

УДК 517.53

Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения

А. М. Седлецкий (Москва)

Пусть $p \in (0, \infty)$, $-\infty < a < b \leq \infty$; $H^p(a, b)$ обозначает пространство функций, голоморфных при $a < \text{Im} z < b$ и для которых

$$\|f\|_p = \sup_{a < y < b} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Теория пространств H^p в полуплоскости (в принятых обозначениях — пространств $H^p(0, \infty)$) развита в такой же степени, как и теория пространств H^p в круге [1] — [3].

Введем в рассмотрение пространство H_*^p как совокупность функций, голоморфных при $\text{Im} z > 0$ и для которых

$$\|f\|_p^* = \sup_{0 < t < \pi} \left\{ \int_0^{\infty} |f(re^{it})|^p dr \right\}^{1/p} < \infty.$$

Пространство H_*^2 рассматривалось М. М. Джрбашяном [4], установившим совпадение классов H_*^2 и $H^2(0, \infty)$. В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $p \in (0, \infty)$. Тогда 1) $H_*^p = H^p(0, \infty)$, 2) $A \|f\|_p \leq \|f\|_p^* \leq B \|f\|_p$, где A, B от f не зависят, $0 < A \leq B < \infty$.

Доказательство теоремы 1 отлично от доказательства М. М. Джрбашяна.

Остальная часть статьи посвящена приложениям теоремы 1, и, в первую очередь, — к теории пространств H^p в полосе, т. е. к теории пространств $H^p(-\sigma, \sigma)$, $\sigma \in (0, \infty)$. Несмотря на то, что пространства $H^p(-\sigma, \sigma)$ встречаются в литературе (см., например, [5]), они не были изучены с такой полнотой, как пространства H^p в круге и полуплоскости. На основании теоремы 1 в § 2 описывается оператор, задающий изоморфизм между пространствами H^p в полосе и полуплоскости. Последнее обстоятельство (помимо его самостоятельной роли) позволило решить в § 3 специальную интерполяционную задачу для пространств $H^p(-\sigma, \sigma)$.

Пусть $Z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек из полосы $|\text{Im} z| < \sigma$. Обозначим через T оператор, действующий из $H^p(-\sigma, \sigma)$ по правилу: $Tf(z) = \{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 2. Пусть $p \in (0, \infty)$. Для того чтобы $TH^p(-\sigma, \sigma) = l^p$, необходимо и достаточно, чтобы 1) $\inf_{n \neq m} |z_n - z_m| > 0$, 2) $\sup_n |\operatorname{Im} z_n| < \sigma$.

Теорема 2 близка по форме следующему результату Г. Шапиро и А. Шилдса [6]. Пусть $\{z_n\}$ вещественна, а $A^2(\sigma)$ обозначает пространство функций, голоморфных при $|\operatorname{Im} z| < \sigma$ и для которых

$$\int \int_{|\operatorname{Im} z| < \sigma} |f(x + iy)|^2 dx dy < \infty;$$

тогда условие $TA^2(\sigma) = l^2$ эквивалентно условию 1) теоремы 2. Аналог теоремы 2 для полуплоскости был получен автором в [7].

С рассмотренной интерполяционной задачей тесно связана задача о базисе Рисса из экспонент. Пусть L^2_σ обозначает (гильбертово) пространство измеримых функций, для которых

$$\|f(x)\|_{2,\sigma} = \|f(x) \exp(-\sigma|x|)\|_{L^2(-\infty, \infty)} < \infty.$$

Из теоремы 2 выводится

Теорема 3. Пусть $|\operatorname{Im} z_n| < \sigma$. Для того чтобы система $\{\exp(iz_n x)\}_{n=1}^\infty$ была базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки по норме L^2_σ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 2) теоремы 2.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Пусть $f \in H^p_*$, покажем, что $f \in H^p(0, \infty)$ и $\|f\|_p \leq 2^{1/p} \|f\|_{p,*}$. Сначала предположим большее: при некотором $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ голоморфна в секторе $-\varepsilon < \arg z < \pi + \varepsilon$ и

$$\|f\|_{p,\varepsilon}^* = \sup_{-\varepsilon < t < \pi + \varepsilon} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{it})|^p dr \right\}^{1/p} < \infty.$$

