В. Э. Зверович, Характеризация доминантно-совершенных графов, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 66–69

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ДОМИНАНТНО-СОВЕРШЕННЫЕ ГРАФЫ

В. Э. Зверович

Доминирование и независимость в графах имеют многочисленные приложения и широко изучаются (см., например, [1—5]). Одно из направлений исследований связано с числами доминирования $\beta(G)$ и независимого доминирования $i(G)$. Самнер и Мур [6] определили класс доминантно-совершенных графов, т. е. графов, у которых $\beta(H) = i(H)$ для каждого индуцированного подграфа H. Задача характеризации таких графов тесно связана с еще одной открытой проблемой: описание графов, для которых $\beta(G) = i(G)$ (проблема 1 (b) в обзоре [4]).

В работе полностью охарактеризованы доминантно-совершенные графы (теорема 1), что завершает исследования Хедетниеми, Митчела, Алана, Ласкара, Валикара [4, 7, 8] по этому вопросу. Кроме того, теорема 1 расширяет все известные результаты по упомянутой выше проблеме из [4]. В теореме 2 усилен результат Боллобаша и Кокейна [9], который является обобщением теоремы Алана и Ласкара [7] о доминантно-совершенных графах.

Все рассматриваемые графы конечные, неориентированные, без петель и кратных ребер. Неопределяемые понятия имеются в [10]. Для графа $G = (VG, EG)$ введем следующие обозначения: $\beta(G)$ — число доминирования (мощность наименьшего доминирующего множества); $i(G)$ — число независимого доминирования (наименьшее число вершин в максимальном независимом множестве); $N(X)$ — окрестность множества $X \subseteq VG$; $\langle X \rangle$ — подграф графа G, индуцированный множеством $X \subseteq VG$; запись $u \sim v$ $(u \nsim v)$ означает, что $uv \in EG$ $(uv \notin EG)$.

Нам понадобятся следующие результаты Оре и Бержа.

Предложение 1 [5]. *Доминирующее множество D является минимальным, если и только если для любой вершины $u \in D$ либо $N(u) \cap D = \varnothing$, либо существует $v \notin D$ такая, что $N(v) \cap D = \{u\}$.*

Предложение 2 [2]. *Независимое доминирующее множество является одновременно минимальным доминирующим и максимальным независимым. Обратно, максимальное независимое множество является независимым доминирующим множеством.*

ТЕОРЕМА 1. *Граф G является доминантно-совершенным, если и только если G не содержит в качестве индуцированных подграфов графов $G_1 - G_4$ на рис. 1.*

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку $\beta(G_k) = 2$, $i(G_k) = 3$, $k = \overline{1, 4}$.

Достаточность. Пусть G не содержит индуцированных $G_1 - G_4$. Предположим, $\beta(G) < i(G)$. Среди всех наименьших доминирующих множеств выберем минимальное по числу ребер

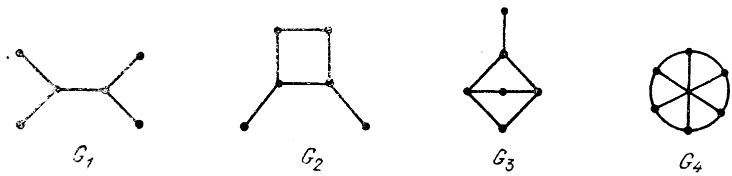

Рис. 1

в графе $\langle D \rangle$ множество $D \subseteq VG$. Так как $|D| = \beta(G) < i(G)$ и D доминирует в G, то по предложению 2 множество D зависимое существуют $u, v \in D$, $u \sim v$. Рассмотрим множества $N^*(u) = N(u) \setminus (N(D \setminus \{u\}) \cup D)$ и $N^*(v) = N(v) \setminus (N(D \setminus \{v\}) \cup D)$. По предложению 1 $N^*(u) \neq \varnothing$ и $N^*(v) \neq \varnothing$. Допустим, граф $\langle N^*(u) \rangle$ содержит доминирующую вершину u^*. Тогда множество $D^* = (D \setminus \{u\}) \cup \{u^*\}$ доминирует в G, $|D^*| = \beta(G)$ и граф $\langle D^* \rangle$ содержит меньше ребер, чем $\langle D \rangle$ — противоречие. Следовательно,

