Г. А. Гайсина, Порядок роста ряда экспонент вблизи границы области сходимости, *Алгебра и анализ*, 2021, том 33, выпуск 3, 31–50

Алгебра и анализ
Том 33 (2021), №3

ПОРЯДОК РОСТА РЯДА ЭКСПОНЕНТ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

© Г. А. ГАЙСИНА

Для класса аналитических в ограниченной выпуклой области G функций, представимых в ней рядом экспонент, в терминах порядка роста вблизи границы ∂G изучается поведение коэффициентов разложения в ряд экспонент. В случае, когда область G имеет гладкую границу, установлены неулучшаемые двусторонние оценки для порядка через характеристики, зависящие только от показателей ряда экспонент и опорной функции области G. Как следствие получена формула для вычисления порядка ряда экспонент через коэффициенты и опорную функцию области сходимости G.

Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, $K(\varphi)$ — опорная функция $\overline{D}$, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Если предположить, что

$$|L(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{A}{r^{\mu}} e^{h(\varphi)r}, \quad \mu > 1, \tag{0.1}$$

то аналитические продолжения функций

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \quad \operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$$

(они образуют систему, биортогональную к системе экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$), как известно, регулярны вне $\overline{D}$, непрерывны вплоть до границы ∂D и $\psi_k(\infty) = 0$

Ключевые слова: ряд экспонент, область с гладкой границей, поведение вблизи границы, порядок роста.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение №075-02-2020-1421/1 к соглашению №075-02-2020-1421.

(см. [1, глава IV, §1, п. 3]). Поэтому каждой функции f, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, ставится в соответствие ряд экспонент

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(t)\psi_k(t)dt, \quad k \geqslant 1. \tag{0.2}$$

Хорошо известно, что при условии (0.1) функции ψ_k на ∂D удовлетворяют оценкам (см. [1, глава IV, §1, п. 3])

$$|\psi_k(t)| \leqslant \frac{A}{|L'(\lambda_k)|}, \quad t \in \partial D, \quad k \geqslant 1,$$

где постоянная A не зависит от k. Так что коэффициенты ряда (0.2) имеют оценки

$$|a_k| \leqslant \frac{A}{|L'(\lambda_k)|} \max_{t\in\partial D} |f(t)|, \quad k \geqslant 1. \tag{0.3}$$

Пусть выполнено условие (0.1) и, кроме того:
1) $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста;
2) для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$\ln |L'(\lambda_k)| \geqslant [h(\varphi_k) - \varepsilon] r_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{0.4}$$

Тогда любая функция f, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, представляется в области D рядом (0.2) (см. [1, глава IV, §6, теорема 4.6.4]), то есть

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$$

(сходимость — равномерная внутри D), причем, как видно из (0.3), (0.4), для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leqslant B e^{[-h(\varphi_k)+\varepsilon] r_k}. \tag{0.5}$$

Если же вместо (0.4) выполняется более сильное условие (см. [2])[1]

$$|L'(\lambda_k)| \geqslant \frac{C}{r_k^p} e^{h(\varphi_k) r_k}, \quad k \geqslant 1, \tag{0.6}$$

то оценка (0.5), очевидно, допускает качественное улучшение.

Рассматривая самую общую ситуацию, когда функция f только аналитична в D, А. Ф. Леонтьев показал (см. [1, глава V, §2, теорема 5.2.1]), что существуют целая функция $M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого

---

[1] А. Ф. Леонтьев был вынужден лишь постулировать это требование, ибо в общей ситуации не было известно, выполняется ли оно хотя бы для какой-то функции $L(\lambda)$. Если, например, D — выпуклый многоугольник, то условие (0.6) будет выполнено при $p = 2$ (см. [2]).

порядка минимального типа и функция g, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, такие, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(z), \quad z \in D.$$

Тогда, представляя функцию g рядом (0.2), получим представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}, \quad b_k = a_k M(\lambda_k), \quad z \in D. \tag{0.7}$$

Учитывая неравенства (0.3) для a_k, замечаем, что соответствующие оценки для коэффициентов b_k ряда (0.7) зависят от оценок снизу для $|L'(\lambda_k)|$ и оценок сверху для $|M(\lambda_k)|$. В случае (0.6), например, имеем:

$$|b_k| \leqslant C r_k^p |M(\lambda_k)| e^{-h(\varphi) r_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{0.8}$$

При этом данные оценки, как видно, никакой дополнительной информации о поведении $|M(\lambda_k)|$ при $k \to \infty$ не доставляют. Однако, если функция f вблизи ∂D имеет заданный рост, например, если для любого $\varepsilon > 0$ при $r < r_0(\varepsilon)$

$$|f(z)| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = d(z),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial D) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|$, то, как показано в [2], функция $M(\lambda)$ имеет порядок не выше $q/(q+1)$, и тогда из (0.8) сразу следует, что

$$|b_k| \leqslant e^{r_k^{p+\varepsilon} - h(\varphi_k) r_k}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon), \quad p = \frac{q}{q+1}. \tag{0.9}$$

Таким образом, в этом случае любая аналитическая в D функция f порядка

$$\rho_f = \varlimsup_{z \to \partial D} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad a^+ = \max(a, 0),$$

не превышающего q[1], допускает разложение в ряд экспонент (0.7), причем при $r < r_0(\varepsilon)$ (см. в [2])

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z}| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = d(z),$$

$\varepsilon > 0$ — любое.

[1] Отметим также, что в статье [3] Р. С. Юлмухаметовым изучается пространство $H(q)$ аналитических в D функций порядка не выше q, где в терминах преобразования Лапласа получено описание пространства $H'(q)$, сопряженного с $H(q)$.

