ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 141, № 1
октябрь, 2004

И. З. Голубчик*, В. В. Соколов†

ФАКТОРИЗАЦИЯ АЛГЕБРЫ ПЕТЕЛЬ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЧКОВ

С каждым разложением алгебры Ли рядов Лорана с коэффициентами из полупростой алгебры Ли в сумму подалгебры, состоящей из рядов Тейлора и некоторой дополнительной подалгебры, связывается иерархия интегрируемых гамильтоновых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае алгебры Ли $so(3)$ наша схема охватывает все классические интегрируемые случаи в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости. Кроме того, данная конструкция позволяет строить интегрируемые деформации известных интегрируемых моделей.

Ключевые слова: интегрируемые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, пара Лакса, алгебра петель.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения, представление Лакса для которых задается разложением алгебры $\mathcal{G}_\lambda$ рядов Лорана по параметру λ с коэффициентами из полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$ в прямую сумму векторных пространств

$$\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_-, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{G}_-$ – подалгебра рядов Тейлора, а $\mathcal{G}_+$ – некоторая дополнительная подалгебра Ли. Следуя терминологии Чередника [1], мы будем называть такие подалгебры *факторизующими*. В стандартной ситуации $\mathcal{G}_+$ совпадает с множеством $\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}$, состоящим из полиномов от λ^{-1} с нулевым свободным членом.

В случае, когда факторизующая подалгебра изотропна относительно инвариантной невырожденной формы

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda)\rangle = \operatorname{res}\big(X(\lambda), Y(\lambda)\big), \qquad X(\lambda), Y(\lambda) \in \mathcal{G}_\lambda, \tag{1.2}$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – форма Киллинга на $\mathcal{G}$, имеются тесные связи между факторизующими подалгебрами и решениями классического уравнения Янга–Бакстера [2]. Неизотропные факторизующие подалгебры, по-видимому, серьезно не изучались.

*Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия
†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: vsokolov@landau.ac.ru

Наиболее известным классом интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, связанных с факторизующими подалгебрами, являются уравнения типа Ландау–Лифшица [3]. Представление Лакса для них имеет вид

$$L_t = A_x + [A, L], \tag{1.3}$$

где L, A – некоторые элементы факторизующей алгебры $\mathcal{G}_+$. Связь между факторизующими подалгебрами и системами типа уравнения кирального поля была установлена в работе [4].

В случае, когда решение уравнения типа Ландау–Лифшица не зависит от x, соотношение (1.3) редуцируется к

$$L_t = [A, L]. \tag{1.4}$$

Если для уравнения Лакса (1.3) естественно считать, что и L, и A принадлежат одной и той же алгебре Ли, то уравнение (1.4) самосогласованно и в том случае, если A принадлежит алгебре Ли, а L лежит в некотором модуле над этой алгеброй. Одно из наших основных наблюдений состоит в том, что кроме уравнений (1.4), где $L, A \in \mathcal{G}_+$, имеется второй, может быть более интересный, класс интегрируемых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых $A \in \mathcal{G}_+$, $L \in \mathcal{G}_+^\perp$. Здесь $\perp$ означает ортогональное дополнение относительно формы (1.2). В случае изотропных факторизующих подалгебр эти два класса совпадают. Легко видеть, что $\mathcal{G}_+^\perp$ – модуль над $\mathcal{G}_+$. Особенно важно для нас то, что уравнения на $\mathcal{G}_+^\perp$ обладают естественной гамильтоновой структурой, задаваемой линейной скобкой Пуассона. В общем случае уравнения второго класса не допускают двумерного обобщения (1.3).

Уравнения Лакса, где $L \in \mathcal{G}_+^\perp$, по-видимому, выпали из поля зрения специалистов. Как показано в разделе 4, именно такие представления Лакса для $\mathcal{G} = so(3)$ соответствуют классическим однородным квадратичным интегрируемым гамильтонианам динамики твердого тела (а именно волчкам Эйлера, Кирхгофа, Клебша и Стеклова–Ляпунова). Все факторизующие подалгебры для $\mathcal{G} = so(3)$ проклассифицированы в работе [5]. Оказалось, что классические волчки находятся во взаимно однозначном соответствии с факторизующими подалгебрами. Кроме того, оказалось, что различные деформации известных интегрируемых моделей, найденные в последнее время [6]–[8], также порождены неизотропными факторизующими подалгебрами (см. раздел 5).

В разделах 2 и 3 развивается общая алгебраическая теория интегрируемых моделей, связанных с факторизующими подалгебрами, в частности, дается описание коммутирующих потоков и линейных скобок Пуассона на конечномерных орбитах. Интересно отметить, что в случае, когда факторизующая подалгебра удовлетворяет условию

$$\lambda^{-m}\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}_+ \tag{1.5}$$

для некоторого $m \geqslant 1$, уравнения движения гамильтоновы относительно еще одной линейной скобки Пуассона. Этот факт объясняет существование найденных Бобенко [9] линейных замен, связывающих известные интегрируемые случаи на $e(3)$ и $so(4)$. Согласованность двух линейных скобок Пуассона положена в основу подхода, развитого в работе [10] (см. также [4]).

Если соотношение (1.5) выполнено при $m = 1$, факторизующая подалгебра $\mathcal{G}_+$ называется *однородной*. В разделе 6 рассматриваются однородные подалгебры. В частности, показывается, что факторизующая подалгебра, соответствующая любой конечной группе редукций (см. [11]), эквивалентна однородной.

2. ОБЩАЯ СХЕМА

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра с невырожденной полуфробениусовой формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Последнее означает, что

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle, \qquad \langle a, b \star c \rangle = \langle a \star b, c \rangle.$$

Через $\mathcal{A}^{(-)}$ обозначим присоединенную алгебру Ли со скобкой $[a, b] = a \star b - b \star a$. Легко видеть, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ индуцирует инвариантную форму на $\mathcal{A}^{(-)}$. Другими словами,

$$\langle [a, b], c \rangle = -\langle b, [a, c] \rangle. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathcal{U}$ – подалгебра Ли в $\mathcal{A}^{(-)}$ такая, что ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}}$ формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{U}$ невырожденно и

$$\mathcal{A}^{(-)} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}. \tag{2.2}$$

Предположим, что

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_+ \oplus \mathcal{U}_-, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{U}_-$ и $\mathcal{U}_+$ – некоторые подалгебры Ли. Обозначим через π_- и π_+ проекторы на $\mathcal{U}_-$ и $\mathcal{U}_+$, соответственно.

