МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

НАИЛУЧШАЯ КУСОЧНО МОНОТОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ИНДИКАТРИСА БАНАХА

Е. А. Севастьянов

Обозначения. $M_n(f)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — наименьшие равномерные уклонения непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, от кусочно монотонных (к.м.) функций порядка $\leqslant n$, т. е. функций, минимальное число участков монотонности которых не превосходит n

$$M_0(f) = (\max f - \min f)/2 = \Omega(f)/2.$$

$R_n(f)$, $n = 0, 1, \ldots,$ — наименьшие равномерные уклонения функции f ($f \in C[a, b]$) от рациональных функций порядка $\leqslant n$.

$N_f(y)$, $-\infty < y < \infty$, — индикатриса Банаха (функция кратности) функции f, т. е. число корней уравнения $f(x) = y$ ($0 \leqslant N_f(y) \leqslant \infty$).

Для измеримой функции $F(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$, через $F^*(\xi) = (F(\cdot))^*(\xi)$ обозначим убывающую перестановку функции $F(y)$. Функция $F^*(\xi)$ определяется на $(0, \beta - \alpha)$ двумя условиями: (1) $F^*(\xi)$ не возрастает, (2) $F^*(\xi)$ равноизмерима с $F(y)$, т. е. $\operatorname{mes}\{\xi: F^*(\xi) > \lambda\} = \operatorname{mes}\{y: F(y) > \lambda\}$ для любого действительного λ (доказательство существования $F^*(\xi)$ см., например, в [1, стр. 332]).

Через $V_\Phi(f)$ обозначим Φ-вариацию функции f на $[a, b]$ относительно непрерывной, неубывающей, выпуклой книзу на $[0, \infty)$ функции $\Phi(u)$, $\Phi(0) = 0$:

$$V_\Phi(f) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right|\right)\right\},$$

где верхняя грань берется по всем $x_k \in [a, b]$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и всем $n = 1, 2, \ldots$ (это определение принадлежит Л. Юнг; при $\Phi(u) = u^p$, $p \geqslant 1$, получаем определение p-вариации $V_p(f)$, принадлежащее Н. Винеру и при $p = 1$ совпадающее с определением вариации $\operatorname{Var} f$ К. Жордана).

Напомним, что для любой функции $f \in C[a, b]$ имеем

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n(f) = \operatorname{Var} f = \int_{\min f}^{\max f} N_f(y)\, dy \tag{1}$$

(первое равенство доказано в [2], второе — известная теорема С. Банаха [3]). Ниже (теоремы 1 и 2) устанавливаются более общие соотношения между уклонениями $M_n(f)$ и функцией $N_f(y)$ (включающие (1) как частный случай). Как следствие одного из них (теорема 2), получаем, что *условие*

$$\sum n^{p-1} M_n(f) < \infty \tag{2}$$

при $0 < p \leqslant 1$ *является необходимым, а при* $1 \leqslant p < \infty$ *достаточным для того, чтобы* $N_f \in L^p$; *при* $1 \leqslant p < \infty$ *условие* (2) *как достаточное тем более имеет место, если в нем* $M_n(f)$ *заменить на* $R_n(f)$. Тем самым для больших ($p > 1$) скоростей убывания уклонений $M_n(f)$ и $R_n(f)$ указывается некоторое необходимое глобальное свойство (именно, степень суммируемости индикатрисы $N_f(y)$), которое позволяет различать между собой уже функции ограниченной вариации (см. (1)).

Приведем здесь также

Следствие из теоремы 1. *При* $p \geqslant 1$ *имеем*

$$V_p(f) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (2M_n(f))^p \leqslant \int_0^{\Omega(f)} \xi^{p-1} N_f^*(\xi)\, d\xi;$$

при $0 < p \leqslant 1$ *имеет место правое из неравенств с заменой знака* $\leqslant$ *на* $\geqslant$.

Основные результаты настоящей заметки содержатся в диссертации автора [4]. Их доказательства существенно используют свойства к.м. функций наилучшего приближения и некоторые неравенства для равноизмеримых перестановок функций, к установлению которых мы и переходим.