В настоящей работе речь будет идти о классе $H(G,\Lambda)$ аналитических в выпуклой ограниченной области G функций, имеющих конечный порядок и представимых в G рядами экспонент с множеством показателей $\Lambda=\{\lambda_k\}$. Будет показано, что для любой такой области G найдется последовательность Λ, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_k|}\ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_k)}\right|,\quad Q(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\Big),\quad \lambda_k^2\neq\lambda_n^2 \text{ при } k\neq n,$$

такая, что $H(G,\Lambda)\neq\varnothing$.

Цель статьи — доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная ограниченная выпуклая область с гладкой границей, а $\Lambda=\{\lambda_k\}$ — последовательность, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H(G,\Lambda)\neq\varnothing$. Тогда порядок ρ_f любой функции $f\in H(G,\Lambda)$ удовлетворяет оценкам*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1}\leqslant\beta\leqslant\max\Big(\frac{\rho_f}{\rho_f+1},\,q_0\Big),\tag{0.10}$$

где

$$\beta=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right]}{\ln|\lambda_k|},\quad q_0=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln^+\ln\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|},$$

$\lambda_k=|\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ — опорная функция области G.

Будет показано, что оценки (0.10) неулучшаемы.

§1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобятся некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. *Пусть D — конечная выпуклая область, $K(\varphi)$ — опорная функция $\overline{D}$, $h(\varphi)=K(-\varphi)$, $\{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел с конечной верхней плотностью*:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k}{|\lambda_k|}=\tau<\infty.$$

Если для любого $\varepsilon>0$ при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$

$$|a_k|\leqslant\exp\left[-h(\varphi_k)|\lambda_k|+|\lambda_k|^{p+\varepsilon}\right],\tag{1.1}$$

$\varphi_k=\arg\lambda_k$, $0\leqslant p<1$, то для любого $\nu>0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_ke^{\lambda_kz}|\leqslant\exp\left[\Big(\frac{1}{r}\Big)^{q+\nu}\right],\tag{1.2}$$

где $r = d(z),\ q = p/(1-p),\ z \in D,\ r < r_0(\nu)$.

Лемма доказана в [2]. Отметим только следующее.

Если $z \in D,\ \arg\lambda = \varphi,\ \arg z = \psi$, то

$$|e^{\lambda z}| = \exp\left[|\lambda||z|\cos(\varphi+\psi)\right],$$

где выражение $|z|\cos(\varphi+\psi)$ есть проекция вектора z на луч $\{t : \arg t = -\varphi,\ t > 0\}$. Очевидно, что

$$|z|\cos(\varphi+\psi) < h(\varphi) - d(z), \quad z \in D. \tag{1.3}$$

Так что из (1.1), (1.3) получаем

$$|a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant A(\varepsilon)\exp\left[|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|\right], \quad k \geqslant 1,$$

где $r = d(z)$, $0 \leqslant p < 1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant A(\varepsilon)\exp\Big[\max_{k\geqslant 1}\big(2|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|\big)\Big]\sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\lambda_k|^{p+\varepsilon}}. \tag{1.4}$$

Максимум явно подсчитывается, а поскольку $\tau < \infty$, то последний ряд сходится. Как показано в [2], правая часть в (1.4) не превосходит величины

$$B(\nu)\exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\nu}\right], \quad r > 0,$$

$\nu > 0$ — любое.

Таким образом, оценка (1.2) имеет место для любой ограниченной выпуклой области D. При этом в лемме 1, как видно, никаких дополнительных условий на границу ∂D не требуется. Однако если вместо условия $\tau < \infty$ выполнено более слабое требование $\ln k = \mathrm{o}(|\lambda_k|)$ при $k \to \infty$, то лемма 1 вообще неверна (см. [2]). В то же самое время, если показатели ряда экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \tag{1.5}$$

имеют конечную верхнюю плотность, а функция f — конечный порядок ρ_f, $\rho_f \leqslant q$, то в общей ситуации оценка (1.1) для коэффициентов a_k может также не иметь места. Дело в том, что сумма ряда экспонент (1.5) в области D может равняться нулю тождественно, а его коэффициенты не равны нулю и могут иметь гораздо больший рост, нежели правая часть в оценках (1.1).

Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $\varphi(r)$ — любая положительная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, такая, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\varphi(r)}{r} = 0.$$

Известно (см. [1, глава I, §3, п. 6, теорема 1.3.6]), что существует целая функция $L(\lambda)$ вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$ (где $K(\varphi)$ — опорная функция $\overline{D}$), для которой выполняется условие (0.4) и

$$|L(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{e^{h(\varphi)}r}{\varphi(r)}.$$

Тогда имеем (см. [1, Дополнение]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} = 0, \quad z \in D. \tag{1.6}$$

В [2] показано, что для коэффициентов $a_k = |L'(\lambda_k)|^{-1}$ ряда (1.6) имеют место оценки: при $k \geqslant k_0$

$$|a_k| \geqslant A^{-1}\varphi(|\lambda_k| - 1)e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|}, \quad A = \exp\,(\max_{t\in\overline{D}}|t|).$$

Видим, что сумма ряда (1.6) равна нулю в D, а коэффициенты a_k за счет выбора $\varphi(r)$ могут не иметь оценок типа (1.1). Действительно, можно, например, взять функцию

$$\varphi(r) = \exp\left[\frac{r}{\ln(r+e)}\right], \quad r \geqslant 0.$$

Таким образом, в подобной ситуации, когда λ_k $(k = 1, 2, \dots)$ — простые нули некоторой целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$, для которой $\overline{D}$ — сопряженная диаграмма, нельзя ставить вопрос о какой-либо формуле, выражающей зависимость порядка ρ_f произвольной аналитической в D функции f от коэффициентов ее разложения в ряд экспонент (1.5). Другое дело, если соответствующий ряд экспонент сходится в большей области G, $G \supset \overline{D}$. В этом случае система экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна в пространстве аналитических в G функций, и можно указать формулы для коэффициентов (см. [4], [5, глава II, §2, п. 7]). Но тогда при некоторых дополнительных условиях на показатели λ_k можно вести речь о какой-либо связи между порядком ρ_f суммы ряда (1.5) в области G и коэффициентами разложения a_k.