Пусть I_- и I_+ – идеалы конечной коразмерности в $\mathcal{U}_-$ и $\mathcal{U}_+$. Рассмотрим подпространство в $\mathcal{U}$ вида

$$\mathcal{O} = I_-^{\perp} \cap I_+^{\perp}, \tag{2.4}$$

где $\perp$ означает ортогональное дополнение в $\mathcal{U}$ относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}}$. Поскольку

$$I_-^{\perp} \cap I_+^{\perp} = (I_- + I_+)^{\perp},$$

то пространство $\mathcal{O}$ конечномерно.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная ассоциативная алгебра, $\mathcal{U}$ – алгебра Ли рядов Лорана относительно параметра λ с коэффициентами из $\mathcal{A}$, r – фиксированный постоянный элемент $\mathcal{A}$. Легко видеть, что

$$\mathcal{U}_+ = \left\{ \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda^{-i} (1 + \lambda r) \;\middle|\; a_i \in \mathcal{A}, \quad p \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.5}$$

является факторизующей подалгеброй Ли в $\mathcal{U}$, дополнительной к подалгебре $\mathcal{U}_-$ всех рядов Тейлора. Можно проверить, что

$$\mathcal{U}_+^{\perp} = \left\{ \sum_{i=1}^{q} (1 + \lambda r)^{-1} a_i \lambda^{-i} \;\middle|\; a_i \in \mathcal{A}, \quad q \in \mathbb{N} \right\}. \tag{2.6}$$

Определим орбиту $\mathcal{O}_n$ с помощью пары идеалов

$$I_+ = \mathcal{U}_+, \qquad I_- = \lambda^n \mathcal{U}_-.$$

Из (2.4) следует, что

$$\mathcal{O}_n = \lambda^{-n}\mathcal{U}_- \cap \mathcal{U}_+^{\perp}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{O}_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda r)^{-1} a_i \lambda^{-i} \;\middle|\; a_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Пусть $L \in \mathcal{O}$, $f(L, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ – некоторый многочлен с постоянными коэффициентами, λ_i – произвольные элементы из центра $\mathcal{A}$. Обозначим через $\bar{f}$ проекцию f на $\mathcal{U}$, соответствующую разложению (2.2). Выражения типа $\bar{f}$ будем называть *спектральными инвариантами* L. Поскольку $[f, L] = 0$, имеем также $[\bar{f}, L] = 0$. Если $\bar{g}$ – еще один спектральный инвариант, то из $[\bar{f}, L] = 0$ следует $[\bar{f}, g] = 0$. Тогда из разложения (2.2) вытекает, что $[\bar{f}, \bar{g}] = 0$.

Теорема 2.1. *Множество $\mathcal{O}$ является конечномерной орбитой относительно потока, задаваемого уравнением Лакса*

$$L_t = [\pi_+(\bar{f}), L], \tag{2.7}$$

где $\bar{f}$ – произвольный спектральный инвариант L.

Доказательство. Для того чтобы доказать, что $\mathcal{O}$ – орбита, мы должны показать, что если $L \in \mathcal{O}$, то $[\pi_+(\bar{f}), L] \in \mathcal{O}$. По определению $\pi_+(\bar{f}) \in \mathcal{U}_+$. Из инвариантности формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следует, что $I_+^{\perp}$ является модулем над $\mathcal{U}_+$. Поэтому $[\pi_+(\bar{f}), L] \in I_+^{\perp}$. Из $[\bar{f}, L] = 0$ получаем $[\pi_+(\bar{f}), L] = -[\pi_-(\bar{f}), L]$. Так как $I_-^{\perp}$ является модулем над $\mathcal{U}_-$, имеем $[\pi_+(\bar{f}), L] \in I_-^{\perp}$. Отсюда $[\pi_+(\bar{f}), L] \in \mathcal{O}$.

Как мы увидим ниже, уравнение Лакса обладает богатым запасом первых интегралов и коммутирующих потоков.

Предложение 2.1. *Для любых двух спектральных инвариантов $h = \bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ выражение $\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle$ является первым интегралом уравнения* (2.7).

Доказательство. Поскольку g_i – многочлен от L, имеем $(g_i)_t = [\pi_+(\bar{f}), g_i]$. Из разложения (2.2) следует, что

$$(\bar{g}_i)_t = [\pi_+(\bar{f}), \bar{g}_i]. \tag{2.8}$$

Из инвариантности (2.1) формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ получаем

$$h_t = \langle \bar{g}_1, [\pi_+(\bar{f}), \bar{g}_2] \rangle + \langle \bar{g}_2, [\pi_+(\bar{f}), \bar{g}_1] \rangle.$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Для любых спектральных инвариантов $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ потоки на орбите $\mathcal{O}$*

$$L_t = [\pi_+(\bar{g}_1), L] \tag{2.9}$$

и

$$L_\tau = [\pi_+(\bar{g}_2), L] \tag{2.10}$$

коммутируют между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношения (2.8)–(2.10), получаем

$$L_{t\tau} - L_{\tau t} = \big[\pi_+[\pi_+(\bar{g}_2), \bar{g}_1] - \pi_+[\pi_+(\bar{g}_1), \bar{g}_2] - [\pi_+(\bar{g}_2), \pi_+(\bar{g}_1)], L\big].$$

Поскольку в разложении (2.3) оба слагаемых являются подалгебрами, последнее равенство может быть записано в виде соотношения

$$L_{t\tau} - L_{\tau t} = [\pi_+[\bar{g}_2, \bar{g}_1], L], \tag{2.11}$$

правая часть которого равна нулю, поскольку, как отмечалось выше, $[\bar{g}_2, \bar{g}_1] = 0$.

Оказывается, что при естественном (ср. с (2.4)) дополнительном условии

$$\mathcal{O}^\perp = I_- + I_+$$

уравнение (2.7) является гамильтоновым. Определим $\mathcal{H}$ формулой

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}_-/I_- \oplus \overline{\mathcal{U}}_+/I_+,$$

где алгебра $\overline{\mathcal{U}}_+$ получается из $\mathcal{U}_+$ заменой скобки $[a, b]$ на $[b, a]$. Подчеркнем, что в этой формуле символ $\oplus$ означает прямую сумму алгебр Ли, а не векторных пространств, как это было в формуле (2.3).

Зададим невырожденную билинейную форму, спаривающую между собой алгебру $\mathcal{H}$ и орбиту $\mathcal{O}$, формулой

$$((a_- + I_-, a_+ + I_+), L) = \langle a_+ + a_-, L\rangle. \tag{2.12}$$

Так как $\langle I_- \oplus I_+, \mathcal{O}\rangle = 0$, форма (2.12) корректно определена. Скобка Кириллова на $\mathcal{O}$ задается формулой

$$\{\varphi, \psi\}(L) = ([\operatorname{grad}_L \varphi, \operatorname{grad}_L \psi], L), \qquad L \in \mathcal{O}, \quad \operatorname{grad}_L \varphi, \operatorname{grad}_L \psi \in \mathcal{H}. \tag{2.13}$$

Предположим, что базисы f^i и e_i в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{H}$ сопряжены относительно формы (2.12),

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$$

и $L = q_i f^i$. Тогда, поскольку $\operatorname{grad} q_i = e_i$, скобки Пуассона между координатными функциями задаются формулой

$$\{q_i, q_j\} = c_{ij}^k q_k. \tag{2.14}$$

ТЕОРЕМА 2.3 (ср. с [12]). 1. *Функционалы вида*

$$H_g = \langle g, 1\rangle, \tag{2.15}$$

где $g(L, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ *– полином с постоянными коэффициентами от всех аргументов,* $L \in \mathcal{O}$, *находятся в инволюции относительно скобки* (2.14).