$$\beta(\langle N^*(u) \rangle) \geqslant 2, \tag{1}$$

$$\beta(\langle N^*(v) \rangle) \geqslant 2. \tag{2}$$

Предположим теперь, что $xy \in EG$ для любых $x \in N^*(u)$, $y \in N^*(v)$. В силу (1), (2) существуют $u', u'' \in N^*(u)$, $u' \nsim u''$ и $v', v'' \in N^*(v)$, $v' \nsim v''$. Тогда $\langle \{u, u', u'', v, v', v''\} \rangle \simeq G_4$ — противоречие. Следовательно, найдутся $u_1 \in N^*(u)$, $v_1 \in N^*(v)$, $u_1 \nsim v_1$. Если множество $\{u_1, v_1\}$ доминирует в графе $\langle N^*(u) \cup N^*(v) \rangle$, то $D' = (D \setminus \{u, v\}) \cup \{u_1, v_1\}$ доминирует в G, $|D'| = \beta(G)$ и $|E\langle D' \rangle| < |E\langle D \rangle|$, что невозможно. Поэтому $\{u_1, v_1\}$ не доминирует в $\langle N^*(u) \cup N^*(v) \rangle$, т. е. найдется $u_2 \in N^*(u) \cup N^*(v)$, для которой $u_2 \nsim u_1$ и $u_2 \nsim v_1$. Не ограничивая общности считаем, что $u_2 \in N^*(u)$. Из (2) следует, что существует $v_2 \in N^*(v)$, $v_2 \nsim v_1$. Рассмотрим граф $G^* = \langle \{u, u_1, u_2, v, v_1, v_2\} \rangle$. Его структура изображена на рис. 2, где пунктирными линиями отмечены ребра, не содержащиеся в EG^* (ребра uv_1, uv_2, vu_1, vu_2 отсутствуют по построению множеств $N^*(u)$ и $N^*(v)$). Легко видеть, что любая комбинация ребер u_1v_2 и u_2v_2 дает один из графов $G_1 - G_3$. Полученное противоречие доказывает равенство $\beta(G) = i(G)$. Поскольку свойство не содержать индуцированных подграфов наследственное, то $\beta(H) = i(H)$

для любого индуцированного подграфа H графа G. Теорема доказана.

Следствие 1 [7]. *Если G не содержит индуцированного $K_{1,3}$, то $\beta(G) = i(G)$ и граф G — доминантно-совершенный.*

Поскольку реберные графы не содержат индуцированного $K_{1,3}$ (см. [10]), то они являются доминантно-совершенными [7, 8].

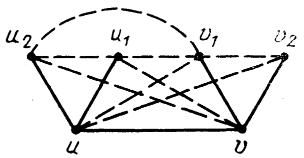

Рис. 2

С использованием теоремы Хамады и Ёшимуры [11] легко получить

Следствие 2 [4]. $\beta(M(G)) = i(M(G))$, *где* $M(G)$ — *срединный граф графа* G [4].

Следствие 3. *Любой граф G гомеоморфен некоторому графу $\tilde{G}$, для которого $\beta(\tilde{G}) = i(\tilde{G})$.*

Для доказательства достаточно один раз подразбить каждое ребро графа G и применить теорему 1.

Заметим, что свойство $\beta(G) = i(G)$ не является наследственным, поэтому графы, удовлетворяющие этому равенству, не могут быть охарактеризованы в терминах запрещенных подграфов.

Пусть $T(r, l)$ — дерево, полученное из графов $K_{1,r}$ и $K_{1,l}$ соединением их доминирующих вершин. Обозначим через Q_k семейство всех двудольных графов $G_{k,k}$, содержащих остовное дерево $T(k-1, k-1)$. Результат Алана и Ласкара (следствие 1) был обобщен Боллобашем и Кокейном [9]: *если граф D не содержит индуцированного $K_{1,k}$ $(k \geqslant 3)$, то*

$$i(G) \leqslant \beta(G)(k-2) - (k-3). \tag{3}$$

Оказывается, (3) верно в более широком классе графов.

ТЕОРЕМА 2 [1]. *Если G не содержит ни одного индуцированного подграфа из семейства $\mathcal{Q}_k$ $(k \geqslant 3)$, то выполняется* (3).

В некоторых случаях теорема 2 оказывается гораздо эффективнее теоремы Боллобаша и Кокейна. Например, для графа $G = T(p-4, 2)$ порядка $p \geqslant 6$ эти результаты дают соответственно оценки $\beta(G) > (i(G) - 1)/2$ и $\beta(G) > (i(G) - 1)/(p-4)$.