Итак, пусть ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} \tag{1.7}$$

сходится в области $G \supset \overline{D}$. Поскольку верхняя плотность $\tau < \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0,$$

и потому область сходимости G совпадает с областью абсолютной сходимости ряда (1.7). Поэтому область G выпукла (см. [1, глава III, §1, п. 1]).

Для исследуемых здесь задач нам вполне подходит функция $Q(\lambda)$, определенная в конце введения. Поведение этой функции полностью определяется распределением точек λ_k, показателей ряда (1.7), и наоборот.

Известно (см. [5, глава II, §3, теорема 3.1]), что при выполнении условий

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{|\lambda_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_k)}\right| = 0 \tag{1.8}$$

область сходимости G ряда (1.7) совпадает с областью H регулярности его суммы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что выполнены условия (1.8).

Так как плотность $\tau = 0$, то $\overline{D} = \{0\}$, где $\overline{D}$ — сопряженная диаграмма функции $Q(\lambda)$. Следовательно, имеем (см. [5, глава II, §2, п. 7])

$$a_k = e^{-\lambda_k z} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\delta} \psi_k(t) f(t+z) dt, \quad k \geqslant 1, \tag{1.9}$$

причем для каждого $z \in G$ величина $\delta > 0$ выбирается так, чтобы $t+z \in G$ для всех $t, |t| = \delta$. Здесь

$$\psi_k(t) = \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad t \in \Pi(\varphi_0),$$

где $\Pi(\varphi_0) = \{t\colon \operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) \geqslant \delta\}$. Отсюда следует, что для всех φ_0, $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi$, равномерно

$$\max_{t\in\Pi(\varphi_0)} |\psi_k(t)| \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{\infty} \max_{|\lambda|=r} \left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right| e^{-\delta r} dr, \quad r = |\lambda|. \tag{1.10}$$

Покажем, что для всякого $k \geqslant 1$

$$\max_{|\lambda|=r} \left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right| \leqslant M(1)M(r), \quad M(r) = \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 + \frac{r^2}{|\lambda_k|^2}\Bigr). \tag{1.11}$$

Действительно, для всякого $k \geqslant 1$

$$\left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right| = \frac{1}{|\lambda_k|} \left|1 + \frac{\lambda}{\lambda_k}\right| \prod_{k\neq n} \left|1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right|. \tag{1.12}$$

Поскольку еще

$$\frac{1}{|\lambda_k|} \leqslant \frac{1}{2}\Bigl(1 + \frac{1}{|\lambda_k|^2}\Bigr),$$

а

$$1+\frac{r}{|\lambda_k|}\leqslant 2\Big(1+\frac{r^2}{|\lambda_k|^2}\Big), \quad r=|\lambda|,$$

то оценка (1.11) легко следует из (1.12). Поскольку правая часть в (1.10) не зависит от φ_0, то будем иметь

$$\max_{|t|=\delta}|\psi_k(t)|\leqslant\frac{M(1)}{|Q'(\lambda_k)|}\int\limits_0^\infty M(r)e^{-\delta r}\,dr, \quad k\geqslant 1.$$

В итоге из (1.9) получим оценки: для всех $z\in G$, $k=1,2,\dots$

$$|a_k|\leqslant\frac{|e^{-\lambda_k z}|}{|Q'(\lambda_k)|}M(1)\delta H(\delta)\max_{|\xi-z|\leqslant\delta}|f(\xi)|,$$

где

$$H(\delta)=\int\limits_0^\infty M(r)e^{-\delta r}\,dr, \quad \delta<\rho(z,\partial G)=\inf_{t\in\partial G}|z-t|.$$

Лемма 2. *Целая функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше $q=\rho_f/(\rho_f+1)$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon>0$ при $0<\delta<\delta_0(\varepsilon)$*

$$H(\delta)\leqslant\exp\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho_f+\varepsilon}\right]. \tag{1.13}$$

Для функции

$$H_0(\delta)=\int\limits_0^\infty M_0(r)e^{-\delta r}\,dr,$$

где

$$M_0(r)=\max_{|\lambda|=r}|Q(\lambda)|, \quad r=|\lambda|,$$

лемма доказана в [4]. Здесь вместо $H_0(\delta)$ рассматривается функция $H(\delta)$, определяемая через $M(r)=Q_1(ir)$, где

$$Q_1(\lambda)=\prod_{k=1}^\infty\Big(1-\frac{\lambda^2}{|\lambda_k|^2}\Big).$$

Но функции $Q(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ имеют один и тот же порядок, равный (см. [5, глава I, §3, п. 5])

$$\inf\Big\{\mu\colon\ \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{|\lambda_k|^\mu}<\infty\Big\}.$$

Поэтому лемма 2 есть аналог леммы из [4]. Из нее следует, что

$$\varlimsup_{\delta\downarrow 0}\frac{\ln\ln H(\delta)}{-\ln\delta}\leqslant\rho_f$$

тогда и только тогда, когда целая функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше $\rho_f/(\rho_f+1)$.

Нам понадобится и следующее утверждение из [6].

Лемма 3. *Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей ∂G, $z_0\in\partial G$, N_0 — нормаль в точке z_0. Тогда при $z\in G\cap N_0$ и $z\to z_0$*

$$|z-z_0|=d(z)(1+o(1)),$$

где $d(z)=\rho(z,\partial G)=\min_{\xi\in\partial G}|z-\xi|$.