§ 1. Леммы о равноизмеримых перестановках функций. Все рассматриваемые в этом параграфе функции измеримы и неотрицательны. Убывание и возрастание функций всюду ниже понимается соответственно как их невозрастание и неубывание.

ЛЕММА А (см. [1, стр. 334]). *Пусть функции* $F(\xi)$ *и* $\varphi(\xi)$ *определены на отрезке* $[0, \gamma]$, *причем функция* $\varphi(\xi)$ *монотонна. Тогда, если* $\varphi(\xi)$ *возрастает, то*

$$\int_0^\gamma \varphi(\xi) F^*(\xi)\, d\xi \leqslant \int_0^\gamma \varphi(\xi) F(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Если $\varphi(\xi)$ *убывает, то знак неравенства в* (3) *меняется на противоположный.*

ЛЕММА 1. *Пусть* $\chi_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots, n$,— *это характеристические функции измеримых множеств* $E_k \subset \subset [\alpha, \beta]$. *Тогда для любых неотрицательных чисел* c_k $(k = 1, \ldots, n)$ *найдутся функции* $\bar{\chi}_k(\xi)$, $\xi \in [0, \beta - \alpha]$, *равноизмеримые с* $\chi_k(y)$ *и такие, что*

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k\chi_k(\cdot)\right)^*(\xi) = \sum_{k=1}^n c_k\bar{\chi}_k(\xi).$$

Доказательство. Пусть $d_1, \ldots, d_l$ $(d_1 > d_2 > > \ldots d_l \geqslant 0)$ — набор значений, принимаемых функцией $F(y) = c_1\chi_1(y) + \ldots + c_n\chi_n(y)$. Пусть при этом значение d_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ функция $F(y)$ принимает на множестве D_k (так что множества D_k не пересекаются и $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_l = [\alpha, \beta]$). Убывающую равноизмеримую с функцией $F(y)$ перестановку $F^*(\xi)$ получим следующим образом. «Сожмем» множество D_1 до промежутка Δ_1 с концами 0 и $|D_1|$ $(|E| = \text{mes } E)$. Каждое из множеств D_i $(i = 2, \ldots, l)$ «сожмем» до промежутка Δ_i с концами $|D_1| + \ldots + |D_{i-1}|$ и $|D_1| + \ldots \ldots + |D_i|$. При этом под «сжатием» некоторого измеримого множества $E \subset [\alpha, \beta]$ до промежутка Δ с концами a и $a + |E|$ понимается такое преобразование, при котором всякая точка $y \in E$ переходит в точку $\eta = a + + |[\alpha, y] \cap E|$. Нетрудно видеть, что при таком преобразовании каждое из множеств $G_{ik} = D_i \cap E_k$ $(i = 1, \ldots, l;\ k = 1, \ldots, n)$ перейдет в некоторое измеримое множество $\bar{G}_{ik} \subset \Delta_i$ с мерой $|\bar{G}_{ik}| = |G_{ik}|$. Положим $\bar{E}_k = \bar{G}_{1k} \cup \bar{G}_{2k} \cup \ldots \cup \bar{G}_{lk}$, тогда $|\bar{E}_k| = |E_k|$ $(k = 1, \ldots, n)$ и характеристическая функция $\bar{\chi}_k(\xi)$ множества $\bar{E}_k$ является равноизмеримой с $\chi_k(\xi)$. При этом, как следует из самого способа построения множеств $\bar{E}_k$, $F^*(\xi) = c_1\bar{\chi}_1(\xi) + \ldots + c_n\bar{\chi}_n(\xi)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\varphi(\xi)$ — *функция, монотонная на* $[0, \gamma]$, $\chi_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *характеристические функции измеримых множеств на* $[\alpha, \beta]$, $\beta - \alpha = \gamma > 0$. *Тогда, если функция* $\varphi(\xi)$ *возрастает, то*

$$\int_0^\gamma \varphi(\xi)\left(\sum_{k=1}^\infty \chi_k^*(\xi)\right)d\xi \leqslant \int_0^\gamma \varphi(\xi)\left(\sum_{k=0}^\infty \chi_k(\cdot)\right)^*(\xi)\,d\xi. \qquad (4)$$

Если $\varphi(\xi)$ *убывает, то знак неравенства в* (4) *меняется на противоположный.*

Доказательство. В случае конечной последовательности $\chi_1(y), \ldots, \chi_n(y)$ лемма следует из леммы 1 ($c_1 = \ldots = c_n = 1$) и леммы А. Справедливость общего случая следует из возможности предельного перехода под знаком интеграла (при $n \to \infty$) в уже установленном неравенстве для конечной последовательности.

