



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Yu. Daletskii, Yu. S. Samoilenko,  
Noncommutative moments problem,  
*Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21,  
Issue 2, 72–73

<https://www.mathnet.ru/eng/faa1195>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that  
you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 27, 2025, 05:54:26



УДК 519.4

## НЕКОММУТАТИВНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

А. Ю. Далецкий, Ю. С. Самойленко

1. Пусть  $G$  — конечномерная вещественная группа Ли,  $\mathfrak{G}$  — ее алгебра Ли,  $L$  — комплексная обертывающая  $*$ -алгебра (элементы  $\mathfrak{G}$  предполагаются кососамосопряженными в  $L$ ). Пусть  $U$  — унитарное представление  $G$  в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ ,  $H \ni \Omega$  — фиксированный вектор,  $dU$  — соответствующее представление  $L$  с областью определения  $D$ .

Рассмотрим функционал  $S_{(U, \Omega)}(x) = \langle dU(x)\Omega, \Omega \rangle$ . Если  $\Omega \in D$ , он определен для всех  $x \in L$ . В этом случае будем говорить, что пара  $(U, \Omega)$  имеет все моменты. Некоммутативная проблема моментов (НПМ) заключается в следующем. Пусть задан линейный функционал  $S$  на  $L$ . При каких условиях существует обладающая всеми моментами пара  $(U, \Omega)$  такая, что  $S = S_{(U, \Omega)}$ ?

Для простейшей коммутативной группы Ли  $G = \mathbb{R}^n$   $L$  есть множество полиномов от  $n$  переменных, и поставленная задача, как следует из спектрального представления коммутирующего набора операторов, совпадает с классической степенной проблемой моментов Гамбургера.

Впервые НПМ рассматривалась на алгебре канонических коммутационных соотношений [1; 2]. В этих работах обобщался метод Рисса. Дальнейшее его обобщение и применение к НПМ на конечномерной алгебре Ли проведено в [3; 4], однако полученный критерий разрешимости НПМ сложен.

Простые достаточные условия разрешимости НПМ: положительная определенность функционала  $S$  на  $L$  и аналитические оценки  $|S(X_k^m)| \leq CM^m m!$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) для некоторого набора образующих  $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathfrak{G}$ , вытекают из ФС<sup>3</sup>-теории интегрирования представлений конечномерных алгебр Ли [5; 6].

Ниже для класса бесконечномерных алгебр Ли формулируется аналог ФС<sup>3</sup>-теоремы и вытекающие из него условия разрешимости НПМ.

2. В [7] рассматривается класс бесконечномерных алгебр Ли ( $AE$ -алгебры), каждой из которых можно поставить в соответствие локальную группу Ли, причем это соответствие обладает свойствами, аналогичными конечномерному случаю. В этот класс входят, например, банаховы алгебры Ли, их индуктивные пределы, алгебры Ли гладких токов, нильпотентные и квазинильпотентные алгебры Ли.

Пусть  $T$  — сильнонепрерывное представление  $AE$ -алгебры Ли  $\mathfrak{G}$ -кососимметричными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D$ . Предположим, что: 1) операторы  $T(x)$ ,  $x \in \mathfrak{G}$ , в существенном кососамосопряжены на  $D$ ; 2) для любого  $x \in \mathfrak{A}$ , где  $\mathfrak{A}$  — некоторое плотное в  $\mathfrak{G}$  множество, пространство аналитических векторов  $H^\omega(T(x)) \cap D$  плотно в  $H$ .