§2. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Приступим к доказательству теоремы. Для этого воспользуемся оценками для коэффициентов a_k (они были установлены выше), переписав их в виде: для всех $z\in G$, $\delta<\rho(z,\partial G)$

$$|a_k|\leqslant M(1)\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}\delta H(\delta)|e^{-\lambda_k z}|\max_{|t|=\delta}|f(t+z)|,\quad z\in G,\quad k\geqslant 1. \tag{2.1}$$

Пусть $\lambda_k=|\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, а z_k — точка границы ∂G, такая, что $\mathrm{Re}(z_k e^{i\varphi_k})=K(-\varphi_k)$ (здесь $K(\varphi)$ — опорная функция компакта $\overline{G}$). Если N_k — нормаль в точке z_k, а $z\in G\cap N_k$, $z\to z_k$, то, по лемме 3,

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}(\lambda_k z)&=-K(-\varphi_k)|\lambda_k|+\mathrm{Re}\,[\lambda_k z_k-\lambda_k z]\\&\leqslant K(-\varphi_k)|\lambda_k|+|\lambda_k||z_k-z|\\&=-K(-\varphi_k)|\lambda_k|+|\lambda_k|(1+o(1))d(z),\end{aligned}$$

где $d(z)=\rho(z,\partial G)$. Учитывая это и лемму 2, из (1.13), (2.1) получаем: для всякого $\varepsilon>0$ при $\delta<\delta_0(\varepsilon)$

$$|a_k|\leqslant\frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k|+|\lambda_k|(1+o(1))d(z)}}{|Q'(\lambda_k)|}\exp\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho_f+\varepsilon}\right]\max_{|t|=\delta}|f(t+z)| \tag{2.2}$$

при $z\to z_k$, $z\in G\cap N_k$.

Положим $\delta=\gamma d(z)$, где γ — фиксированное число из интервала $(0,1)$. Тогда $\delta<d(z)$. Так как функция $d(z)=\rho(z,\partial G)$ удовлетворяет условию Липшица в G (см. [7, глава II, §6]), то есть для всех z', z'' из G

$$|d(z')-d(z'')|\leqslant|z'-z''|,$$

то

$$d(t+z)\geqslant d(z)-\delta=(1-\gamma)d(z),\quad 0<\gamma<1. \tag{2.3}$$

Функция f имеет порядок ρ_f. Значит, в силу (2.3),

$$\max_{|t|=\delta}|f(t+z)| \leqslant \exp\Big[\Big(\frac{1}{(1-\gamma)d(z)}\Big)^{\rho_f+\varepsilon}\Big],$$

если $d(z) < d_1(\varepsilon)$ (где $\varepsilon > 0$ — та же величина, что и в формуле (2.2)), значение γ (такое, что $0 < \gamma < 1$) фиксировано. Значит, для заданного $\varepsilon > 0$ при $d(z) < d_2(\varepsilon) < d_1(\varepsilon)$

$$|a_k| \leqslant \frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k|}}{|Q'(\lambda_k)|}\exp\Big[\Big(\frac{1}{d(z)}\Big)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2|\lambda_k|d(z)\Big].$$

Отсюда, переходя к независимой переменной d, имеем

$$|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}\exp\Big\{\inf_{0<d<d_2}\Big[\Big(\frac{1}{d}\Big)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k|\Big]\Big\}. \tag{2.4}$$

Проверяется, что для любого $\varepsilon > 0$

$$I = \inf_{0<d<d_2}\Big[\Big(\frac{1}{d}\Big)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k|\Big] \leqslant N_{\rho_f}(\varepsilon)|\lambda_k|^{\rho_1/(\rho_1+1)},$$

где $\rho_1 = \rho_f + 2\varepsilon$. Значит, для любого $\nu > 0$

$$I \leqslant |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}$$

при $k \geqslant k_0(\nu)$. Учитывая это, из (2.4) получаем: для любого $\nu > 0$ при $k \geqslant k_0(\nu)$

$$|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leqslant \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}e^{|\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}}.$$

Следовательно,

$$\ln^+\Big[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\Big] \leqslant \ln\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} + |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu},$$

а отсюда

$$\ln^+\Big[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\Big] \leqslant 2\max\Big(\ln\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|},\, |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}\Big), \quad k \geqslant k_0(\nu).$$

Таким образом,

$$\frac{\ln^+\ln^+\Big[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\Big]}{\ln|\lambda_k|} \leqslant \frac{\ln 2}{\ln|\lambda_k|} + \max\Bigg(\frac{\ln^+\ln\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|},\, \frac{\rho_f}{\rho_f+1}+\nu\Bigg),$$

$k \geqslant k_0(\nu)$, $\nu > 0$ — любое. Значит,

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+\big[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\big]}{\ln|\lambda_k|} \leqslant \max\Big(\frac{\rho_f}{\rho_f+1},\, q_0\Big),$$

где

$$q_0 = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|}.$$

Далее, если $\beta \geqslant 1$, то $\beta > \rho_f/(\rho_f+1)$ (мы предположили, что $\rho_f < \infty$). Пусть теперь $\beta < 1$. Докажем, что $\beta \geqslant \rho_f/(\rho_f+1)$. Действительно, из определения величины β имеем: для любого $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right] < (\beta+\varepsilon)\ln|\lambda_k|,$$

то есть

$$|a_k| < e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|^{\beta+\varepsilon}}, \quad \beta < 1.$$

Воспользуемся теперь леммой 1 (в ней следует положить $\tau = 0$, $h(\varphi_k) = K(-\varphi_k)$). Тогда для любого $\nu > 0$ при $d(z) < d_0(\nu)$

$$|f(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant \exp\left[\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{q+\nu}\right],$$

где $q = \beta/(1-\beta)$, $z \in G$. Так что порядок ρ_f функции не превышает $q = \beta/(1-\beta)$, то есть $\beta \geqslant \rho_f/(\rho_f+1)$.