Примечание. Случай, когда $\varphi(\xi) = 1/(\chi_1(\cdot) + \ldots + \chi_n(\cdot))^*(\xi)$, был рассмотрен К. И. Осколковым в [5] (γ в этом случае — мера тех точек ξ, в которых последнее выражение имеет смысл).

ЛЕММА 3. *Пусть неотрицательная функция* $\Psi(t)$ *возрастает на* $[0, \infty)$, $\chi_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *характеристические функции измеримых множеств* $E_k \subset [\alpha, \beta]$. *Тогда для любых неотрицательных* c_k ($k = 1, 2, \ldots$) *при условии выпуклости книзу* $\Psi(t)$ *имеем*

$$\int_\alpha^\beta \Psi\left(\sum_{k=1}^\infty c_k\chi_k(y)\right)dy \leqslant \int_0^{\beta-\alpha} \Psi\left(\sum_{k=1}^\infty c_k\chi_k^*(\xi)\right)d\xi. \qquad (5)$$

Если $\Psi(t)$ *выпукла кверху, то знак неравенства в* (5) *меняется на противоположный.*

Доказательство. Очевидно, так же как и лемму 2, лемму 3 достаточно доказать для конечной последовательности $\chi_1(y), \ldots, \chi_n(y)$. Доказательство будем вести, используя индукцию по n. Соотношение (5) выполняется со знаком равенства при $n = 1$. Предположим, что оно уже установлено для $n = m$, и докажем его справедливость для $n = m + 1$. Изменив, если нужно, нумерацию, можно считать, что $|E_{m+1}| = \min\{|E_k|: k = 1, \ldots, m+1\}$. Положим, кроме того, $b = c_1 + \ldots + c_m$. Нетрудно видеть, что

$$\int_0^{\beta-\alpha} \Psi\left(\sum_{k=1}^{m+1} c_k\chi_k^*(\xi)\right)d\xi = \int_0^{\beta-\alpha} \Psi\left(\sum_{k=1}^{m} c_k\chi_k^*(\xi)\right)d\xi + (\Psi(b + c_{m+1}) - \Psi(b))\cdot|E_{m+1}|. \qquad (6)$$

Пусть функция $h(y) = c_1\chi_1(y) + \ldots + c_m\chi_m(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$, принимает значения $d_1, \ldots, d_l$ соответственно на множествах $G_1, \ldots, G_l$. Положим $\lambda_j = |G_j \cap E_{m+1}|$. Так же как и в случае (6), имеем

$$\int_0^{\beta-\alpha} \Psi(h(y) + c_{m+1}\chi_{m+1}(y))\,dy =$$
$$= \int_0^{\beta-\alpha} \Psi(h(y))\,dy + \sum_{j=1}^{l} [\Psi(d_j + c_{m+1}) - \Psi(d_j)]\,\lambda_j. \qquad (7)$$

Далее, пусть $\Psi(t)$ выпукла книзу. Тогда в силу неравенств $d_j \leqslant b$ $(j = 1, \ldots, l)$

$$\sum_{j=1}^{l} [\Psi(d_j + c_{m+1}) - \Psi(d_j)]\,\lambda_j \leqslant$$
$$\leqslant [\Psi(b + c_{m+1}) - \Psi(b)]\cdot\sum_{j=1}^{l}\lambda_j =$$
$$= [\Psi(b + c_{m+1}) - \Psi(b)]\cdot|E_{m+1}|. \qquad (8)$$

Если $\Psi(t)$ выпукла кверху, то знак неравенства в (8), очевидно, изменится на противоположный.

Отсюда и из индуктивного предположения, сравнивая выражения (6) и (7), получим утверждение леммы.