2. *Уравнение Лакса*

$$L_t = [\pi_+(\bar f), L], \tag{2.16}$$

где

$$f = -\frac{dg}{dL}(L, \lambda_1, \dots, \lambda_k), \tag{2.17}$$

на орбите $\mathcal{O}$ *гамильтоново относительно скобки* (2.14) *с гамильтонианом* H_g.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_{g_1} и H_{g_2} – два функционала вида (2.15). Тогда

$$\operatorname{grad} H_{g_i} = -(\pi_-(\bar f_i) + I_-, \pi_+(\bar f_i) + I_+), \tag{2.18}$$

где f_i и g_i связаны между собой формулой (2.17). Согласно формуле (2.13)

$$\begin{aligned}\{H_{g_1}, H_{g_2}\} &= \big\langle -[\pi_+(\bar f_1), \pi_+(\bar f_2)] + [\pi_-(\bar f_1), \pi_-(\bar f_2)], L\big\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\big\langle [(-\pi_+(\bar f_1) + \pi_-(\bar f_1)), \bar f_2] - [(-\pi_+(\bar f_2) + \pi_-(\bar f_2)), \bar f_1], L\big\rangle.\end{aligned}$$

Из инвариантности формы $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и соотношений $[\bar f_1, L] = [\bar f_2, L] = 0$ следует, что последнее выражение равно нулю. Первый пункт теоремы доказан. Гамильтонова система с гамильтонианом H_g имеет вид

$$\frac{d\Psi(L)}{dt} = \{\Psi, H_g\}(L) = (\operatorname{grad}_L \Psi, L_t).$$

С другой стороны, $\operatorname{grad}_L \Psi = (\pi_-(a) + I_-, \pi_+(a) + I_+)$ для некоторого $a \in \mathcal{U}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\big(\operatorname{grad}_L \Psi, [\pi_+(\bar f), L]\big) &= \frac{1}{2}\big((\pi_-(a) + I_-, \pi_+(a) + I_+), [\pi_+(\bar f) - \pi_-(\bar f), L]\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big\langle [\pi_-(a) + \pi_+(a), \pi_+(\bar f) - \pi_-(\bar f)] + [\pi_-(a) - \pi_+(a), \bar f\,], L\big\rangle = \\ &= \big\langle [\pi_+(a), \pi_+(\bar f)] - [\pi_-(a), \pi_-(\bar f)], L\big\rangle = \\ &= \big([\operatorname{grad}_L \Psi, \operatorname{grad}_L H_g], L\big) = \{\Psi, H_g\}(L).\end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались формулой (2.18). Из невырожденности формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ следует, что уравнение $L_t = [\pi_+(\bar f), L]$ гамильтоново относительно скобки (2.13). Теорема доказана.

Предположим, что идеалы I_+ и I_- обладают дополнительным свойством

$$\mu I_+ \subset \mathcal{G}_+, \qquad \mu I_- \subset \mathcal{G}_-, \qquad \mu^{-1}\mathcal{O} \subset \mathcal{U} \tag{2.19}$$

для некоторого обратимого элемента μ из центра ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$.

Замечание 2.1. Орбита $\mathcal{O}_\mu$, построенная по идеалам μI_+ и μI_-, связана с $\mathcal{O}$ формулой

$$\mathcal{O}_\mu = \mu^{-1}\mathcal{O}.$$

Замечание 2.2. Уравнение $\tilde{L}_t = [\pi_+(\overline{F}(\tilde{L}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)), \tilde{L}]$ на орбите $\mathcal{O}_\mu$ совпадает с уравнением (2.16) на орбите $\mathcal{O}$, где $\tilde{L} = \mu^{-1}L$, $f(L, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = F(\tilde{L}, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Замечание 2.3. При условии (2.19) уравнение Лакса (2.16) обладает двумя гамильтоновскими структурами, описанными в теореме 2.3. Первая структура соответствует паре идеалов I_+, I_-, в то время как вторая связана с парой μI_+, μI_-. Вопрос о том, согласованы ли эти скобки Пуассона, остается пока открытым.

3. СЛУЧАЙ АЛГЕБРЫ ПЕТЕЛЬ

В этой статье в качестве основного примера алгебры Ли $\mathcal{U}$ мы рассматриваем алгебру петель над полупростой алгеброй Ли $\mathcal{G}$. Будем считать, что $\mathcal{G}$ вложена в алгебру матриц $\mathrm{Mat}_{k\times k}$ при помощи присоединенного представления. В этом случае ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ – это множество всех формальных рядов Лорана относительно параметра λ с коэффициентами из $\mathrm{Mat}_{k\times k}$. Билинейная форма на $\mathcal{A}$ определяется формулой

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda)\rangle = \mathrm{res}(\mathrm{tr}(XY)). \tag{3.1}$$

Мы выбираем

$$\mathcal{G}_\lambda = \left\{ \sum_{i=-n}^{\infty} g_i\lambda^i \;\middle|\; g_i \in \mathcal{G}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{G}_- = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i\lambda^i \;\middle|\; g_i \in \mathcal{G} \right\} \tag{3.3}$$

в качестве $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_-$. Предположим, что как векторное пространство $\mathcal{G}_\lambda$ является прямой суммой $\mathcal{G}_-$ и некоторой дополнительной факторизующей подалгебры $\mathcal{G}_+$.

Стандартной факторизующей подалгеброй является

$$\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i\lambda^{-i} \;\middle|\; g_i \in \mathcal{G}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{3.4}$$

Легко видеть, что как $\mathcal{G}_-$, так и $\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}$ являются изотропными относительно формы

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{res}\big(\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \cdot \mathrm{ad}_Y)\big), \qquad X, Y \in \mathcal{G}_\lambda. \tag{3.5}$$

Определим орбиту $\mathcal{O}_n$ с помощью пары идеалов

$$I_+ = \mathcal{G}_+, \qquad I_- = \lambda^n\mathcal{G}_-. \tag{3.6}$$

Из (2.4) следует, что

$$\mathcal{O}_n = \lambda^{-n}\mathcal{G}_- \cap \mathcal{G}_+^\perp. \tag{3.7}$$

Для стандартной факторизующей подалгебры $\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}$ имеем

$$\mathcal{O}_n = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} g_i \lambda^{-i} \Big\}.$$

Спектральные инварианты задаются многочленами $f(L, \lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda^{-1}$. Соответствующая линейная скобка Пуассона (2.14) связана с конечномерной алгеброй Ли

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}_- / \lambda^n \mathcal{G}_-. \tag{3.8}$$

Поскольку $\mathcal{G}_-$ – алгебра рядов Тейлора, алгебра $\mathcal{H}$ изоморфна алгебре многочленов $\mathcal{G}[\varepsilon]$, где $\varepsilon^n = 0$. В частности, если $\mathcal{G} = so(3)$, а $n = 2$, то $\mathcal{H}$ изоморфна алгебре Ли $e(3)$ движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Замечание 2.3 означает, что если подалгебра $\mathcal{G}_+$ удовлетворяет условию (1.5) для некоторого $0 \leqslant m \leqslant n$, то можно построить соответствующую линейную скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_m$, для которой спектральные инварианты оператора L находятся в инволюции. Скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_m$ соответствует конечномерной алгебре Ли

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{G}_- / I \oplus \overline{\mathcal{G}}_+ / J, \tag{3.9}$$

где $I = \lambda^{n-m} \mathcal{G}_-$, $J = \lambda^{-m} \overline{\mathcal{G}}_+$. Алгебра $\overline{\mathcal{G}}_+$ получается из $\mathcal{G}_+$ заменой скобки $[a, b]$ на $[b, a]$. Символ $\oplus$ означает прямую сумму алгебр Ли. Если $\mathcal{G} = so(3)$, $n = 2$ и $m = 1$, то $\mathcal{H}_1$ в случае общего положения изоморфна алгебре Ли $so(4)$.

При $m = 0$ условие (1.5) всегда выполнено, и мы оказываемся в ситуации, описанной формулой (3.8). Подалгебры, удовлетворяющие условию (1.5) при $m = 1$, мы называем *однородными*. Им посвящен раздел 6.