Таким образом, теорема полностью доказана. □

Следствие 1. *Если $q_0 \leqslant \rho_f/(\rho_f+1)$, то $\rho_f/(\rho_f+1) = \beta$.*

Таким образом, левая оценка в (0.10) точна.

Отметим, что некоторые оценки типа (0.10) для порядка по Ритту

$$\rho_R = \varlimsup_{z\to\partial G} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{\frac{1}{d(z)}}$$

функции $f \in H(G,\Lambda)$ в области G ранее были получены в [6]. Ниже будет показано, что двусторонние оценки (0.10), как и соответствующие оценки для ρ_R, также неулучшаемы.

Замечание 1. При $q_0 = 0$ из оценок (0.10) формально вытекает известная формула для порядка в полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma < 0\}$ (см. [8]), ибо $\tau = 0$, а для $\lambda_k > 0$ значения $K(-\varphi_k)$ равны $K(\pi) = 0$. Отметим также, что при $q_0 = 0$ индекс конденсации (см. выше, а также в [1, глава II, §6, п. 2]) равен нулю. Однако заметим, что в случае полуплоскости показатели $\lambda_k > 0$ вообще могут и не быть нулями целой функции экспоненциального типа. В [8] показано, что выполнение лишь условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $f \in H(\Pi_0, \Lambda)$ имело место равенство

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} = \beta.$$

В этой ситуации, как видим, вообще не фигурируют ни q_0, ни τ — они могут быть любыми (не исключается возможность $q_0 = \tau = \infty$). Дело в том, что в случае Π_0 были использованы не формулы (1.9), а неравенства Коши

$$|a_k| \leqslant M(f, \sigma) e^{\lambda_k \sigma}, \quad k \geqslant 1, \tag{2.5}$$

где

$$M(f, \sigma) = \sup_{|t| < \infty} |f(\sigma + it)|, \quad \sigma < 0.$$

Для справедливости неравенств (2.5), как известно, достаточно лишь выполнения условия

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$$

(более подробно см. в [8]).

Теперь ставится вопрос о достижимости правой оценки в (0.10).

§3. Точность двусторонних оценок для порядка

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Существуют последовательность Λ, существует функция $f \in H(G, \Lambda)$, такие, что*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} < \beta = q_0.$$

Для доказательства данного утверждения нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения[1].

Уточненным порядком называется функция $\rho(r)$, $r > 0$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r \to \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \to \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Если для целой функции $\varphi(z)$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_\varphi(r)}{r^{\rho(r)}} = \sigma \neq 0, \infty, \quad M_\varphi(r) = \max_{|z| = r} |\varphi(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется уточненным порядком целой функции $\varphi(z)$, а σ — типом этой функции при уточненном порядке.

[1] По поводу сведений, приводимых ниже, более подробно см. в [9].

Пусть $n(r)$ — число точек последовательности Λ, которые лежат в круге $\{z\colon |z| \leqslant r\}$, а $n(r, \theta_1, \theta_2)$ — число точек из этого множества, лежащих в секторе $\{z\colon |z| \leqslant r,\ \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2\}$. Если $\rho(r)$ — уточненный порядок и существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \Delta,$$

то говорят, что множество Λ имеет плотность Δ при показателе $\rho(r)$. Если для всех θ_1, θ_2, за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r^{\rho(r)}} = \Delta(\theta_1,\, \theta_2),$$

то говорят, что множество Λ имеет *угловую плотность* $\Delta(\theta_1,\, \theta_2)$ при показателе $\rho(r)$.

Последовательность Λ, которая имеет угловую плотность при показателе $\rho(r)$, при ρ *нецелом* (нас будет интересовать только этот случай) называется *правильно распределенным множеством при показателе* $\rho(r)$, а последнее называется *регулярным*, если при некотором $d > 0$

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| > d|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}.$$

Индикатор (или *индикатриса*) роста целой функции $\varphi(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ определяется равенством

$$h_\varphi(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Как известно, индикатор — непрерывная функция с периодом 2π.

C_R-кружками множества Λ называются кружки

$$\bigl\{z\colon |z-\lambda_k| < d_0|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}\bigr\}, \quad d_0 > 0.$$

Верна следующая теорема (см., например, в [1, глава I, § 2, п. 6]), которую мы сформулируем, для удобства, применительно к $Q(\lambda)$, введенной выше.

Теорема А. *Если* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *— регулярное множество при показателе* $\rho(r)$, $\rho(r) \to \rho$, $r \to \infty$ *(где* ρ *— нецелое), то вне исключительных* C_R*-кружков*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|Q(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = H(\theta), \tag{3.1}$$

где

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin\pi\rho} \int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos\rho(\theta-\psi-\pi)\,d\Delta(\psi),$$

а функция $\Delta(\psi)$ *(она определяется с точностью до аддитивного слагаемого) характеризует распределение нулей* λ_k:

$$\Delta(\theta_2) - \Delta(\theta_1) = \Delta(\theta_2, \theta_1).$$

Если $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, *то для всякого* $\varepsilon > 0$

$$\ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| < -[H(\varphi_k) - \varepsilon] |\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Замечание 2 (см. [1, глава I, §2, п. 6])**.** Если $\rho_k = d_0 |\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)} \to \infty$ при $k \to \infty$, то равенство (3.1) имеет место вне кружков $\{z\colon |z - \lambda_k| < \gamma_0\}$, где $\gamma_0 > 0$ — любая фиксированная постоянная. Например, если $\rho(r) \equiv \rho$, $0 < \rho < 1$, то, очевидно, $\rho_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим кольца

$$K_n = \bigl\{ z\colon P_n < |z| < P_{n+1} \bigr\},$$

где $P_n = n^{1/\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ (γ выберем позже).