Заметим, что нетрудно распространить утверждения лемм 1 — 3 с характеристических функций множеств на произвольные неотрицательные измеримые функции.

§ 2. Леммы об индикатрисе Банаха и уклонениях $M_n(f)$. Для произвольной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, определим *n-е частичное изменение* $V_n(f)$, положив $V_n(f) = \sup\{|f(\alpha_1) - f(\beta_1)| + \ldots + |f(\alpha_n) - f(\beta_n)|\}$, где супремум берется при фиксированном натуральном n по всем системам непересекающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subseteq [a, b]$, $\beta_i \leqslant \alpha_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ (см. [2], [4]; независимо эту характеристику рассмотрел З. А. Чантурия [6]).

В [2], [4] показано, что

$$V_n(f) = 2\sum_{k=0}^{n-1} M_k(f) \qquad (9)$$

(в пределе при $n \to \infty$ получаем левое из равенств (1); любопытно сравнить (9) также с леммой 5 из работы [7]). Другие необходимые для дальнейшего свойства непрерывных функций содержатся в следующем предложении (см. [2, замечание 4]).

ЛЕММА 4. *Пусть* $f \in C[a, b]$, n — *натуральное и непересекающиеся между собой интервалы* $(\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)})$ *таковы, что*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i^{(n)}) - f(\beta_i^{(n)})| = V_n(f). \qquad (10)$$

Тогда точки $\alpha_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$ *можно считать выбранными таким образом, что выполняются следующие свойства:*

1) $f(x) \in [f(\alpha_i^{(n)}), f(\beta_i^{(n)})]$ *при* $x \in [\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$ *(это свойство непосредственно следует из определения* $V_n(f)$*)*;

2) *множество* $\bigcup [\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]$ *имеет не более одного внутреннего интервала смежности* $(\beta_s^{(n)}, \alpha_{s+1}^{(n)})$, *и в случае существования такового отрезки* $[\alpha_i^{(n+1)}, \beta_i^{(n+1)}]$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n+1$, *получаются из отрезков* $[\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, *присоединением к ним* $[\beta_s^{(n)}, \alpha_{s+1}^{(n)}]$;

3) *в случае отсутствия внутреннего интервала смежности отрезки* $[\alpha_i^{(n+1)}, \beta_i^{(n+1)}]$ *получаются из отрезков* $[\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]$ *либо присоединением к ним нового отрезка (с общим концом с крайним из отрезков* $[\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]$*), либо заменой одного из них двумя, образующимися удалением из заменяемого отрезка некоторого открытого интервала;*

4) *точки* $a, \beta_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \ldots, \beta_{n-1}^{(n)}, \alpha_n^{(n)}, b$ *дают разбиение отрезка* $[a, b]$ *на* n *или* $n+1$ *отрезков, соответствующих участкам монотонности к. м. функции наилучшего равномерного приближения, либо порядка не выше* n *(в случае отсутствия внутреннего интервала смежности), либо порядка не выше* $n+1$ *(в противном случае).*

ЛЕММА 5. *Для любой функции* $f \in C[a, b]$ *имеем всюду, за исключением разве лишь счетного множества точек,*

$$N_f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(y),$$

где $\chi_n(y)$ — *характеристическая функция некоторого отрезка длины* $2M_n(f)$.

Доказательство. Пусть n — натуральное, точки $\alpha_i^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ определены в лемме 4, $\chi_i^{(n)}(y)$ — характеристическая функция отрезка $[f(\alpha_i^{(n)}),$

$f(\beta_i^{(n)})]$. Положим $\chi_0(y) = \chi_1^{(1)}(y)$,

$$\chi_n(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \chi_i^{(n+1)}(y) - \sum_{i=1}^{n} \chi_i^{(n)}(y), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Из свойств 1) — 3) леммы 4 и из (9) следует, что функция $\chi_n(y)$, $n = 0, 1, \ldots$, является характеристической функцией некоторого отрезка длины $2M_n(f)$.