Через $K(z)$ обозначим круг с центром в точке z радиуса $|z| \sin \varepsilon$, через $R(z)$ — пересечение кольца $r_1 = |z|(1 - \sin \varepsilon) < |\xi| < |z|(1 + \sin \varepsilon) = r_2$ с сектором $\alpha < \arg \xi < \beta$, где лучи $\arg \xi = \alpha, \beta$ касаются границы $K(z)$. Если $\operatorname{Im} z > 0$, то $K(z)$ и $R(z)$ принадлежат рассматриваемому сектору. В силу субгармоничности функции $|f(\xi)|^p$

$$\begin{aligned} |f(z)|^p &\leq \frac{1}{\pi |z|^2 \sin^2 \varepsilon} \int \int_{K(z)} |f(\xi)|^p dx dy \leq \frac{1}{\pi |z|^2 \sin^2 \varepsilon} \int \int_{R(z)} |f(\xi)|^p dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi |z|^2 \sin^2 \varepsilon} \int_\alpha^\beta dt \int_{r_1}^{r_2} |f(re^{it})|^p r dr \leq \frac{(\beta - \alpha)(1 + \sin \varepsilon)}{\pi |z|^2 \sin^2 \varepsilon} (\|f\|_{p,\varepsilon}^*)^p = \frac{c_1}{|z|}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f_\delta(z) = f(z) \left(\frac{z}{z+i\delta} \right)^m \frac{e^{i\delta z} - 1}{i\delta z} \in H^p(0, \infty),$$

$\forall \delta > 0, m$ — целое, $m \geq p^{-1}$. Множители $x^m(x+i\delta)^{-m}, (i\delta x)^{-1}(e^{i\delta x} - 1)$ ограничены по модулю единицей, и при $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$\left(\frac{z}{z+i\delta} \right)^m \rightarrow 1, \quad \frac{e^{i\delta z} - 1}{i\delta z} \rightarrow 1,$$

причем сходимость во втором случае равномерная на каждом компакте, а в первом — равномерная вне любой окрестности точки $z=0$. Поэтому $f_\delta(x) \rightarrow f(x)$ при $\delta \rightarrow 0$ в метрике $L^p(-\infty, \infty)$. Но (квази) норма $f_\delta(x)$ в $L^p(-\infty, \infty)$ совпадает с (квази) нормой $f_\delta(z)$ в $H^p(0, \infty)$. Поэтому при $\delta \rightarrow 0$ $f_\delta(z)$ сходится в метрике $H^p(0, \infty)$. В силу полноты $H^p(0, \infty)$ предельная функция принадлежит $H^p(0, \infty)$. Она должна совпасть с $f(z)$ по следующей причине. Благодаря неравенству (см. [7])

$$|g(z)| \leq c_p \|g\|_p \{ \text{Im} z \}^{-1/p}, \quad g \in H^p(0, \infty), \tag{1}$$

сходимость в метрике $H^p(0, \infty)$ влечет равномерную сходимость к предельной функции на каждом компакте в полуплоскости $\text{Im} z > 0$. Но $f_\delta(z) \rightarrow f(z)$ равномерно на каждом таком компакте. Итак, $f(z) \in H^p(0, \infty)$ и

$$\|f(z)\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \leq 2 \{ \|f(z)\|_p^* \}^p.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Выбранная должным образом ветвь функции $\omega = e^{\frac{i\pi}{2} (ze^{-i\frac{\pi}{2}})^{1+\frac{2}{p}\varepsilon}}$ осуществляет отображение полуплоскости $\text{Im} z > 0$ на сектор $-\varepsilon < \arg \omega < \pi + \varepsilon$. Образ луча $\arg z = \theta$ обозначим через $\arg \omega = t$; $\gamma = \frac{2}{p}\varepsilon$. Тогда

$$\int_0^{\infty e^{i\theta}} |f(z)|^p d|z| = \frac{1}{1+\gamma} \int_0^{\infty e^{it}} |f(e^{\frac{i\pi}{2}} (\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{1+\gamma}})|^p |\omega|^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} d|\omega|,$$