В каждом кольце K_n выберем точки λ_{nk}, расположенные по спирали, а именно положим (см. рис. 1):

$$\lambda_{nk} = [c_n + d_{nk}] e^{i\theta_{nk}}, \quad \theta_{nk} = \frac{2\pi}{n^2} k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n^2 - 1;$$

$$d_{nk} = kn^2, \quad c_n = P_n + n^2.$$

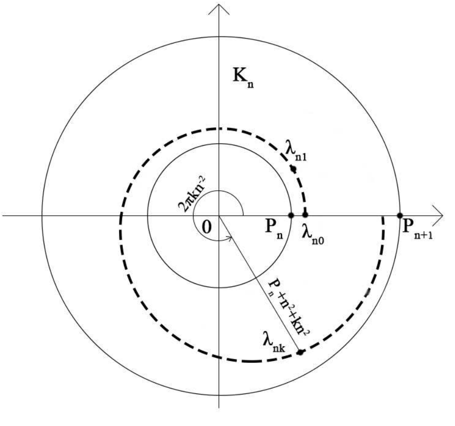

Рис. 1

Как видно, число точек λ_{nk} в кольце K_n равно n^2. Перенумеруем, упорядочивая по возрастанию, точки множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n^2-1} \{\lambda_{nk}\}$. Полученную последовательность обозначим $\Lambda_1 = \{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Подберем γ $(0 < \gamma < 1/3)$

так, чтобы последовательность Λ_1 имела плотность (отличную от 0 и ∞) при некотором показателе $\rho < 1$, а это возможно. Действительно, если $\lambda_m^{(1)} \in K_n$, то, очевидно, имеем

$$\frac{n(\lambda_m^{(1)})}{|\lambda_m^{(1)}|^\rho} \sim \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{P_n^\rho} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^{\frac{\rho}{\gamma}}} \sim \frac{1}{3}\frac{n^3}{n^{\frac{\rho}{\gamma}}}, \quad n \to \infty.$$

Значит, последовательность Λ_1 при показателе $\rho = 3\gamma$ имеет плотность, равную 1/3. Далее, если $\lambda_m^{(1)}$, $\lambda_{m+1}^{(1)}$ принадлежат K_n, то

$$|\lambda_{m+1}^{(1)}| - |\lambda_m^{(1)}| \geqslant n^2. \tag{3.3}$$

Если $\lambda_m^{(1)} \in K_n$, а $\lambda_{m+1}^{(1)} \in K_{n+1}$, то оценка (3.3), как видно, тоже будет иметь место. Далее, если

$$n^2 \geqslant |\lambda_m^{(1)}|^{1-\rho} \sim n^{(1-\rho)/\gamma}, \quad n \to \infty, \tag{3.4}$$

то, учитывая (3.3), при некотором $d_0 > 0$ получим

$$|\lambda_{m+1}^{(1)}| - |\lambda_m^{(1)}| \geqslant d_0 |\lambda_m^{(1)}|^{1-\rho}. \tag{3.5}$$

А чтобы выполнялось (3.4), потребуем, чтобы

$$2 \geqslant \frac{1}{\gamma}(1-\rho) = \frac{1}{\gamma}(1-3\gamma),$$

то есть $\gamma \geqslant 1/5$. Таким образом, при выбранном γ $(1/5 \leqslant \gamma < 1/3)$ последовательность Λ_1 имеет плотность 1/3 при показателе $\rho = 3\gamma$ и справедливы оценки (3.5) (они будут иметь место для любых $m \geqslant 1$).

По теореме о среднем, имеем:

$$P_{n+1} - P_n = (n+1)^{1/\gamma} - (n)^{1/\gamma} = \frac{1}{\gamma} c^{1/\gamma - 1}, \quad n \leqslant c \leqslant n-1.$$

Отсюда, если положить $\gamma = 1/5$,

$$P_{n+1} - P_n \geqslant \frac{1}{\gamma} n^{1/\gamma - 1} = 5n^4.$$

И тогда имеем также:

$$|\lambda_{n\,1} - P_n| = n^2 \geqslant 1, \quad P_{n+1} - |\lambda_{n\,n^2-1}| = P_{n+1} - (P_n + n^4) \geqslant 4n^4 \geqslant 1.$$

Положим теперь

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n^2-1} \Big(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{n\,k}^2}\Big).$$

Поскольку $\gamma = 1/5$, то $\rho = 3\gamma = 3/5$. Так что последовательность Λ_1 при показателе $\rho = 3/5$ имеет плотность, равную 1/3, а значит, показатель сходимости $\tau_0 = 3/5$. Так что L_1 — целая функция порядка $\rho = 3/5$ (см., например, в [5, глава I, §3, п. 5]). Более того,

$$|\lambda_{n+1}^{(1)}| - |\lambda_n^{(1)}| \geqslant d_0|\lambda_n^{(1)}|^{1-\rho} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Значит, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n^{(1)}|} = 0, \quad |\lambda_{n+1}^{(1)}| - |\lambda_n^{(1)}| \geqslant h > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Так что индекс конденсации последовательности Λ_1 равен нулю (см. в [5, глава II, §3, п. 1]):

$$\delta^{(1)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n^{(1)}|} \ln\left|\frac{1}{L_1'(\lambda_n^{(1)})}\right| = 0.$$

Далее, поскольку аргументы θ_{nk} точек λ_{nk}, таких, что $\theta_{nk} = 2\pi/(n^2k)$, равномерно распределены на отрезке $[0,\, 2\pi]$, а последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$, то существует угловая плотность