Очевидно, при любом $n = 1, 2, \ldots$, и всех y, за исключением разве лишь конечного числа точек,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \chi_i(y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i^{(n)}(y) \leqslant N_f(y). \qquad (11)$$

Далее, пусть y такое, что множество корней уравнения $f(x) = y$ не содержит целого интервала; натуральное $s \leqslant N_f(y)$ и $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$ — корни уравнения $f(x) = y$. Тогда колебание Ω_i функции $f(x)$ на отрезке $[x_i\ x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, s - 1$, отлично от нуля. Поскольку $M_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$, то при достаточно большом $m = n(y, s)$ будет $M_m(f) < \min\{\Omega_i/2\}$. Поэтому, очевидно, все корни $x_1, x_2, \ldots, x_s$ лежат на разных участках монотонности к. м. функции наилучшего приближения порядка не выше m и в силу свойства 4) леммы 4 — на разных отрезках $[a, \alpha_1^{(m)}]$, $[\alpha_2^{(m)}, \beta_2^{(m)}]$, $\ldots$, $[\alpha_m^{(m)}, \beta_m^{(m)}]$. Следовательно, $\chi_1^{(m)}(y) + \ldots + \chi_m^{(m)}(y) \geqslant s$. Отсюда в силу произвольности $s \leqslant N_f(y)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(y) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \chi_i^{(m)}(y) \geqslant N_f(y). \qquad (12)$$

Так как множество тех y, для которых $\{x\colon f(x) = y\}$ содержит интервал, не более чем счетно, то из (12) и (11) получаем утверждение леммы.

Имеет место следующее обращение леммы 5.

ЛЕММА 6. *Пусть $a_k \downarrow 0$ $(k \to \infty)$ — произвольная числовая последовательность, $\chi_k(y)$, $k = 0, 1, \ldots$, — характеристические функции некоторых отрезков $[\alpha_k, \beta_k] \subseteq [\alpha_0, \beta_0]$ длины $\beta_k - \alpha_k = 2a_k$. Тогда существует непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ такая, что всюду, за исключением разве лишь счетного числа точек, имеем*

$$N_f(y) = \chi_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\chi_k(y) \qquad (13)$$

и при этом

$$M_0(f) = a_0, \quad M_{2k-1}(f) = M_{2k}(f) = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (14)$$

Первое утверждение этой леммы (соотношение (13)) фактически совпадает с леммой К. И. Осколкова [8]. Поэтому остановимся в основном на изменениях и дополнениях в доказательстве К. И. Осколкова, которые позволят получить (14).

Доказательство леммы 6. Так же как и в [8], определим на $[a, b]$ последовательность непрерывных к. м. функций f_k (равномерный предел которой и будет требуемой функцией f). Именно, пусть $f_1(x)$ монотонна на $[a, b]$, $\min f_1 = \alpha_0$, $\max f_1 = \beta_0$. Далее, считаем, что к. м. функция $f_k(x)$ порядка $2k - 1$ уже определена и обладает тем свойством, что ее вариация на каждом из ее (полных) участков монотонности $\geqslant 2a_{k-1}$. Тогда функцию $f_{k+1}(x)$ получаем из $f_k(x)$ путем изменения $f_k(x)$ на одном из тех интервалов (c_k, d_k), на котором $f_k(x)$ монотонна и для которого $[f_k(c_k), f_k(d_k)] = [\alpha_k, \beta_k]$ (то, что такой интервал всегда существует, нетрудно доказать, используя упомянутое свойство f_k и неравенство $a_{k-1} \geqslant a_k$); при этом функция $f_{k+1}(x)$ на (c_k, d_k) определяется так, что на (c_k, d_k) она имеет три участка монотонности и ее вариация на $[c_k, d_k]$ равна $3(\beta_k - \alpha_k) = 3 \cdot 2a_k$. Последовательность $\{f_k\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции f, и для f выполняется (13) (см. [8]).

Далее, в силу определения f и леммы 4 (свойства 1) — 3)) нетрудно видеть, что значение $V_{2k-1}(f)$ достигается функцией f (см. (10)) в узлах к. м. функции f_k (порядка $2k - 1$), которые в силу 4) являются и узлами к.м. функции наилучшего приближения для f порядка $2k - 1$ (а также порядка $\leqslant 2k$). В то же время, если Δ_i $(i = 1, \ldots, 2k - 1)$ — участки монотонности функции f_k, $M_1(f, \Delta_i)$ — наименьшее уклонение f на Δ_i от монотонных (непрерывных) функций m_i, то из определения f следует, что $\max\limits_i \{M_1(f, \Delta_i)\} = a_k$; при этом можно считать, что $m_i(x) = f(x)$ на концах Δ_i (подробнее см. лемму 3 из [2]). Из последних двух предложений и следует, что $M_{2k-1}(f) = M_{2k}(f) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Лемма доказана.