откуда видно, что функция

$$f_\varepsilon(\omega) = (1+\gamma)^{-1/p} \omega^{-\frac{\gamma}{p(1+\gamma)}} f \{ e^{\frac{i\pi}{2}} (\omega e^{-i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{1+\gamma}} \}$$

удовлетворяет условиям только что разобранным случаем, причем $\|f_\varepsilon(\omega)\|_{p,\varepsilon}^* = \|f\|_p^*$. Поэтому $f_\varepsilon(\omega) \in H^p(0, \infty)$ и

$$\|f_\varepsilon(\omega)\|_p \leq 2^{1/p} \|f\|_p^* \tag{2}$$

Зафиксируем $y > 0$. Из представления $f_\varepsilon(\omega)$ видно, что $f_\varepsilon(\omega) \rightarrow f(\omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит, и $|f_\varepsilon(\omega)| \rightarrow |f(\omega)|$ в каждой точке прямой $\text{Im} \omega = y$. Благодаря этому и неравенству (2), по теореме Фату заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \leq 2 \{ \|f\|_p^* \}^p.$$

Так как здесь $y > 0$ произвольно, то этим включение $H_*^p \subset H^p(0, \infty)$ и неравенство $\|f\|_p \leq 2^{1/p} \|f\|_p^*$ полностью доказаны.

Остается показать, что $\forall f \in H^p(0, \infty)$ и $\forall \theta \in (0, \pi)$

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^p dr \leq C \|f\|_p^p, \quad (3)$$

где C от f и θ не зависит.

Рассмотрим отображение $\omega = i(1+z)(1-z)^{-1}$ круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\text{Im } \omega > 0$. При этом [3], [7] оператор $f(\omega) \rightarrow g(z) = (1-z)^{-2/p} f\{i(1+z)(1-z)^{-1}\}$ изоморфно отображает $H^p(0, \infty)$ на пространство H^p в круге.

Прообразом луча $\arg \omega = \theta$ будет некоторая дуга $l(\theta)$ окружности, соединяющая точки $z = \pm 1$. Так как $r = |\omega|$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^p dr &= \int_{l(\theta)} \left| f\left(i \frac{1+z}{1-z}\right) \right|^p \frac{|1-z| |d| |1+z| - |1+z| |d| |1-z|}{|1-z|^2} = \\ &= \int_{l(\theta)} |g(z)|^p d\mu_1(z) + \int_{l(\theta)} |g(z)|^p d\mu_2(z), \end{aligned} \quad (4)$$

где $d\mu_1(z) = \rho(z, 1)d\rho(z, -1)$, $d\mu_2(z) = \rho(z, -1)d\{-\rho(z, 1)\}$ ($\rho(z_1, z_2)$ обозначает расстояние между точками z_1 и z_2). Так как движению в плоскости ω по лучу $\arg \omega = \theta$ из начала координат отвечает движение в плоскости z от точки $z = -1$ к точке $z = 1$, то меры μ_1, μ_2 неотрицательны.

Воспользуемся следующей (см. [2], стр. 157, 163) теоремой Л. Карлесона: если $\mu(z)$ — неотрицательная мера, определенная на борелевских подмножествах круга $|z| < 1$, то неравенство

$$\int |g(z)|^p d\mu(z) \leq C \|g\|_p^p \quad \forall g \in H^p$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(S) \leq Ah$ для любого множества $S = \{z = re^{it} : 1-h < r < 1, t_0 < t < t_0+h\}$. При этом $C \leq 4(80)^4 A$.