**Т е о р е м а 1.** *Условия 1), 2) достаточны для однозначной интегрируемости представления  $T$  до унитарного представления  $G_{10c}$ .*

Заметим, что условия 1) достаточно, чтобы определить унитарные операторы  $U(\exp x) = e^{\overline{T(x)}}$ . Хорошие свойства сходимости степенных рядов в  $AE$ -алгебре и условие 2) позволяют доказать равенство

$$T(Ad(\exp tx)y)u = e^{\overline{T(x)T(y)}} e^{-\overline{T(x)}}u, \\ x, y \in \mathfrak{G}, \quad u \in D.$$

Пусть теперь

$$g = \exp x, \quad f = \exp y \in G_{10c}, \quad g(t) = \exp tx, \quad g(t)f = \exp z(t).$$

Из известных формул

$$\frac{d}{dt} \exp z(t) = dL_{\exp z(t)} \int_0^1 Ad(\tau \exp z(t)) z'(t) d\tau$$

( $L$  — оператор левого сдвига),

$$\frac{d}{dt} e^{\overline{T(z(t))}}h = \int_0^1 e^{\tau \overline{T(z(t))}} \overline{T(z'(t))} e^{-\tau \overline{T(z(t))}} d\tau \cdot e^{\overline{T(z(t))}}h, \quad h \in D,$$

следует, что функции

$$t \mapsto U(g(t)f)U(f)^{-1}h \quad \text{и} \quad t \mapsto U(g(t)f)h$$

являются решениями дифференциального уравнения  $\dot{X}(t) = T(x)X(t)$  с начальным условием  $X(0) = h$ . Это решение единственно, откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь НПМ на сепарабельной АЕ-алгебре Ли  $\mathfrak{G}$ . В отличие от конечномерного случая, в качестве ее решения будем искать представление соответствующей локальной группы  $G_{\text{loc}}$ .

Теорема 1 позволяет доказать следующее достаточное условие разрешимости НПМ, в коммутативной ситуации вытекающее из [8; 9].

**Т е о р е м а 2.** Для разрешимости НПМ на  $\mathfrak{G}$  достаточно, чтобы:

- 1)  $S$  был положительно определен на  $L$  и функционалы  $S_n(x_1, \dots, x_n) = S(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{G}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , непрерывны по каждой переменной;
- 2) для любого  $x \in \mathfrak{G}$  одномерная проблема моментов, порожденная последовательностью чисел  $a_n = S(x^n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  была однозначно разрешима;
- 3) для любого  $x \in \mathfrak{A}$  имела место оценка

$$|S(x^n)| \leq C_x M_x^n n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**З а м е ч а н и я.** 1. Если  $\mathfrak{G}$  — алгебра токов или разрешимая алгебра, в качестве  $\mathfrak{A}$  можно рассматривать не плотное, а специальным образом выбранное тотальное множество.

2. Аналитические оценки в теореме 2 можно заменить на квазианалитические.

3. Если при постановке НПМ требовать цикличности  $\Omega$ , то условия теорем 1 и 2 обеспечивают единственность решения (с точностью до унитарной эквивалентности).

4. Постановка и доказательство достаточного условия однозначной разрешимости НПМ возможны и для пары антикоммутирующих неограниченных самосопряженных операторов [10], а также для любого счетного семейства операторов, попарно коммутирующих или антикоммутирующих между собой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Woronowicz S. L.* // Repts Math. Phys.— 1970.— V. 4.— P. 135—145.
2. *Powers R. T.* // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— V. 187.— P. 261—293.
3. *Richter P.* // Wiss. Z.— 1978.— № 3.— P. 293—297.
4. *Schmüdgen K.* // Repts Math. Phys.— 1978.— V. 14.— P. 385—404.
5. *Flato M., Simon J., Snellman H., Sternheimer D.* // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.— 1972.— V. 5.— P. 424—434.
6. *Flato M., Simon J.* // J. Funct. Anal.— 1973.— V. 12.— P. 268—276.
7. *Boseck H., Czichowski G., Rudolph K.* Analysis on Topological Groups — General Lie Theory. Teubner texte Math. 1981.
8. *Костюченко А. Г., Митягин В. С.* // Труды ММО.— 1960.— Т. 8.— С. 283—316.
9. *Березанский Ю. М., Шифрин С. Н.* // Укр. мат. журн.— 1974.— Т. 23.— С. 291—306.
10. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1984.

Институт математики АН УССР

Поступило в редакцию  
27 января 1986 г.