§ 3. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и пусть $\varphi(\xi)$ — функция, неотрицательная и монотонная* *на* $(0, \ \Omega(f)]$,

$$\Phi(u)=\int_0^u \varphi(\xi)\,d\xi \qquad (u\in(0, \Omega(f)]).$$

Тогда, если $\varphi(\xi)$ *возрастает, то*

$$V_\Phi(f)\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\Phi(2M_n(f))\leqslant \int_0^{\Omega(f)}\varphi(\xi)\,N_f^*(\xi)\,d\xi. \qquad (15)$$

Если же $\varphi(\xi)$ *убывает, то имеет место правое из неравенств* (15) *с заменой знака* $\leqslant$ *на* $\geqslant$.

Доказательство. Пусть $\varphi(\xi)$ возрастает. Левое из неравенств (15) установлено в [2]. Далее, пусть $\chi_n(y)$ — функции из леммы 5. Тогда имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(2M_n(f))=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2M_n(f)}\varphi(\xi)\,d\xi=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\Omega(f)}\chi_n^*(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi=\int_0^{\Omega(f)}\varphi(\xi)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n^*(\xi)\Big)\,d\xi.$$

Отсюда в силу леммы 2 и леммы 5

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(2M_n(f))\leqslant \int_0^{\Omega(f)}\varphi(\xi)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(\cdot)\Big)^*(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int_0^{\Omega(f)}\varphi(\xi)\,N_f^*(\xi)\,d\xi,$$

что и требовалось доказать для случая возрастающей $\varphi(\xi)$. Если же $\varphi(\xi)$ убывает, то в последнем неравенстве в силу леммы 5 знак неравенства надо изменить на противоположный. Теорема доказана.

Примечание. Если $\varphi(\xi)=1/N_f^*(\xi)$, $\xi\in(0, \Omega(f)]$, то из (15) имеем $V_\Phi(f)\leqslant\Omega(f)$. Это неравенство было доказано К. И. Осколковым [5]. По поводу (15) заметим также, что при $p>1$ суммируемость функции $\xi^{p-1}N_f^*(\xi)$ — условие более широкое, чем суммируемость функции $N_f(y)^{1/p}$, $y\in[\min f, \ \max f]$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *и пусть* $\psi(\tau)$ — *неотрицательная и монотонная на* $[0, \infty)$ *функция*,

$$\Psi(t)=\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau \qquad (t\in[0, \infty)),$$

$\psi_n=\Psi(n+1)-\Psi(n)$ — *среднее значение функции* $\psi(\tau)$ *на* $[n, \ n+1]$. *Тогда, если* $\psi(\tau)$ *возрастает, то*

$$\int_{\min f}^{\max f}\Psi(N_f(y))\,dy\leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n M_n(f). \qquad (16)$$

Если же $\psi(\tau)$ *убывает, то в* (16) *знак неравенства меняется на противоположный.* (Очевидно, ψ_n в (16) можно заменить на $\psi(n+1)$.)

Доказательство. Пусть $\psi(\tau)$ возрастает, и пусть $\chi_n(y)$ — функции, определенные в лемме 5. Тогда в силу лемм 5 и 3 имеем

$$\int_{\min f}^{\max f} \Psi(N_f(y))\,dy = \int_{\min f}^{\max f} \Psi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(y)\right) dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\Omega(f)} \Psi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^*(\xi)\right) d\xi =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi(n+1) - \Psi(n))\, 2M_n(f) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty} \psi(n+1)\, M_n(f).$$

Если $\psi(\tau)$ убывает, то в доказательстве знаки неравенств меняются на противоположные и теорема имеет место и в этом случае.