4. АЛГЕБРА ПЕТЕЛЬ НАД $so(3)$ И КЛАССИЧЕСКИЕ ВОЛЧКИ

В этом разделе мы рассматриваем случай $\mathcal{G}_\lambda = so(3)$. Зафиксируем базис

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в алгебре Ли $so(3)$. Легко видеть, что

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_2.$$

Определим инвариантную формулу на $so(3)$ как

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Скалярное произведение на алгебре петель $\mathcal{G}_\lambda$ задается формулой

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{res}(X, Y), \quad X, Y \in \mathcal{G}_\lambda.$$

Очевидно, что всякая факторизующая подалгебра $\mathcal{G}_+$ содержит единственные элементы вида

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1 + O(1), \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2 + O(1), \qquad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_3 + O(1), \tag{4.1}$$

которые порождают ее как алгебру Ли. Ясно также, что если мы возьмем произвольные ряды (4.1) и породим с их помощью подалгебру Ли $\mathcal{G}_+$, то сумма этой алгебры и алгебры рядов Тейлора совпадает со всей алгеброй петель. Единственная проблема состоит в том, что, вообще говоря, эта сумма не является прямой.

Из инвариантности скалярного произведения $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ следует, что $\mathcal{G}_+^\perp$ является модулем над $\mathcal{G}_+$. Очевидно, что $\mathcal{G}_+^\perp$ содержит единственные элементы вида

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1 + O(1), \qquad \mathbf{R}_2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2 + O(1), \qquad \mathbf{R}_3 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_3 + O(1), \tag{4.2}$$

которые порождают $\mathcal{G}_+^\perp$ как модуль над $\mathcal{G}_+$.

Пример 4.1. Можно проверить, что образующие

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1(1+q\lambda)^{1/2}(1+r\lambda)^{1/2},\\
\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2(1+p\lambda)^{1/2}(1+r\lambda)^{1/2},\\
\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_3(1+p\lambda)^{1/2}(1+q\lambda)^{1/2}
\end{aligned}$$

задают факторизующую подалгебру (см. [4]). Ортогональное дополнение порождается элементами

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1(1+q\lambda)^{-1/2}(1+r\lambda)^{-1/2},\\
\mathbf{R}_2 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2(1+p\lambda)^{-1/2}(1+r\lambda)^{-1/2},\\
\mathbf{R}_3 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_3(1+p\lambda)^{-1/2}(1+q\lambda)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Простейшая орбита задается формулой (3.7) при $n = 1$. Она состоит из операторов вида

$$L = M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2 + M_3\mathbf{R}_3.$$

Функция $H_\lambda = (L, L)$ – многочлен от $\mu = \lambda^{-1}$, коэффициентами которого являются функции

$$\begin{aligned}
H_1 &= \operatorname{res}(\lambda H_\lambda) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2,\\
H_2 &= \operatorname{res}(H_\lambda) = pM_1^2 + qM_2^2 + rM_3^2.
\end{aligned}$$

Поскольку в этом случае алгебра (3.8) изоморфна $so(3)$, эти многочлены коммутируют относительно скобки Пуассона:

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \tag{4.3}$$

где ε_{ijk} – полностью кососимметрический тензор.

Выбирая в качестве A оператор

$$A = \pi_+(L) = M_1\mathbf{E}_1 + M_2\mathbf{E}_2 + M_3\mathbf{E}_3,$$

связанный с гамильтонианом H_2 формулой (2.17), получаем пару Лакса для волчка Эйлера

$$\mathbf{M}_t + \mathbf{M} \times V\mathbf{M} = 0,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Орбита (3.7) при $n = 2$ состоит из операторов вида

$$L = \gamma_1\mathbf{S}_1 + \gamma_2\mathbf{S}_2 + \gamma_3\mathbf{S}_3 + M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2 + M_3\mathbf{R}_3, \tag{4.5}$$

где элементы $\mathbf{S}_i$ находятся из условия сопряженности базисов в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{H}$ (см. раздел 2):

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{R}_3, \mathbf{E}_2] + \frac{1}{2}(q-r)\mathbf{R}_1, \qquad \mathbf{S}_2 = [\mathbf{R}_1, \mathbf{E}_3] + \frac{1}{2}(r-p)\mathbf{R}_2, \qquad \mathbf{S}_3 = [\mathbf{R}_2, \mathbf{E}_1] + \frac{1}{2}(p-q)\mathbf{R}_3.$$

Функция $H_\lambda = (L, L)$ является (с точностью до множителя) многочленом от $\mu = \lambda^{-1}$. Поскольку алгебра (3.8) изоморфна $e(3)$, коэффициенты этого многочлена коммутируют относительно скобки Пуассона:

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}\, M_k, \qquad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\, \gamma_k, \qquad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0. \tag{4.6}$$

Два нетривиальных коэффициента имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + pM_1\gamma_1 + qM_2\gamma_2 + rM_3\gamma_3 + \\ &\quad + \frac{1}{4}(q-r)^2\gamma_1^2 + \frac{1}{4}(p-r)^2\gamma_2^2 + \frac{1}{4}(p-q)^2\gamma_3^2, \\ H_2 &= pM_1^2 + qM_2^2 + rM_3^2 + p(q+r)M_1\gamma_1 + q(p+r)M_2\gamma_2 + r(p+q)M_3\gamma_3 + \\ &\quad + \frac{1}{4}p(q+r)^2\gamma_1^2 + \frac{1}{4}q(p+r)^2\gamma_2^2 + \frac{1}{4}r(p+q)^2\gamma_3^2. \end{aligned}$$

Эта пара коммутирующих квадратичных многочленов определяет интегрируемый случай Стеклова–Ляпунова в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости. Уравнения движения, заданные гамильтонианом H_1, соответствуют оператору A вида

$$A = \pi_+(\lambda L) = M_1\mathbf{E}_1 + M_2\mathbf{E}_2 + M_3\mathbf{E}_3.$$

Поток, заданный гамильтонианом H_2, задается оператором $A = \pi_+(L)$.

ПРИМЕР 4.2. Можно проверить, что образующие

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1\sqrt{1-p\lambda^2}, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2\sqrt{1-q\lambda^2}, \qquad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_3\sqrt{1-r\lambda^2}$$

задают факторизующую подалгебру. Эта подалгебра изотропна относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и поэтому $\mathbf{R}_i = \mathbf{E}_i$. Орбита (3.7) при $n = 2$ состоит из операторов вида (4.5), где

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] \qquad \mathbf{S}_2 = [\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1], \qquad \mathbf{S}_3 = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2].$$

Функция $H_\lambda = (L, L)$ приводит к двум нетривиальным квадратичным многочленам

$$\begin{aligned} H_1 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - (q+r)\gamma_1^2 - (p+r)\gamma_2^2 - (p+q)\gamma_3^2, \\ H_2 &= pM_1^2 + qM_2^2 + rM_3^2 - qr\gamma_1^2 - pr\gamma_2^2 - pq\gamma_3^2. \end{aligned}$$

Эта пара коммутирующих относительно скобки (4.6) квадратичных многочленов задает интегрируемый случай Клебша в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости. Уравнения движения, заданные гамильтонианом H_1, соответствуют оператору $A = \pi_+(\lambda L)$. Поток, соответствующий H_2, задается оператором $A = \pi_+(L)$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & r_1 \\ -r_3 & 0 & r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

– произвольный постоянный элемент $so(3)$. Тогда образующие

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{\lambda} + \nu[R, \mathbf{e}_1] + \frac{1}{2}[R, [R, \mathbf{e}_1]], \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{\lambda} + \nu[R, \mathbf{e}_2] + \frac{1}{2}[R, [R, \mathbf{e}_2]], \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{\lambda} + \nu[R, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{2}[R, [R, \mathbf{e}_3]] \end{aligned}$$

задают факторизующую подалгебру. Образующие ортогонального дополнения задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{\lambda} + \nu[R, \mathbf{e}_1] - \frac{1}{2}[R, [R, \mathbf{e}_1]] - (R, R)\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{\lambda} + \nu[R, \mathbf{e}_2] - \frac{1}{2}[R, [R, \mathbf{e}_2]] - (R, R)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{R}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{\lambda} + \nu[R, \mathbf{e}_3] - \frac{1}{2}[R, [R, \mathbf{e}_3]] - (R, R)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Орбита при $n = 2$ задается формулой (4.5), где

