

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Beletskii, V. L. Kushpatova, Influence of atmospheric density gradient on aerodynamic stabilization, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 70–73

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

March 18, 2025, 12:52:22



4. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде//Сб. науч.-метод. статей по теор. механ. Вып. 18. М., 1987. 75—78.
5. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М., 1976.
6. Гуревич Г. И. Теория струй идеальной жидкости. М., 1979.
7. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 1. 52—58.

Поступила в редакцию
20.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 521.11

В. В. Белецкий, В. Л. Кушпатова

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКУЮ СТАБИЛИЗАЦИЮ

Один из проектов использования космических тросовых систем предусматривает спуск с основного спутника на длинном тросе (100 км) атмосферного зонда для исследования средних слоев атмосферы и других экспериментов.

Динамика и устойчивость такой системы изучалась в ряде работ (см., например, [1—4]). Было показано, что на устойчивость движения системы в режиме атмосферного зондирования существенно влияет градиент плотности атмосферы.

В [1—4] исследовались в основном движения системы вдоль местной вертикали. Однако система может двигаться также и в режиме аэродинамической стабилизации [5], располагаясь вдоль местной горизонтали. Представляет интерес изучение влияния градиента плотности атмосферы на устойчивость такого режима движения.

Смоделируем трос невесомым несгибаемым стержнем, обладающим продольной упругостью и несущим на своем конце атмосферный зонд массы m . Предположим, что основной спутник движется по круговой орбите радиуса R_0 с угловой скоростью ω_0 и линейной скоростью $v_r = \omega_0 R_0$.

Рассмотрим движение зонда в плоскости круговой орбиты основного спутника.

Обезразмеренные уравнения движения зонда в орбитальной системе координат имеют вид [1—4]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - 3x &= -c\rho_a V \dot{x} - E \left(\frac{r-1}{r} \right) x = 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -c\rho_a V (R_0 + \dot{y}) - E \left(\frac{r-1}{r} \right) y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad V = \frac{V_r}{\omega_0 l} = \sqrt{(R_0 + \dot{y})^2 + x^2},$$

$$\rho_a = \rho_a(R), \quad R = \sqrt{(R_0 + x)^2 + y^2}.$$

В нашем случае начало координат связано с основным спутником, ось x направлена от центра Земли к основному спутнику, ось y — по касательной к круговой орбите в направлении движения. Точки обозначают производные по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$; безразмерные координаты x, y связаны с размерными x_p, y_p соотношениями $x = x_p/l, y = y_p/l$, где l — ненапряженная длина троса. Введены также безразмер-

ная величина $R_0 = \tilde{R}_0/l$ и безразмерный модуль упругости $E = E_p/m\omega_0^2 l$ (E_p — размерная величина модуля упругости), $\rho_a(R) = \rho/\rho_0$ — безразмерная плотность атмосферы. Безразмерный коэффициент $c = \frac{c_0 \rho_0 s l}{m}$, где s — характерная площадь зонда, ρ_0 — плотность атмосферы на орбите основного спутника, c_0 — безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления.

Уравнения (1) учитывают силы инерционные, гравитационного градиента, упругие и аэродинамические. В аэродинамических силах учтена зависимость плотности атмосферы от радиального расстояния R от центра Земли до рассматриваемой точки (зонда).

Уравнения (1) имеют стационарное решение:

$$x_0 = 0, |y_0| = \frac{cR_0^2 \rho_a}{E} + 1, y_0 < 0. \quad (2)$$

Рассмотрим стационарное решение (2) при условии $y_0 < 0$. Это решение описывает движение, в котором стержень с массой на конце расположен по потоку. Такое движение типично для спутников с аэродинамической системой пассивной стабилизации, силы гравитационного градиента являются в этом случае дестабилизирующим фактором.

Атмосферный зонд в рассматриваемом случае играет роль аэродинамического стабилизатора.

Варьируя (1) около решения (2), получим уравнение в вариациях (в матричной форме):

$$\begin{pmatrix} \delta \ddot{x} \\ \delta \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\delta \dot{y} \\ \delta \dot{x} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ 2\delta \dot{y} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\beta = c\rho_a R_0, r_0 = \frac{\beta R_0}{E} + 1,$$

$$a_{11} = E \frac{r_0 - 1}{r_0} - 3, a_{12} = 0, \quad (3)$$

$$a_{21} = \kappa = c \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 R_0^2 < 0, a_{22} = E.$$

Характеристическое уравнение системы (3) имеет общий вид

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

со следующими значениями коэффициентов:

$$a_1 = 3\beta, a_2 = 2\beta^2 + \frac{\beta R_0}{r_0} + E + 1,$$

$$a_3 = 2\beta \left(\frac{\beta R_0}{r_0} - 3 \right) + \beta E + 2\kappa, a_4 = E \left(\frac{\beta R_0}{r_0} - 3 \right).$$