Легко видеть, что для мер $\mu_1(z), \mu_2(z)$ условия теоремы Л. Карлесона выполняются. Поэтому $\forall g \in H^p$ в круге

$$\int_{l(\theta)} |g(z)|^p d\mu_k(z) \leq C \|g\|_p^p, \quad k = 1, 2, \theta \in (0, \pi).$$

Подставляя полученные неравенства в (4) и учитывая, что $\|g\|_p^p \leq c_p \|f\|_p^p$, получаем требуемое неравенство (3). Теорема 1 полностью доказана.

§ 2. Пространства H^p в полосе

Рассмотрим отображение $\omega = \exp\left(\frac{\pi z}{2\sigma} + i \frac{\pi}{2}\right)$ полосы $|\text{Im } z| < \sigma$ на полуплоскость $\text{Im } \omega > 0$. Обратное отображение имеет вид $z = \frac{2\sigma}{\pi} \left(\ln \omega - i \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \arg \omega < \pi$. В дальнейшем, когда будет фигурировать функция $\omega^{1/p}$, надо

подразумевать, что фиксирована некоторая ее однозначная ветвь в полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$.

Предложение. Пусть $p \in (0, \infty)$, $f \in H^p(-\sigma, \sigma)$. Тогда оператор $f(z) \rightarrow \omega^{-1/p} f\left\{\frac{2\sigma}{\pi}\left(\ln \omega - i\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ задает изоморфизм между пространствами $H^p(-\sigma, \sigma)$ и $H^p(0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $|y| < \sigma$. При отображении ω прямая $\text{Im } z = y$ перейдет в луч $\arg \omega = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{y}{\sigma}\right) = \alpha(y)$. Пусть $|\omega| = r$, тогда $dx = 2\sigma\pi^{-1}|\omega|^{-1}dr$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx = \frac{2\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \left| f\left\{\frac{2\sigma}{\pi}\left(\ln(re^{i\alpha(y)}) - i\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right|^p |\omega|^{-1} dr,$$

откуда следует, что рассматриваемый оператор задает изоморфизм между $H^p(-\sigma, \sigma)$ и H^p_+ . Остается сослаться на теорему 1.

Доказанное предложение и известные свойства пространств $H^p(0, \infty)$ дают возможность сформулировать нужные для дальнейших приложений свойства пространств $H^p(-\sigma, \sigma)$.

Свойство 1. Пространства $H^p(-\sigma, \sigma)$ являются банаховыми при $p \in [1, \infty)$ и пространствами Фреше (полными квазинормированными пространствами) при $p \in (0, 1)$.

Свойство 2. При $p \in (0, \infty)$ для $\forall f \in H^p(-\sigma, \sigma)$ имеет место представление $f(z) = B(z)E(z)$, где $E(z) \neq 0$ при $|\text{Im } z| < \sigma$, $E(z) \in H^p(-\sigma, \sigma)$, $A_p \|f\|_p \leq \|E\|_p \leq B_p \|f\|_p$, а $B(z)$ — произведение Бляшке для полосы, построенное по корням $\{z_n\}$ функции $f(z)$:

$$B(z) = \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi z}{2\sigma}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\pi z}{2\sigma}\right) + 1} \right)^m \prod_k \frac{\exp\left(\frac{\pi z}{2\sigma}\right) - \exp\left(\frac{\pi z_k}{2\sigma}\right)}{\exp\left(\frac{\pi z}{2\sigma}\right) + \exp\left(\frac{\pi z_k}{2\sigma}\right)} b_k,$$

где m — кратность корня $z=0$, $|b_k| = 1$.

Кроме того, из неравенства (1) и предложения вытекает

Свойство 3. Если $p \in (0, \infty)$, то для $\forall f \in H^p(-\sigma, \sigma)$

$$|f(z)| \leq A_p \|f\|_p \left\{ \cos \frac{\pi y}{2\sigma} \right\}^{-1/p}, \quad |y| < \sigma.$$

Свойство 3 немедленно влечет

Свойство 4. Из сходимости в метрике $H^p(-\sigma, \sigma)$ следует равномерная сходимость на каждом компакте в полосе $|\text{Im } z| < \sigma$.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Достаточность. Если выполнены условия 1), 2) теоремы 2, то (см. [7]) $TH^p(-\sigma, \infty) = l^p$. Но $TH^p(-\sigma, \infty) \subset TH^p(-\sigma, \sigma)$. Остается показать, что $l^p \supset TH^p(-\sigma, \sigma)$.

