta)$. Остается убедиться, что $\Theta_{12}^*(e^{it})\Theta_{12}(e^{it}) \leqslant N_0(t)$ п. в. В самом деле, $D_{12}(t) = I - \Theta_{12}^*(e^{it})\Theta_{12}(e^{it})$ п.в. является решением уравнения $(D_1(t) - X) : (D_{*2}(t) + X) = 0$, и требуемое неравенство вытекает из того, что наименьшее решение этого уравнения $X_0(t) = I - N_0(t)$.

Можно показать, что для полной нерегулярности факторизации $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ достаточно, чтобы $\Theta_1(\zeta)$ и $\Theta_2^*(\overline{\zeta})$ были внешними и $\mathfrak{R}(D_1^{1/2}(t)) = \mathfrak{R}(D_{*2}^{1/2}(t))$ п.в. Эти условия в случае, когда $\dim \mathfrak{F}_1 < \infty$ и $\Theta_i(\zeta)$ $(i = 1, 2)$ невырождены, являются и необходимыми.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ю. Л. Шмульяну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Одесский институт инженеров морского флота

Поступило в редакцию 4 июля 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский В. М., ДАН СССР **198**, № 1 (1971), 2. Крейн М. Г., II летняя матем. школа, Киев, «Наукова думка», 1965, 15—92. 3. Бродский В. М., Бродский М. С., Функц. анализ 8, вып. 2 (1974), 63—64. 4. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1970. 5. Бродский В. М., Шварцман Я. С., ДАН СССР **201**, № 3 (1971), 519—522. 6. Anderson W. N., Duffin R. J., J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 576—594. 7. Fillmore P. A., Williams J. P., Adv. Math. **7**, № 3 (1971), 254—281. 8. Розанов Ю. А., ДАН СССР **202**, № 6 (1972), 1277—1279.

*) $\Lambda^{-1}(t)$ определен как линейный оператор из $\mathfrak{R}(\Lambda(t))$ в $\overline{\mathfrak{R}(\Lambda(t))}$.