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\, \theta_1,\, \theta_2)}{r^\rho} = \Delta(\theta_1,\, \theta_2),$$

равная, очевидно,

$$\Delta(\theta_1,\, \theta_2) = \frac{1}{6\pi}(\theta_2 - \theta_1).$$

Таким образом, последовательность Λ_1 правильно распределена при показателе $\rho = 3/5$, а в силу (3.5), образует при этом показателе регулярное множество. Но $\rho_k = d_0|\lambda_k^{(1)}|^{1-\rho} \to \infty$ при $k \to \infty$. Значит, вне кружков $D_n = \{z\colon |z - \lambda_n| < 1\}$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем (см. выше):

$$\text{а) } \ln|L_1(re^{i\theta})| > [H_1(\theta) - \varepsilon]r^\rho; \quad \text{б) } \ln|L_1(re^{i\theta})| < [H_1(\theta) + \varepsilon]r^\rho, \tag{3.6}$$

где $\rho = 3/5$, $H_1(\theta)$ — индикатор функции $L_1(\lambda)$.

Поскольку $\tau_0 = \rho = 3/5$, τ_0 — нецелое, а последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$ при данном показателе ρ, то функция $L_1(\lambda)$ имеет нормальный тип σ_1 при порядке ρ (см., например, в [1, глава I, §1, п. 3]).

Введем в рассмотрение еще одну целую функцию

$$L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n^2-1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_{nk}^{(1)})^2}\right),$$

где $\lambda_{nk}^{(1)} = \lambda_{nk} + \varepsilon_{nk}$, $\varepsilon_{nk} \downarrow 0$, $n \to \infty$ (ε_{nk} позже выберем специальным образом).

Положим $Q(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda)$,

$$F(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_{nk})(\lambda - \lambda_{nk}^{(1)})}{Q(\lambda)}.$$

Если $\sum_{n,k} \varepsilon_{nk} < \infty$, то обычным образом показывается (см. [1, глава I, §2, п. 9]), что вне кружков постоянного радиуса $L_1(\lambda) \asymp L_2(\lambda)$, то есть при некоторых $0 < c_1 < c_2 < \infty$ верны оценки

$$c_1|L_1(\lambda)| \leqslant |L_2(\lambda)| \leqslant c_2|L_1(\lambda)|.$$

Следовательно, вне кружков D_n для функции $L(\lambda)$ также будут справедливы оценки типа (3.6), но с правыми частями $2[H_1(\theta) \pm \varepsilon]r^\rho$.

Далее, по принципу максимума и минимума модуля,

$$|F(\lambda_0)| = \min_{|\lambda - \lambda_{nk}|=1} |F(\lambda)| \leqslant \max_{|\lambda - \lambda_{nk}|=1} |F(\lambda)| = |F(\lambda_0^{(1)})|,$$

где $|\lambda_{nk} - \lambda_0| = |\lambda_{nk} - \lambda_0^{(1)}| = 1$. Но

$$F(\lambda_{nk}) = \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk})}, \quad F(\lambda_{nk}^{(1)}) = \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk}^{(1)})}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{|Q(\lambda_0)|} \leqslant \left|\frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_m)}\right| \leqslant 2\frac{1}{\left|Q(\lambda_0^{(1)})\right|},$$

где $\lambda_m = \lambda_{nk}$ или $\lambda_m = \lambda_{nk}^{(1)}$, $m \geqslant m_0$. Положим теперь

$$\varepsilon_{nk} = e^{-|\lambda_{nk}|^p}, \quad 0 < \rho < p < 1 \quad \rho = 3/5.$$

Тогда, учитывая оценки типа (3.6), будем иметь: для всех $m \geqslant m_0$

$$\begin{aligned} |\lambda_{nk}|^p - 2(H_1(\theta) + \varepsilon)|\lambda_m|^\rho &\leqslant \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_m)}\right| \\ &\leqslant |\lambda_{nk}|^p - 2(H_1(\theta) - \varepsilon)|\lambda_m|^\rho, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\lambda_m = \lambda_{nk}$ или $\lambda_m = \lambda_{nk}^{(1)}$. Для построенной последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \cup \{\lambda_n^{(1)}\}$ плотность при порядке 1 равна нулю, а как видно из (3.7), индекс конденсации $\delta = 0$, $q_0 = p$.

Пусть Γ_n — контур, образованный отрезками лучей

$$\{z\colon \arg z = \pm(\theta_{n_0} + \theta_{n_1})/2\}$$

и дугами окружностей

$$\{z\colon |z| = P_n\} \text{ и } \{z\colon |z| = P_{n+1}\}$$

(см. рисунок 2).

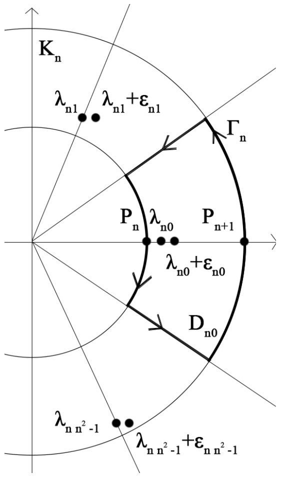

Рис. 2

Рассмотрим теперь ряд экспонент

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \tag{3.8}$$

коэффициенты которого определим следующим образом:

$$a_k=\begin{cases}\alpha_{nk}(Q'(\lambda_k))^{-1}, \quad \alpha_{nk}=e^{-h(0)|\lambda_{n_0}|}, \text{ если } \lambda_k\in D_{n0},\\ e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|}, \text{ если } \lambda_k=|\lambda_k|e^{i\varphi_k}\notin D_{n0}.\end{cases}$$

Здесь D_{n0} — область, ограниченная контуром Γ_n, $h(\varphi)=K(-\varphi)$, $K(\varphi)$ — опорная функция замыкания области G. Ясно, что G — область сходимости для ряда (3.8).