Для этого воспользуемся одним приемом, применявшимся по другому поводу еще М. Планшерелем и Г. Пойя [8].

Пусть $\delta_1 = \inf_{n \neq m} |z_n - z_m|$, $\delta_2 = \inf_n (\sigma - |\operatorname{Im} z_n|)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $K_n = \{z : |z - z_n| < \delta/2\}$. По построению круги K_n не пересекаются. Если $f \in H^p(-\sigma, \sigma)$, то функция $|f(z)|^p$ субгармонична. Поэтому

$$\begin{aligned} |f(z_n)|^p &\leq \frac{4}{\pi\delta^2} \iint_{K_n} |f(x+iy)|^p dx dy, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |f(z_n)|^p &\leq \frac{4}{\pi\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{K_n} |f(x+iy)|^p dx dy \leq \\ &\leq \frac{4}{\pi\delta^2} \int_{-\sigma}^{\sigma} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \leq \frac{8\sigma}{\pi\delta^2} \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

а это и означает, что $TH^p(-\sigma, \sigma) \subset l^p$.

Необходимость условия 2) вытекает из леммы [7]: $l^p \supset TH^p(-\sigma, \infty) \Rightarrow \inf_n \operatorname{Im} z_n > -\sigma$.

Для доказательства необходимости условия 1) используем прием перехода к фактор-пространствам, который впервые к интерполяционным задачам применили Г. Шапиро и А. Шилдс [6].

Пусть $N = \{f(z) : f(z) \in H^p(-\sigma, \sigma), f(z_n) = 0 \forall n\}$. В силу свойства 4, N — замкнутое подпространство в $H^p(-\sigma, \sigma)$. Благодаря этому и свойству 1, фактор-пространство $H^p(-\sigma, \sigma)/N$ является банаховым пространством при $p \geq 1$ и пространством Фреше при $p < 1$ соответственно с нормой и квазинормой

$$\|\xi\| = \inf_{f \in \xi} \|f\|_p, \quad \|\xi\| = \inf_{f \in \xi} \|f\|_p^p,$$

где ξ — класс эквивалентности по модулю N .

Покажем, что из условия 2) теоремы 2 (уже доказанного) и включения $l^p \subset TH^p(-\sigma, \sigma)$ следует условие 1). Обозначим через P линейный оператор, ставящий в соответствие последовательности $\{c_n\} \in l^p$ класс эквивалентности по модулю N , состоящий из всех функций $f(z)$ таких, что $f(z_n) = c_n \forall n$. Покажем, что оператор P замкнут. Надо убедиться, что из условий $\{c_n^i\} \rightarrow \{c_n\}$ в метрике l^p и $P\{c_n^i\} \rightarrow \xi$ в метрике $H^p(-\sigma, \sigma)/N$ следует, что $\{c_n\} \in l^p$ и $\xi = P\{c_n\}$.

Включение $\{c_n\} \in l^p$ справедливо в силу полноты пространств l^p . Положим $\xi_i = P\{c_n^i\}$. Так как $\xi_i \rightarrow \xi$ в метрике фактор-пространства, то найдутся функции $f_i \in \xi_i$, $f \in \xi$ такие, что $f_i \rightarrow f$ в метрике $H^p(-\sigma, \sigma)$. По свойству 4 при фиксированном z_k имеем $f_i(z_k) \rightarrow f(z_k)$. Но $f_i(z_k) = c_k^i \rightarrow c_k$. Значит, $f(z_k) = c_k \forall k$. Но все функции из ξ принимают на $\{z_n\}$ те же значения, что и $f(z)$. Таким образом, $P\{c_n\} = \xi$.