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= [\mathbf{E}_2, \mathbf{R}_3] + \frac{1}{2}(r_2^2 - r_3^2)\mathbf{R}_1, \qquad \mathbf{S}_2 = [\mathbf{E}_3, \mathbf{R}_1] + \frac{1}{2}(r_3^2 - r_1^2)\mathbf{R}_2, \\ \mathbf{S}_3 &= [\mathbf{E}_1, \mathbf{R}_2] + \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\mathbf{R}_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты $H_\lambda = (L, L)$ генерируют два нетривиальных квадратичных многочлена H_1 и H_2, коммутирующих относительно скобки Пуассона (4.6). Нетрудно найти линейную комбинацию H_1 и функций Казимира скобок (4.6), равную квадрату линейного интеграла

$$I = r_1M_1 + r_2M_2 + r_3M_3 + \frac{1}{2}r_1(r_2^2 - r_3^2)\gamma_1 + \frac{1}{2}r_2(r_3^2 - r_1^2)\gamma_2 + \frac{1}{2}r_3(r_1^2 - r_2^2)\gamma_3.$$

Таким образом, факторизующая подалгебра из примера 4.3 приводит к представлению Лакса для интегрируемого случая Кирхгофа в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости.

Факторизующие подалгебры из примеров 4.2, 4.3 инвариантны относительно умножения на λ^{-2}, в то время как подалгебра из примера 4.1 выдерживает умножение на λ^{-1}. Согласно замечанию 2.3 соответствующие потоки гамильтоновы относительно еще одной линейной скобки, задаваемой алгеброй Ли $\mathcal{H} = \mathcal{G}_+/\lambda^{-2}\mathcal{G}_+$, которая в случае общего положения изоморфна $so(4)$. Этот факт объясняет существование найденных Бобенко [9] линейных замен, которые связывают известные интегрируемые случаи на $e(3)$ и $so(4)$.

Как показано в работе [3], всякая факторизующая подалгебра для $so(3)$ приводит к интегрируемому уравнению в частных производных типа уравнения Ландау–Лифшица для одной векторной неизвестной величины $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, где $|\mathbf{s}| = 1$. Оператор L в этом случае имеет вид

$$L = s_1\mathbf{E}_1 + s_2\mathbf{E}_2 + s_3\mathbf{E}_3, \tag{4.8}$$

а оператор A – следующую структуру:

$$A = s_1\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3 + s_2\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_1 + s_3\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 + q_1\mathbf{E}_1 + q_2\mathbf{E}_2 + q_3\mathbf{E}_3, \tag{4.9}$$

где q_i – некоторые (свои для каждой факторизующей подалгебры) дифференциальные многочлены от компонент вектора $\mathbf{s}$. Их явный вид легко определяется из уравнения Лакса (1.3).

Оказывается, что в случае примера 4.2 соотношение (1.3) эквивалентно (с точностью до возможных замен знаков у независимых переменных) уравнению Ландау–Лифшица

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{s} \times \mathbf{s}_{xx} + \mathbf{s} \times V\mathbf{s},$$

где матрица V задана формулой (4.4). Это представление Лакса для уравнения Ландау–Лифшица впервые было найдено в работе [13].

Подалгебра из примера 4.1 приводит к уравнению

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s}_{xx} + \frac{1}{2}(V[\mathbf{s}_x, \mathbf{s}] + [\mathbf{s}_x, \mathbf{s}]V) + \frac{1}{2}[\mathbf{s}, V\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_xV] + [\mathbf{s}_x, V\mathbf{s} + \mathbf{s}V]\right). \tag{4.10}$$

Наконец, подалгебра из примера 4.3 соответствует уравнению

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s}_{xx} + \frac{1}{2}(Z[\mathbf{s}_x, \mathbf{s}] + [\mathbf{s}_x, \mathbf{s}]Z) + \frac{1}{2}[\mathbf{s}, Z\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_xZ] + [\mathbf{s}_x, Z\mathbf{s} + \mathbf{s}Z] + cZ\mathbf{s}\right),$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1r_2 & r_1r_3 \\ r_1r_2 & r_2^2 & r_2r_3 \\ r_1r_3 & r_2r_3 & r_3^2 \end{pmatrix}, \qquad c = \nu^2 + \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{4}.$$

Другими словами, можно сказать, что Z – произвольная матрица ранга 1, а c – произвольная константа. Полученный выше список из трех уравнений совпадает со списком из работы [14], в которой были найдены все уравнения типа Ландау–Лифшица, обладающие высшими законами сохранения.

5. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ

5.1. Обобщение примера 4.1 на случай $so(n)$. Факторизующая подалгебра из примера 4.1 может быть задана формулой

$$\mathcal{U}_+ = (1+\lambda V)^{1/2}\mathcal{U}^{\mathrm{st}}(1+\lambda V)^{1/2}, \tag{5.1}$$

где $\mathcal{U}^{\mathrm{st}}$ обозначает множество всех многочленов по переменной λ^{-1} с коэффициентами из $so(3)$, а матрица V задана формулой (4.4). Нетрудно проверить, что формула (5.1), где V – произвольная диагональная матрица, задает факторизующую подалгебру и в случае $\mathcal{G} = so(n)$. Ортогональное дополнение к $\mathcal{U}_+$ задается формулой

$$\mathcal{U}_+^{\perp} = (1+\lambda V)^{-1/2}\mathcal{U}^{\mathrm{st}}(1+\lambda V)^{-1/2}.$$

Простейшая орбита (3.7), соответствующая $n = 1$, приводит к гамильтонову на $so(n)$ уравнению

$$\mathbf{M}_t = [V, \mathbf{M}^2], \qquad \mathbf{M} \in so(n),$$

с парой Лакса

$$L = (1+\lambda V)^{-1/2}\frac{\mathbf{M}}{\lambda}(1+\lambda V)^{-1/2}, \qquad A = (1+\lambda V)^{1/2}\frac{\mathbf{M}}{\lambda}(1+\lambda V)^{1/2}.$$

Уравнение

$$\mathbf{M}_t = [V, \mathbf{M}^2] + [\mathbf{M}, \mathbf{\Gamma}], \qquad \mathbf{\Gamma}_t = V\mathbf{M}\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}V, \qquad \mathbf{M}, \mathbf{\Gamma} \in so(n),$$

соответствующее орбите с $n = 2$, обладает парой Лакса

$$L = (1+\lambda V)^{-1/2}\left(\frac{\mathbf{M}}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{\lambda}\right)(1+\lambda V)^{-1/2}, \qquad A = (1+\lambda V)^{1/2}\frac{\mathbf{M}}{\lambda}(1+\lambda V)^{1/2}.$$

Его естественно считать $so(n)$-обобщением волчка Стеклова–Ляпунова. Динамические переменные в этом случае образуют пару матриц из $so(n)$, а линейная скобка Пуассона задается алгеброй Ли $so(n) \oplus \epsilon so(n)$, где $\epsilon^2 = 0$.