Условия асимптотической устойчивости Рауса—Гурвица могут быть записаны в виде

$$a_1 > 0, a_4 > 0, \frac{a_3}{a_1} = \alpha > 0, a_4 < a_2 \alpha - \alpha^2$$

или явным образом:

$$\beta > 0, \frac{\beta R_0}{r_0} > 3, \left(\frac{\beta R_0}{r_0} - 3 \right) + \frac{E}{2} + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} > 0, \\ \left(\frac{\beta R_0}{r_0} - 3 \right) + \frac{E}{2} + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} > \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{9 \left(\frac{\beta R_0}{r_0} - 3 \right) E}{2 \left[6\beta^2 + \frac{\beta R_0}{r_0} + 2E + 9 - 2 \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} \right]} > 0.$$

Первое из условий (4) выполнено с очевидностью; второе означает преобладание стабилизирующего аэродинамического влияния над дестабилизирующим гравитационным. Третье условие перекрывается четвертым. Четвертое можно трактовать как требование выполнения третьего условия с некоторым запасом. Оно заведомо выполнено для абсолютно жесткого стержня, т. е. при $E \rightarrow \infty$.

Самым интересным является третье условие. Оно показывает, что в случае упругого стержня наличие аэродинамического градиента может привести к неустойчивости системы. Достаточно нарушить третье из условий (4), чтобы система потеряла устойчивость.

Иначе говоря, режим аэродинамической стабилизации неустойчив, если

$$\left(\frac{\beta R_0}{r_0} - 3 \right) + \frac{E}{2} + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} < 0. \quad (5)$$

Запишем неравенство (5) в виде

$$E^2 + E(3\beta R_0 - 6 - 2a) - 2\beta R_0(3 + a) \leq 0, \quad (6)$$

где

$$a_0 = \left| \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} \right|, \quad r_0 = \frac{\beta R_0}{E} + 1.$$

Обозначим $b = 2(3 + a)$, $\tilde{\beta} = \beta R$. Перепишем неравенство (6):

$$E^2 + E(3\tilde{\beta} - b) - \tilde{\beta}b \leq 0, \quad (7)$$

откуда выразим $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta} \leq \frac{E(b - E)}{3E - b}.$$

Область неустойчивости ограничена кривой

$$\tilde{\beta} = \frac{E(b - E)}{3E - b}.$$

На рисунке эта область неустойчивости изображена (заштрихована) в плоскости $E, \tilde{\beta}$ при фиксированном значении параметра a . Отметим, что второе из условий (4) приводится к виду $\hat{\beta} > \frac{3E}{E - 3}$, из чего следует существование другой области неустойчивости (также заштрихованной на рисунке).

Условие

$$E > 2 \left| \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} \right| \quad (8)$$

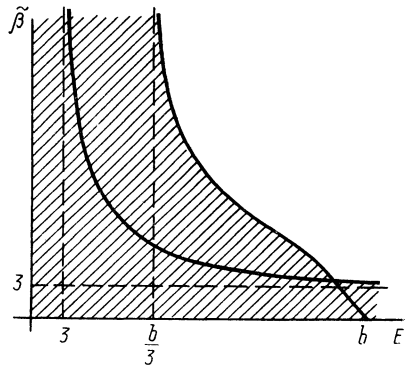
обеспечивает выполнение третьего из условий (4).

Аналогичное условие для «почти вертикального» троса (в задаче зондирования) имеет вид [1—4]

$$E > \left| \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial R} \right)_0 \frac{R_0}{\rho_a} \right|. \quad (9)$$

Сравнение неравенств (8) и (9) показывает, что условие (8) более жесткое, чем аналогичное требование для «вертикального» зонда. Это приводит, например, к удвоению требуемого диаметра троса или к уменьшению в два раза «критической» длины троса и т. п.

Однако условие (8) завышено и может быть смягчено за счет достаточно большого значения члена $\frac{\beta R_0}{r_0}$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Е. М. Об устойчивости стационарных движений связки двух тел на орбите под действием гравитационных и аэродинамических сил // Космич. исследования. 1984. 22, вып. 5. 675—682.
2. Белецкий В. В. Динамика космических тросовых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1: Общая и прикладная механика. М., 1987. 226—241.
3. Белецкий В. В. Прикладные задачи устойчивости. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 121. М., 1990.
4. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М., 1990.
5. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники: Исследование космического пространства. Т. 11. М., 1978. 5—79.

Поступила в редакцию
15.07.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 629.7.052

А. А. Голован, Н. А. Парусников

О СПОСОБАХ ВЫДЕЛЕНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕР УПРАВЛЯЕМОСТИ

При построении практических алгоритмов оценивания и управления линейных динамических систем значительную роль играют характеристики, выявляющие качество наблюдения или управления системой. Проблема введения характеристик наблюдаемости обсуждалась в [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются некоторые характеристики управляемости. Их смысл по существу состоит в выявлении в управляемой системе скрытых малых параметров.

Эти результаты докладывались авторами на различных конференциях и семинарах, но не были в свое время опубликованы. Отметим также конструктивный подход к построению мер управляемости, содержащийся в [3].