Доказательство теоремы 2. Предположим, $i(G) > \beta(G)(k-2) - (k-3)$. Для доминирующего множества $D \subseteq VG$ введем обозначения: $D^* \subseteq D$ — все неизолированные вершины графа $\langle D \rangle$; для $v \in D$ определим $N(D, v) = N(v) \setminus (N(D \setminus \{v\}) \cup D)$.

Выберем наименьшее доминирующее множество D_1 в G, $|D_1| = \beta(G)$. Будем строить последовательность доминирующих множеств $D_1, D_2, D_3, \ldots$ графа G по правилу: если имеется доминирующее множество D_j, причем $D_j^* \neq \varnothing$ и существует вершина $v_j \in D_j^*$ такая, что $i(\langle N(D_j, v_j) \rangle) \leqslant k-2$, тогда строим доминирующее множество $D_{j+1} = (D_j \setminus \{v_j\}) \cup I_j$, где I_j — максимальное независимое множество графа $\langle N(D_j, v_j) \rangle$ мощности $|I_j| \leqslant k-2$. Заметим, что D_{j+1} действительно доминирует в G,

[1]) Доказана независимо И. Э. Зверовичем.

поскольку по предложению 2 I_j доминирует в $\langle N(D_j, v_j)\rangle$. Так как доминирующее множество D_j $(j \geqslant 2)$ не обязательно минимально, то возможно $N(D_j, v_j) = \varnothing$. Положим тогда $i(\langle N(D_j, v_j)\rangle) = 0$, $I_j = \varnothing$.

Поскольку $|D_j^*| > |D_{j+1}^*|$, то процесс построения последовательности $D_1, D_2, D_3, \ldots$ прервется на некотором доминирующем множестве D_n, где $n \leqslant \beta(G)$. Предположим, множество D_n независимое $(D_n^* = \varnothing)$. По предложению 2 D_n — максимальное независимое множество. Тогда при $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned} i(G) \leqslant |D_n| = \beta(G) + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} |I_j| - (n-1) \leqslant \\ \{\, |I_j| \leqslant k-2\} \\ \leqslant \beta(G) + (k-3)(n-1) \leqslant \{k \geqslant 3;\ n \leqslant \beta(G)\} \\ \leqslant \beta(G)(k-2) - (k-3) < \{\text{по предположению}\} \\ < i(G) - \text{противоречие.} \end{aligned}$$

В случае $n = 1$ имеем $i(G) \leqslant |D_1| = \beta(G) < (i(G) - 1)/(k-2) + 1$ — противоречие $(k \geqslant 3)$.

Таким образом, множество D_n зависимое: найдутся $u_1, u_2 \in D_n^*$ такие, что $u_1 \sim u_2$ и $i(\langle N(D_n, u_j)\rangle) \geqslant k-1$ $(j = 1, 2)$. Рассмотрим независимые множества S_1 и S_2 мощности $k-1$ графов $\langle N(D_n, u_1)\rangle$ и $\langle N(D_n, u_2)\rangle$ соответственно.Очевидно, что граф $G^* = \langle\{u_1, u_2\} \cup S_1 \cup S_2\rangle \in Q_k$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило
04.04.88
Переработанный вариант
15.03.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Berge C. Theory of graphs and its applications. London: Methuen, 1962.
[2] Berge C. Graphs and hypergraphs. Amsterdam: North-Holland, 1973.
[3] Cockayne E. J., Hedetniemi S. T. Towards a theory of domination in graphs // Networks. 1977. V. 7, N 3. P. 247—261.
[4] Laskar R., Walikar H. B. On dominaton related concepts in graph theory // Lect. Notes in Math. 1981. V. 885. P. 308—320.
[5] Ore O. Theory of graphs // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Providence, 1962.
[6] Sumner D., Moore J. I. Jr. Notices // Amer. Math. Soc. Oct. A. 1979. V. 569.
[7] Allan R. B., Laskar R. On domination and independent domination numbers of a graph // Discr. Math. 1978. V. 23, N 2. P. 73—76.
[8] Hedetniemi S. T., Mitchel S. Independent domination in trees // Proc. 8-th South-East. Conf. on Combin. Graph Theory and Comput., 1977. P. 489—509.
[9] Bollobás B., Cockayne E. J. Graph-theoretic parameters concerning domination, independence and irredundance // J. Graph Theory. 1979. V. 3, N 3. P. 241—249.
[10] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
[11] Hamada T., Yoshimura I. Traversability and connectivity of the middle graph of graph // Discr. Math. 1976. V. 14. P. 247—255.