Пространства l^p являются банаховыми при $p \geq 1$ и пространствами Фреше при $p < 1$ соответственно с нормой $\| \{c_n\} \|_p$ и квазинормой $\| \{c_n\} \|_p^p$, где $\| \{c_n\} \|_p^p = \sum |c_n|^p$. Итак, оператор P , будучи замкнутым, отображает пространство Фреше (l^p) в пространстве Фреше (H^p/N). По теореме о замкнутом графике P ограничен. Значит, каждая последовательность $e_n = \{\delta_{nk}\}_{k=1}^\infty, n = 1, 2, \dots$; может быть проинтерполирована в точках $\{z_k\}$ функцией $f_n(z) \in H^p(-\sigma, \sigma)$ так, что $\sup_n \|f_n(z)\|_p < \infty$.

Пусть $\{\lambda_i\}$ — корни $f_n(z)$, $\tilde{B}_n(z)$ — произведение Бляшке для полосы $|\operatorname{Im} z| < \sigma$, построенное по корням $\{\lambda_i\}$. По построению $\{\lambda_i\} \equiv \{z_k\}_{k \neq n}$; пусть $B_n(z)$ — произведение Бляшке для той же полосы с корнями в точках $\{z_k\}_{k \neq n}$.

По свойству 2, $f_n(z) = \tilde{B}_n(z)E_n(z)$, где $E_n \in H^p(-\sigma, \sigma)$ и нормы E_n и f_n в $H^p(-\sigma, \sigma)$ эквивалентны. Теперь $1 = f_n(z_n) = \tilde{B}_n(z_n)E_n(z_n)$, $E_n(z_n) = \{\tilde{B}_n(z_n)\}^{-1}$.

Применим к $E_n(z)$ свойство 3:

$$|\tilde{B}_n(z_n)|^{-1} = |E_n(z_n)| \leq c_p \|E_n\|_p \left\{ \cos \frac{\pi y_n}{2\sigma} \right\}^{-1/p} \leq M \left\{ \cos \frac{\pi y_n}{2\sigma} \right\}^{-1/p},$$

где $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Так как условие 2) теоремы уже доказано, то отсюда $\inf_n |\tilde{B}_n(z_n)| > 0$. А значит, и $\inf_n |B_n(z_n)| > 0$, ибо каждый сомножитель в произведении Бляшке не превосходит по модулю единицы.

Теорема 2 будет полностью доказана, если мы убедимся, что при условии 2) теоремы $\inf_n |B_n(z_n)| > 0 \Rightarrow \inf_{n \neq k} |z_n - z_k| > 0$.

Запишем $|B_n(z_n)|$ в виде

$$\left| \frac{\exp\left(\frac{\pi z_n}{2\sigma}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\pi \bar{z}_n}{2\sigma}\right) + 1} \prod_{k \neq n} \frac{1 - \exp\left\{\frac{\pi}{2\sigma}(z_k - z_n)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{\pi}{2\sigma}(\bar{z}_k - z_n)\right\}} \right| = \prod \frac{a_{nk}}{c_{nk}}. \quad (5)$$

Если бы $\inf_{n \neq k} |z_k - z_n| = 0$, то и $\lim a_{nk} = 0$ по некоторой подпоследовательности индексов. Показав, что $\inf |c_{nk}| > 0$ по той же подпоследовательности, мы приходим к противоречию с условием $\inf_n |B_n(z_n)| > 0$, ведь все остальные дробно-сомножители в (5) не превосходят единицы.

Пусть $z_n = z_k + \alpha_{nk}$, $\alpha_{nk} \rightarrow 0$. Тогда

$$\left| \frac{\pi}{2\sigma} (\bar{z}_k - z_n) \right| = \left| \frac{\pi}{2\sigma} \left\{ (\bar{z}_k - z_k) - \alpha_{nk} \right\} \right| \leq \frac{\pi}{\sigma} \left\{ |\operatorname{Im} z_k| + \frac{|\alpha_{nk}|}{2} \right\}.$$

Благодаря условию 2) и тому, что $\alpha_{nk} \rightarrow 0$, $\exists \delta > 0$ такое, что $\frac{\pi}{2\sigma} |\bar{z}_k - z_n| \leq \pi - \delta$.