Для обобщенного уравнения Ландау–Лифшица

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{P}_x + \mathbf{P}V\mathbf{S} - \mathbf{S}V\mathbf{P}, \qquad \mathbf{S}_x = [\mathbf{S}, \mathbf{P}],$$

связанного с подалгеброй (5.1), представление Лакса имеет вид

$$L = (1+\lambda V)^{1/2}\frac{\mathbf{S}}{\lambda}(1+\lambda V)^{1/2}, \qquad A = (1+\lambda V)^{1/2}\left(\frac{\mathbf{S}}{\lambda^2} + \frac{\mathbf{P}}{\lambda}\right)(1+\lambda V)^{1/2}.$$

Для алгебры Ли $so(3)$ на орбите $(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = 1$ имеем $\mathbf{P} = [\mathbf{S}, \mathbf{S}_x] + q\mathbf{S}$, где неизвестная функция q находится из условия $(\mathbf{S}, \mathbf{S}_t) = 0$. В результате (с точностью до замены $t \to -t$) получается уравнение (4.10).

5.2. Пример на алгебре Каца–Муди, связанной с $so(n,m)$. Пусть

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathrm{Mat}_{(n+m)\times(n+m)} \mid A^{\mathrm{T}} = -SAS\},$$

где

$$S = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_m \end{pmatrix}.$$

Ясно, что алгебра Ли $\mathcal{G}$ изоморфна $so(n+m)$. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{U}$ в алгебре петель над $\mathcal{G}$, состоящую из рядов Лорана таких, что коэффициенты при четных (нечетных) степенях λ принадлежат V_1 (V_{-1}). Здесь через $V_{\pm 1}$ обозначены собственные подпространства внутреннего автоморфизма второго порядка $\mathcal{G} \to S\mathcal{G}S^{-1}$, соответствующие собственному значению ± 1. На самом деле это означает, что коэффициенты при четных степенях λ имеют блочную структуру

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix},$$

где $v_1 \in so(n),\ v_2 \in so(m)$, а коэффициенты при нечетных степенях имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ w^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

где $w \in \mathrm{Mat}_{n,m}$.

В качестве невырожденной инвариантной формы на $\mathcal{U}$ выберем $\mathrm{res}(\lambda^{-1}\,\mathrm{tr}(XY))$. Заметим, что в этом случае форма $\mathrm{res}(\mathrm{tr}(XY))$ вырожденна.

Пусть $\mathcal{U}_-$ – множество всех рядов Тейлора, принадлежащих $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{U}_+ = (1+\lambda r)^{1/2}\mathcal{U}^{\mathrm{st}}(1+\lambda r)^{1/2},$$

где $\mathcal{U}^{\mathrm{st}}$ – множество всех многочленов по переменной λ^{-1} из $\mathcal{U}$, а r – произвольная постоянная матрица вида

$$r = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ -r_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Подобный выбор факторизующей подалгебры является естественным обобщением ситуации из примера 2.1 на случай, когда структура коэффициентов рядов из $\mathcal{U}$ определена дополнительным автоморфизмом второго порядка.

Пусть $I_- = \lambda^2\mathcal{U}_-$, а

$$I_+ = \left\{(1+\lambda r)^{1/2}\sum_{i=2}^{k} q_i\lambda^{-i}(1+\lambda r)^{1/2}\right\}.$$

Тогда орбита (2.4) состоит из элементов вида

$$L = (1+\lambda r)^{-1/2}(\lambda^{-1}w + v + \lambda u)(1+\lambda r)^{-1/2}. \tag{5.2}$$

Соответствующее уравнение Лакса

$$L_t = [\pi_+(L), L] \tag{5.3}$$

эквивалентно системе уравнений

$$w_t = [w, wr + rw - v], \qquad v_t = [u, w] + vwr - rwv, \qquad u_t = uwr - rwu. \tag{5.4}$$

Легко видеть, что эта система допускает редукцию

$$u = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ r_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

которая эквивалентна модели, найденной в работе [8]. В случае $r = 0$ система и ее представление Лакса рассматривались в статье [15].

Рассмотрим случай $so(3,2)$ более детально. Матрицы u и r без ограничения общности можно выбрать в виде

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где $a_1 k_2 = a_2 k_1$. Рассмотрим частный случай $k_2 = k_1 = k$, $a_2 = a_1 = a$, который замечателен тем, что соответствующий гамильтониан допускает дополнительную гамильтонову редукцию (см. [12]). Оператор L в этом случае задается формулой (5.2), где

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

и, как показывают простые вычисления,

$$v = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 & 0 & 0 \\ M_3 & 0 & -M_1 & 0 & 0 \\ -M_2 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_4 + k(\gamma_2 - \delta_1) \\ 0 & 0 & 0 & -M_4 - k(\gamma_2 - \delta_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Среди спектральных инвариантов имеется интеграл $(M_4 - M_3)^2$. Редукция, о которой говорилось выше, состоит в том, что мы фиксируем его значение: $M_4 - M_3 = z$. Отметим, что для того чтобы динамика, заданная уравнением Лакса (1.4), была согласована с редукцией, к оператору $A = \pi_+(L)$ нужно добавить подходящую кососимметрическую матрицу (ср. с [12]).

Можно проверить, что после редукции $\operatorname{tr} L^2$ приводит к гамильтониану (см. [8])

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2k(M_3\gamma_2 - M_2\gamma_3) + 2k(M_1\delta_3 - M_3\delta_1) - 2a\gamma_1 - 2a\delta_2 + 2zM_3,$$

в то время как $\operatorname{tr} L^4$ дает два интеграла четвертой степени, обеспечивающих интегрируемость по Лиувиллю этого гамильтониана. Дальнейшая редукция $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ приводит к интегрируемому случаю в задаче Кирхгофа, найденному в работе [6]. Скобка Пуассона для этой редукции соответствует алгебре Ли $e(3)$ (см. формулу (4.6)).

Одно из возможных интегрируемых обобщений этого редуцированного гамильтониана на семейство скобок

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \qquad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \qquad \{\gamma_i, \gamma_j\} = \kappa\varepsilon_{ijk}M_k \tag{5.7}$$

было предложено в работе [16]. Оказывается, что оператор Лакса для этой модели может быть выбран в виде

$$L = R^{-1/2}(\lambda^{-1}w + v + \lambda u)R^{-1/2}, \tag{5.8}$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k_1\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1\lambda & 0 & 0 & 1-\kappa\lambda^{-2} & 0 \\ 0 & -k_2\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметр κ из скобок Пуассона (5.7) связан с k_1, k_2 формулой

$$\kappa = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_2^4}.$$

Матрица u задана формулой (5.5), где $a_1k_2 = a_2k_1$. Матрица w определяется формулой (5.6) с $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Наконец, матрица v имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 & 0 & 0 \\ M_3 & 0 & -M_1 & 0 & 0 \\ -M_2 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau M_3 + k_2\gamma_2 + z \\ 0 & 0 & 0 & -\tau M_3 - k_2\gamma_2 - z & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tau = k_1/k_2$. Спектральные инварианты оператора L коммутируют относительно скобки (5.7). Одним из них является гамильтониан

$$H = \tau^2 M_1^2 + M_2^2 + 2\tau^2 M_3^2 + 2k_1(M_3\gamma_2 - M_2\gamma_3) - 2a_1\gamma_1 + 2\tau z M_3.$$

В случае $\tau = 1$ скобка Пуассона соответствует алгебре $e(3)$, и оператор L совпадает с описанным выше. В общем случае алгебраическая природа матрицы R остается загадочной (ср. с [17]).

Явные формулы для других интегрируемых деформаций моделей из работы [15] можно найти в работах [8], [18]. Однако представления Лакса, указанные в этих работах, менее изящны и алгебраичны, чем (5.2). Несмотря на то что они выглядят похоже на (5.2), матрица r в них является переменной.

6. ОДНОРОДНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

Для того чтобы эффективно описать конечномерные орбиты, соответствующие факторизующей подалгебре $\mathcal{G}_+$, необходимо явно найти подпространство $\mathcal{G}_+^\perp$. Это легко можно сделать в случае, когда $\mathcal{G}_+$ – однородная подалгебра [4].

Факторизующая подалгебра $\mathcal{G}_+$ называется *однородной*, если она удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}_+. \tag{6.1}$$

Примеры однородных подалгебр можно найти в работе [4].

Пусть $A(\lambda)$ – формальный ряд вида

$$A = E + R\lambda + S\lambda^2 + \cdots, \tag{6.2}$$

где коэффициенты $R, S, \ldots$ являются постоянными линейными операторами из $\mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$, E – тождественный оператор.

Теорема 6.1 (см. [4]). 1. *Любая однородная подалгебра $\mathcal{G}_+$ может быть представлена в виде*

$$\mathcal{G}_+ = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda^{-i} A(g_i) \;\middle|\; g_i \in \mathcal{G}, \quad k \in \mathbb{N} \right\}, \tag{6.3}$$

где $A(\lambda)$ – некоторый формальный ряд вида (6.2).

2. *Пространство $\mathcal{G}_+$ является подалгеброй, если и только если для любых $X, Y \in \mathcal{G}$ выполнено тождество*

$$[A(X), A(Y)] = A([X, Y] + \lambda[X, Y]_1), \tag{6.4}$$

где $[\cdot, \cdot]_1$ – некоторая скобка Ли, согласованная со скобкой $[\cdot, \cdot]$.

3. *Для всякой однородной подалгебры скобка $[\cdot, \cdot]_1$ задается формулой*

$$[X, Y]_1 = [R(X), Y] + [X, R(Y)] - R([X, Y]), \tag{6.5}$$

где R – соответствующий коэффициент ряда (6.2).

Напомним, что согласованность двух скобок означает, что их произвольная линейная комбинация является скобкой Ли.

Для всех однородных подалгебр $\mathcal{G}_+$ ортогональное дополнение $\mathcal{G}_+^\perp$ вычисляется с помощью одной и той же формулы.

Теорема 6.2. *Пусть $\mathcal{G}_+$ – однородная подалгебра. Тогда*

$$\mathcal{G}_+^\perp = (A^{-1})^{\mathrm{T}}(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}), \tag{6.6}$$

где A – ряд (6.2), *задающий нашу однородную подалгебру с помощью формулы* (6.3), *стандартная факторизующая подалгебра $\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}$ определена формулой* (3.4) *и* T *означает транспонирование относительно скалярного произведения* (3.1).

Доказательство. Согласно формуле (6.3) имеем $\mathcal{G}_+ = A(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}})$. Поэтому

$$\langle A(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}), (A^{-1})^{\mathrm{T}}(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}})\rangle = \langle \mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}, \mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}\rangle = 0,$$

т.е. $\mathcal{G}_+^{\perp} \supset (A^{-1})^{\mathrm{T}}(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}})$. С другой стороны, если $g \in \mathcal{G}_+^{\perp}$, то $\langle A(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}), g\rangle = 0$. Отсюда $A^{\mathrm{T}}(g) \in (\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}})^{\perp} = \mathcal{G}_+^{\mathrm{st}}$ или $g \in (A^{-1})^{\mathrm{T}}(\mathcal{G}_+^{\mathrm{st}})$.

6.1. Орбиты в случае однородных подалгебр. Следующее утверждение удобно использовать для нахождения явной формы уравнений Лакса, соответствующих однородным подалгебрам.

Предложение 6.1. *Предположим, что A удовлетворяет соотношению* (6.4). *Тогда выполнено следующее тождество*:

$$[A(X), (A^{-1})^{\mathrm{T}}(Y)] = (A^{-1})^{\mathrm{T}}([X,Y] + \lambda X * Y). \tag{6.7}$$

Здесь для любых $X, Y \in \mathcal{G}$

$$X * Y = [R(X), Y] - [X, R^{\mathrm{T}}(Y)] + R^{\mathrm{T}}([X,Y]), \tag{6.8}$$

где R – коэффициент ряда (6.2), T *означает транспонирование относительно инвариантной формы на $\mathcal{G}$.*

Для доказательства тождества (6.7) достаточно скалярно умножить обе его части на $A(Z)$ и преобразовать левую часть, используя инвариантность скалярного произведения $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и тождество (6.4).

Отметим, что

$$X * Y = -(\mathrm{ad}_1 X)^{\mathrm{T}}(Y),$$

где $\mathrm{ad}_1 X(Y) = [X,Y]_1$, а скобка $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_1$ задана формулой (6.5). Другими словами, оператор $-(\mathrm{ad}_1 X)^{\mathrm{T}}$ задает копприсоединенное действие алгебры Ли со скобкой $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_1$ на алгебре Ли со скобкой $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$.

Всякий элемент орбиты

$$\mathcal{O} = \lambda^{-1}\mathcal{G}_- \cap \lambda^2 \mathcal{G}_+^{\perp},$$

соответствующей однородной подалгебре (6.3), имеет вид

$$L = (A^{-1})^{\mathrm{T}}(\lambda u + v + \lambda^{-1} w).$$

Легко видеть, что $\pi_+(L) = A(\lambda^{-1} w)$.

Используя тождество (6.7), можно проверить, что уравнение Лакса (5.3), записанное покомпонентно, имеет вид

$$w_t = [w,v] + w * w, \qquad v_t = [w,u] + w * v, \qquad u_t = w * u. \tag{6.9}$$

Вернемся к примеру 2.1.В ситуации примера 2.1 A – оператор умножения справа на $1 + \lambda r$, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ – оператор умножения слева на $(1+\lambda r)^{-1}$, и элемент орбиты имеет вид

$$L = (1 + \lambda r)^{-1}(\lambda u + v + \lambda^{-1} w). \tag{6.10}$$

Формула (6.8) выглядит как $X*Y = rXY - YXr$. Записанное в компонентах уравнение Лакса (5.3) эквивалентно системе

$$w_t = [w, wr + rw - v], \qquad v_t = [u, w] + vwr - rwv, \qquad u_t = uwr - rwu. \tag{6.11}$$

Отметим, что уравнение Лакса эквивалентно триаде Лакса

$$P_t = P\lambda^{-1}w(1 + \lambda r) - (1 + \lambda r)\lambda^{-1}wP, \tag{6.12}$$

где $P = \lambda u + v + \lambda^{-1}w$.

Предположим, что в алгебре $\mathcal{A}$ задана инволюция $*$[1)]. Тогда система (6.11) допускает две следующие редукции:

1) r симметричен, а u, v, w кососимметричны относительно $*$;

2) r и v кососимметричены, а u и w симметричны.

В качестве примера такой редукции можно рассмотреть случай $u, v, w \in so(3)$, $r = \operatorname{diag}(r_1, r_2, r_3)$.

Другой класс редукций системы (6.11) задается условием $u = \text{const}$. Из (6.11) следует, что в этом случае тождество $uwr - rwu = 0$ должно выполняться для всех w. Тривиальная редукция $u = \text{const} \cdot r$ сдвигом v сводится к случаю $u = 0$. Однако существуют и нетривиальные матричные редукции.

Предположим, что элементы r, w и v имеют следующую матричную блочную структуру:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 & w_1 \\ w_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, выбирая

$$u = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ -r_2 & 0 \end{pmatrix},$$

мы получаем самосогласованную редукцию системы (6.11). Возможна дальнейшая редукция

$$v_1^{\mathrm{T}} = -v_1, \qquad v_2^{\mathrm{T}} = -v_2, \qquad w_2 = w_1^{\mathrm{T}}, \qquad r_2 = -r_1^{\mathrm{T}},$$

где T – матричное транспонирование. Последняя редукция и соответствующие гамильтоновы структуры описаны в разделе 5.