Следствие. *Если* $\psi(\tau)$ *возрастает, то*

$$\int_{\min f}^{\max f} \Psi(N_f(y))\,dy \leqslant 4\sum_{n=0}^{\infty} \psi(2n+2)\, R_n(f).$$

Теоремы 1 и 2 точны. Именно, для каждой из них имеет место соответственно следующее.

Пусть $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $a_k \to 0$; $\varphi(\xi)$ $(\psi(\tau))$ *неотрицательна и монотонна на* $(0, 2a_0]$ (*на* $[0, \infty)$). *Тогда существует непрерывная функция* $f(x)$, $x \in [a, b]$, *с уклонениями* $M_0(f) = a_0$, $M_{2k-1}(f) = M_{2k}(f) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *для которой правое из неравенств* (15) (*неравенство* (16)) *выполняется со знаком равенства.*

(Если $\varphi(\xi)$ убывает, то на той же функции f достигается и левое из неравенств (15).) Существование такой функции f следует из леммы 6, если в ней положить $\alpha_k = \alpha_0$: в этом случае неравенства (4) и (5) для функций $\chi_k(y)$ из леммы 6 становятся равенствами, что необходимо и достаточно для выполнения равенств соответственно в (15) и (16).

Отметим, кроме того, что правое из неравенств (15) и неравенство (16) не допускают обращения, если только пределы $\lim\limits_{\xi\to 0} \varphi(\xi)$ (теорема 1) и $\lim\limits_{\tau\to\infty} \psi(\tau)$ (теорема 2) не есть положительные конечные числа. Это нетрудно получить из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Имеем*: a) *для любой последовательности* $a_k \downarrow 0$ $(k \to \infty)$ *такой, что* $\sum a_k = \infty$, *существует непрерывная на* $[a, b]$ *функция* f *с уклонениями* $M_{2k-1}(f) = M_{2k}(f) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *для которой* $N_f(y) = \infty$ *при всех* $y \in [\min f, \max f]$;

b) *для любой последовательности* $a_k \downarrow 0$ *такой, что* $\sum a_k < \infty$, *существует непрерывная на* $[a, b]$ *функция* f *с* $N_f(y) \leqslant N = \mathrm{const}$, *для которой* $M_{2k-1}(f) = M_{2k}(f) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Оба утверждения теоремы следуют из леммы 6, если в последней соответствующим образом расположить на $[\alpha_0, \beta_0]$ отрезки $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ Подробнее: положим $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_3 = \beta_2$ и т. д.; если при этом отрезок $[\alpha_s, \beta_s]$ $(s \geqslant 1)$ не умещается на $[\alpha_0, \beta_0]$, то положим $\beta_s = \beta_0$, $\beta_{1+s} = \alpha_s$ и т. д.; если при этом r $(r \geqslant s + 1)$ таково, что отрезок $[\alpha_r, \beta_r]$ не умещается на $[\alpha_0, \beta_0]$, то положим $\alpha_r = \alpha_0$, $\alpha_{r+1} = \beta_r$ и т. д., и т. д. Ясно, что при этом каждая точка отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$ покрывается в случае а) бесконечным числом отрезков, в случае же b) — конечным ограниченным их числом. Теорема доказана.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 3.V.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, М., ИЛ, 1948.

[2] Севастьянов А. А. Кусочно монотонная аппроксимация и Ф-вариации, Analysis Mathematica, 1, № 2 (1975), 141—164.

[3] Banach S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fund. Math., 7 (1925), 225—236.

[4] Севастьянов Е. А., Влияние скоростей рациональной и кусочно монотонной аппроксимаций на структурные свойстьа функций, Кандид. дисс., М., 1974.

[5] Осколков К. И., Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье, Матем. заметки, 12, № 3 (1972), 313—324.

[6] Чантурия З. А., Модуль изменения функции и его приложения в теории рядов Фурье, Докл. АН СССР, 214, № 1 (1974), 63—66.

[7] Петрушев П., Христов В. Х., Сходимость ряда Фурье в метрике Хаусдорфа, Плиска, 1 (1977), 21—36.

[8] Осколков К. И., О суммах Фурье для индикатрисы Банаха, Матем. заметки, 15, № 4 (1974), 527—532.