Поэтому $\inf c_{nk} = \inf \left| 1 + \exp\left\{\frac{\pi}{2\sigma} (\bar{z}_k - z_n)\right\} \right| > 0$.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Вернемся к оператору P . Как было установлено при доказательстве теоремы 2, условие $l^p \subset TH^p(-\sigma, \sigma)$ влечет ограниченность оператора P . Если же $l^p = TH^p(-\sigma, \sigma)$, то P отображает l^p на H^p/N взаимно однозначно. Применив теорему Банаха об обратном операторе, получаем, что из условия $TH^p(-\sigma, \sigma) = l^p$ следует, что P — изоморфизм между l^p и H^p/N . Так как обратное утверждение очевидно, то заключаем: объединение условий 1), 2) теоремы 2 эквивалентно тому, что последовательность $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует в H^p/N базис, изоморфный естественному базису пространства l^p ; здесь δ_n — элемент H^p/N , все представители которого равны 1 в точке z_n и равны нулю при $z = z_k, k \neq n$.

Желая изучить базисные в L^2_{σ} системы вида

$$\{\exp(iz_n x)\}, \quad (6)$$

мы должны ограничиться неполными системами. Действительно, такая система должна быть минимальной; $\exists h_1 \in (L^2_{\sigma})^* = L^2_{-\sigma} : \langle \exp(iz_n x), h_1(x) \rangle = 0, n=2, 3, \dots, h_1 \neq 0$. По теореме Пэли—Винера $\int e^{izt} h_1(t) dt = F(z) \in H^2(-\sigma, \sigma)$. Функция $(z-z_1)(z-2i\sigma)^{-1}F(z)$ также принадлежит $H^2(-\sigma, \sigma)$; пусть h — ее прообраз Фурье. Тогда система (6) аннулируется нетривиальным функционалом (h) над L^2_{σ} .

Пусть $L^2_{\sigma}(Z)$ — замыкание в L^2_{σ} линейной оболочки системы (6). Пусть Φ — аннулятор $L^2_{\sigma}(Z)$ (он совпадает с прообразом Фурье множества N); тогда (см. [2], стр. 110) $\{L^2_{\sigma}(Z)\}^* = L^2_{-\sigma}/\Phi$. Пусть $\{h_n\}$ — последовательность из $\{L^2_{\sigma}(Z)\}^*$, образующая с (6) биортогональную систему. Хорошо известно, что обе последовательности одновременно образуют или не образуют базис Рисса соответственно в $\{L^2_{\sigma}(Z)\}^*$ и $L^2_{\sigma}(Z)$. Но образом Фурье последовательности $\{h_n\}$ является, очевидно, последовательность $\{\delta_n\}$. Так как оператор Фурье задает изоморфизм $L^2_{-\sigma}/\Phi$ и H^p/N , то остается воспользоваться выводом, сделанным в конце первого абзаца.

(Поступила в редакцию 3/1 1974 г.)

Литература

1. В. И. Крылов, О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб., 6 (48) (1939), 95—138.
2. P. L. Duren, Theory of H^p spaces, New York, 1970.
3. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, Москва, ИЛ, 1963.
4. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления в комплексной области, Москва, изд-во «Наука», 1966.
5. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, Гостехиздат, 1948.
6. H. S. Shapiro and A. L. Shields, On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83 (1961), 513—532.
7. А. М. Седлецкий, Интерполяция в пространствах H^p в полуплоскости, ДАН СССР, 208, № 6 (1973), 1293—1295.
8. M. Plancherel et G. Pólya, Fonctions entières et integrales de Fourier multiples, Comm. math. Helv., 10, № 2 (1938), 110—163.