Подсчитаем, чему равна величина β. Достаточно найти β только по точкам $\lambda_n\in D_{n0}$.

Область D_{n0} содержит только две точки: λ_{n0} и $\lambda_{n0}^{(1)}=\lambda_{n0}+\varepsilon_{n0}$. Если $\lambda_k=\lambda_{n0}$, то

$$a_k=\frac{e^{-h(0)|\lambda_{n_0}|}}{|Q'(\lambda_{n0})|},$$

и поскольку $\rho<p$, то из оценок (3.7) имеем также:

$$\beta=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+[|a_k|e^{K(0)|\lambda_{n_0}|}]}{\ln|\lambda_{n0}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+\frac{1}{|Q'(\lambda_{n0})|}}{\ln|\lambda_{n0}|}=p.$$

Если $\lambda_k = \lambda_{n0}^{(1)}$, то, аналогично,

$$\beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ \frac{1}{|Q'(\lambda_{n0}^{(1)})|}}{\ln |\lambda_{n0}^{(1)}|} = p.$$

Таким образом, $\beta = p = q_0$.

Убедимся, что для ряда экспонент (3.8) $\rho_f/(\rho_f+1) < \beta = p$, где ρ_f — порядок суммы f этого ряда. Действительно, имеем

$$A_n = \sum_{\lambda_k \in D_{n0}} a_n e^{\lambda_n z} = e^{-h(0)|\lambda_{n0}|} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{e^{\xi z}}{Q(\xi)} d\xi.$$

Отсюда, учитывая первую оценку из (3.6), имеем:

$$|A_n| \leqslant e^{-h(0)|\lambda_{n0}|} e^{b|\lambda_k|^\rho} |\Gamma_n| e^{|\xi_0|(h(\varphi)-d(z))}, \tag{3.9}$$

где $\xi_0 = |\xi_0|e^{i\varphi}$ — некоторая точка контура Γ_n, а $|\Gamma_n|$ — длина Γ_n. Мы воспользовались тем, что $\mathrm{Re}(\xi_0 z) \leqslant |\xi_0|[h(\varphi)-d(z)]$, где $d(z) = \inf_{t\in\partial G} |z-t|$ (см. в [6]).

Но, как известно, (см. [5, глава II, §2, п. 5])

$$|\xi_0|h(\varphi) - |\lambda_{n0}|h(0) \leqslant |\xi_0 - \lambda_{n0}| \max_{t\in\overline{G}} |t|. \tag{3.10}$$

Далее, так как $\theta_{n1} = 2\pi n^{-2} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\begin{aligned} |\xi_0 - \lambda_{n0}| &\leqslant M(P_{n+1} - P_n) = M\big((n+1)^{1/\gamma} - n^{1/\gamma}\big) \\ &\leqslant M\frac{1}{\gamma}(n+1)^{1/\gamma-1} = M\frac{1}{\gamma}(n+1)^4 \leqslant NP_n^{4/5}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где M, N — некоторые постоянные, не зависящие от n, $0 < M < N < \infty$. Значит, принимая во внимание, что $\rho = 3/5$, и с учетом (3.10), (3.11), из (3.9) имеем:

$$|A_n| \leqslant e^{NP_n^{4/5} + KP_n^{3/5} - P_n d(z)}, \quad z \in G.$$

Так что

$$|f(z)| \leqslant B \sum_{n=1}^{\infty} e^{LP_n^{4/5} - P_n d(z)}, \quad z \in G, \tag{3.12}$$

где $L = \max(N, K)$, $0 < K < \infty$ (постоянная K не зависит от n). Теперь воспользуемся леммой 1, откуда будет следовать, что порядок ρ_f суммы ряда (3.8) удовлетворяет оценке:

$$\rho_f \leqslant q = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{4}{5}.$$

Значит, $\rho_f \leqslant 4$. Но тогда из-за возрастания функции $\rho_f/(\rho_f+1)$ получаем, что

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} \leqslant \frac{4}{5}.$$

До сих пор величина p была произвольной, но $p > 3/5$. Возьмем $p > 4/5$. Тогда $\beta = q_0 = p > 4/5$. Значит, окончательно, $\rho_f/(\rho_f+1) < \beta$. Пример построен.

Таким образом, в оценках (0.10) достигается и правая граница. □

Замечание 3. Из доказанной теоремы следует, что правая оценка для β, полученная в [4], не точна. Тем самым теорема 2 опровергает утверждение, приведенное без доказательства в [4].

Автор выражает признательность профессорам Р. С. Юлмухаметову и А. М. Гайсину за постоянное внимание к данной работе.

Список литературы

[1] Леонтьев А. Ф., *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
[2] Леонтьев А. Ф., *Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **44** (1980), №6, 1308–1328.
[3] Юлмухаметов Р. С., *Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы*, Мат. заметки **32** (1982), №1, 41–57.
[4] Гайсин А. М., Гайсина Г. А., *Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы*, Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. **162** (2019), 15–24.
[5] Леонтьев А. Ф., *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.
[6] Гайсин А. М., *Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности*, Мат. заметки **48** (1990), №3, 45–53.
[7] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ.* I, Наука, М., 1976.
[8] Гайсина Г. А., *Об одном обобщении формулы Н. В. Говорова–Мак-Лейна–М. Н. Шереметы для вычисления порядка*, Вестн. Башкир. ун-та **21** (2016), №3, 556–559.
[9] Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

Башкирский государственный университет
ул. З. Валиди, 32, 450076, Уфа, Россия
E-mail: gaisinaga@mail.ru

Поступило 13 января 2020 г.