6.2. Группы редукций и однородные подалгебры. Примеры однородных подалгебр можно строить исходя из так называемых групп редукций [11]. Пусть T – конечная подгруппа в группе дробно-линейных преобразований параметра λ. Без ограничения общности будем считать, что ни один элемент T, кроме единицы, не сохраняет точку $\lambda = \infty$.

Рассмотрим векторное подпространство $\overline{\mathcal{G}}$ в алгебре петель $\mathcal{G}_\lambda$, состоящее из элементов вида

$$a = \sum_{n=0}^{m} \sum_{t \in T} q_{n,t} t(\lambda^{-n}), \qquad q_{n,t} \in \mathcal{G}, \quad m \in N. \tag{6.13}$$

Определим $\mathcal{G}_+$ как множество всех неподвижных элементов $\overline{\mathcal{G}}$ относительно действия группы T. Ясно, что множество разложений в ряд Лорана в точке $\lambda = 0$ элементов из $\mathcal{G}_+$ является подалгеброй в $\mathcal{G}_\lambda$. Ее мы также будем обозначать через $\mathcal{G}_+$.

[1)] Т.е. $(ab)^* = b^*a^*$ и $(a^*)^* = a$.

Предложение 6.2. *Пусть T действует на алгебре Ли $\mathcal{G}$ без неподвижных ненулевых элементов. Тогда подалгебра $\mathcal{G}_+$ является факторизующей подалгеброй в алгебре петель $\mathcal{G}_\lambda$, дополнительной к подалгебре рядов Тейлора $\mathcal{G}_-$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент

$$Z_q = \sum_{t\in T} t(q\lambda^{-n}).$$

Ясно, что он принадлежит $\mathcal{G}_+$ и имеет разложение в ряд Лорана вида $Z_q = q\lambda^{-n} + o(1)$. Таким образом, $\mathcal{G}_+$ содержит ряды с любой главной частью, и поэтому $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_-$. Остается доказать, что $\mathcal{G}_+ \cap \mathcal{G}_- = \{0\}$. Пусть $a \in \mathcal{G}_+ \cap \mathcal{G}_-$ и содержит слагаемое вида $qt(\lambda^{-n}),\ q \neq 0,\ n > 0$, в разложении (6.13). Поскольку $a \in \mathcal{G}_+$, имеем $a = t^{-1}(a)$. Поэтому a содержит слагаемое $t^{-1}(q)\lambda^{-n}$ и по этой причине не лежит в алгебре рядов Тейлора $\mathcal{G}_-$. Предположим теперь, что $a \in \mathcal{G}_+ \cap \mathcal{G}_-$ и не зависит от λ (т.е. $a \in \mathcal{G}$). Тогда a – неподвижный элемент из $\mathcal{G}$ относительно действия группы T, и по условию $a = 0$.

Определим $\bar\lambda$ формулой

$$\bar\lambda^{-1} = \sum_{t\in T} t(\lambda^{-1}). \tag{6.14}$$

Функция $\bar\lambda$ инвариантна относительно действия группы T, и поэтому

$$\bar\lambda^{-1}\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}_+. \tag{6.15}$$

Легко показать, что замена параметра

$$\lambda \to \lambda + k_2\lambda^2 + k_3\lambda^3 + \cdots \tag{6.16}$$

переводит всякую однородную подалгебру снова в однородную подалгебру. Две подалгебры, связанные такой заменой, можно рассматривать как эквивалентные.

Легко видеть, что $\bar\lambda = \lambda + o(\lambda)$. Таким образом, формула (6.14) задает замену вида (6.16). Из (6.15) вытекает, что $\mathcal{G}_+$ эквивалентна однородной подалгебре.

Пример 6.1. Рассмотрим коммутативную группу $T = Z_2 \times Z_2$, состоящую из элементов 1, t_1, t_2 и $t_3 = t_1t_2$. Определим действие T на алгебре Ли $so(3)$ с помощью сопряжений диагональными ортогональными матрицами

$$\operatorname{diag}(1,1,1),\quad \operatorname{diag}(-1,-1,1),\quad \operatorname{diag}(-1,1,-1),\quad \operatorname{diag}(1,-1,-1).$$

Рассмотрим следующее вложение группы T в группу дробно-линейных преобразований. Пусть

$$s_1(\lambda) = -\lambda,\qquad s_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda},\qquad s_3(\lambda) = -\frac{1}{\lambda},\qquad \tau(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}.$$

Тогда элементы группы T отождествляются с преобразованиями $t_i = \tau^{-1}\circ s_i \circ \tau$. Условие $t_i(\infty) \neq \infty$ эквивалентно тому, что $ac \neq 0$ и $a^4 \neq c^4$. Образующие (4.1) подалгебры $\mathcal{G}_+$ имеют вид

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\lambda} + \sum_{i=1}^{3} t_i\left(\frac{\mathbf{e}_1}{\lambda}\right),\qquad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{\lambda} + \sum_{i=1}^{3} t_i\left(\frac{\mathbf{e}_2}{\lambda}\right),\qquad \mathbf{E}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{\lambda} + \sum_{i=1}^{3} t_i\left(\frac{\mathbf{e}_3}{\lambda}\right).$$

Замена вида (6.16), заданная формулой

$$\bar{\lambda}^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \sum_{i=1}^{3} t_i \left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

превращает подалгебру в однородную.

Благодарности. Авторы благодарны В. Г. Дринфельду, А. В. Михайлову и М. А. Семенову-Тян-Шанскому за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана грантами РФФИ № 02-01-00431 и НШ № 1716.2003.1.

Список литературы

[1] *И. В. Чередник.* Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. № 3. С. 36–52.
[2] *А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 3. С. 1–29.
[3] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 2. С. 248–255.
[4] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 3. С. 9–19.
[5] *В. В. Соколов.* Докл. РАН. 2004. Т. 397. № 3. С. 321–324.
[6] *В. В. Соколов.* ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С. 31–37.
[7] *V. V. Sokolov A Generalized Kowalevski Top: new integrable cases on* $e(3)$ *and* $so(4)$. In: Kowalevski Property. CRM Proceedings and Lecture Notes. V. 32. Ed. V. Kuznetsov. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2002. P. 307–313.
[8] *В. В. Соколов, А. В. Цыганов.* ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 118–125.
[9] *А. И. Бобенко.* Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 1. С. 64–66.
[10] *А. В. Болсинов, А. В. Борисов.* Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 1. С. 11–34.
[11] *A. V. Mikhailov.* The reduction problem and the inverse scattering method. In: Solitons. Topics in Current Physics. V. 17. Eds. R. Bullough, P. Caudrey. New York: Springer, 1980. P. 243–285.
[12] *А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский.* Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Ижевск: РХД, 2003.
[13] *Е. К. Склянин.* О полной интегрируемости уравнения Ландау–Лифшица. Препринт ЛОМИ Е-3. Л.: ЛОМИ, 1979.
[14] *A. V. Mikhailov, A. B. Shabat.* Phys. Lett. A. 1986. V. 116. P. 191–194.
[15] *A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 321–354.
[16] *А. В. Борисов, С. И. Мамаев, В. В. Соколов.* Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 5. С. 614–615.
[17] *I. V. Komarov, V. V. Sokolov, A. V. Tsiganov.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 8035–8047.
[18] *А. В. Цыганов.* ТМФ. 2004. Т. 141. № 1. С. 24–37.

Поступила в редакцию 12.I.2004 г.,
после доработки 4.III.2004 г.