Доклады Академии наук
1992. Том 326, № 6

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

© М.З. БЕРКОЛАЙКО, И.Я. НОВИКОВ

О БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИХ ПОЧТИ-ВСПЛЕСКАХ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

(Представлено академиком С.М. Никольским 22 V 1992)

В 1985 г. И. Мейер построил бесконечно гладкую функцию $\psi(t)$, $t \in R^1$, с компактным спектром, такую, что система $2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, $j, k \in Z$, образует ортонормированный базис в $L_2(R^1)$ [1]. Вслед за К.И. Осколковым мы будем называть подобные функции всплесками. В настоящее время известны всплески Лемари–Беттла, убывающие на бесконечности экспоненциально [2, 3], и всплески Добеши с компактным носителем [4]. Однако эти функции имеют конечную гладкость. Насколько нам известно, вопрос о существовании бесконечно гладких всплесков с компактным носителем остается открытым.

Мы предлагаем здесь систему бесконечно гладких функций $\Psi := \{\varphi_{0k}, \psi_{jk}, j = 0, 1, \ldots; k \in Z\}$, обладающую следующими свойствами:

1) Ψ является ортонормированным базисом в $L_2(R^1)$;

2) $\varphi_{0k}(t) = \varphi_{00}(t-k)$, $\psi_{jk}(t) = \psi_{j0}(t - 2^{-j}k)$;

3) $\operatorname{supp}\varphi_{00} = [-3, 0]$; $\operatorname{supp}\psi_{j0} = [-(4j+5)\cdot 2^{-j-1}, 2^{-j-1}]$.

В отличие от всплесков, система Ψ не порождается сжатиями и сдвигами одной функции. Однако длина носителя функций ψ_{jk} стремится к нулю с ростом j (в системах всплесков Добеши это обеспечивалось сжатиями) и при каждом фиксированном j функции ψ_{jk}, $k \neq 0$, получаются сдвигами ψ_{j0}. Эти свойства позволяют нам назвать систему Ψ системой почти-всплесков. Отметим, что в заметке при помощи сжатий и сдвигов рекуррентно определена последовательность ступенчатых функций, поточечно и в $L_2(R^1)$ сходящаяся к почти-всплескам.

При построении почти-всплесков использованы многочлены, являющиеся основой конструкции всплесков Добеши. Интересным представляется тот факт, что почти-всплески оказываются свертками атомарных функций Рвачева [5] с бесконечными произведениями некоторых тригонометрических полиномов. Подробнее об этом см. в комментариях.

Конструкция системы Ψ. Пусть $N = 1, 2, 3, \ldots$ Определим функции

$$m_N(\xi) := \left(\frac{1+e^{i\xi}}{2}\right)^N Q_N(e^{i\xi}), \qquad \xi \in R^1,$$

где полином

$$Q_N(\xi) = \sum_{l=0}^{N-1} q_N(l)\xi^l, \qquad q_N(0) \neq 0,$$

удовлетворяет тождеству

$$|Q_N(e^{i\xi})|^2 = \sum_{l=0}^{N-1}\binom{N-1+l}{l}\sin^{2l}\frac{\xi}{2}$$

и выбран так же, как в [4]. Функции $m_N(\xi)$ удовлетворяют тождеству

(1) $\quad |m_N(\xi)|^2 + |m_N(\xi+\pi)|^2 = 1, \quad \xi \in R^1.$

Символами F и F^{-1} будем обозначать прямое и обратное преобразование Фурье.

Можно показать, что бесконечные произведения

$$G_j(\xi) := \prod_{N=j+1}^{\infty} m_N(2^{-N}\xi), \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

сходятся абсолютно для любого $\xi \in R^1$, причем сходимость равномерна на любом ограниченном множестве. Более того,

(2) $$|G_j(\xi)| \leqslant \begin{cases} 1, |\xi| \leqslant 2^j, \\ |\xi|^{-\alpha \ln|\xi|}, \quad |\xi| > 2^j; \end{cases}$$

где α – положительная константа, зависящая только от j. Положим

$$\varphi_j(t) := (2\pi)^{-1/2} \cdot 2^{-j/2}(F^{-1}G_j)(t), \quad j = 0,1,2,\ldots$$

В силу (2) это определение корректно. Пусть

$$\varphi_{jk}(t) := \varphi_j(t - 2^{-j}k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Определим функции $\psi_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, через образы Фурье:

$$F\psi_j(\xi) = 2^{1/2} e^{-i(2^{-j-1}\xi+\pi)} m_{j+1}(2^{-j-1}\xi+\pi) F\varphi_{j+1}(\xi), \quad \xi \in R^1.$$

В силу (1), (2) это определение корректно. Рассмотрим функции

$$\psi_{jk}(t) = \psi_j(t - 2^{-j}k), \quad j = 0,1,2,\ldots; \ k \in \mathbf{Z},$$

и обозначим

$$\Psi := \{\varphi_{0k}, \psi_{jk};\ j = 0,1,2,\ldots;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Свойства системы Ψ. Из (1) и (2) следует

Лемма 1. *Функции* φ_{jk} *и* ψ_{jk}, $j = 0, 1, 2, \ldots$; $k \in \mathbf{Z}$, *являются бесконечно гладкими.*

Лемма 2. *Для любых* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *и любых* k *и* k' *из* $\mathbf{Z}$

$$(\varphi_{jk}, \varphi_{jk'}) = \delta_{kk'},$$

(3) $$(\psi_{jk}, \psi_{jk'}) = \delta_{kk'}, \quad (\varphi_{jk}, \psi_{jk'}) = 0.$$

Здесь (f,g) – *скалярное произведение в* $L_2(R^1)$; $\delta_{kk'}$ – *символ Кронекера.*

Пусть $[x_l,\ l \in L]$ обозначает замыкание в $L_2(R^1)$ линейной оболочки системы $\{x_l,\ l \in L\}$, L – некоторое множество индексов. Рассмотрим подпространства

$$V_j := [\varphi_{jk},\ k \in \mathbf{Z}], \quad W_j := [\psi_{jk},\ k \in \mathbf{Z}], \quad j = 0,1,2,\ldots$$

В силу леммы 2 последовательности $\{\varphi_{jk}, k \in \mathbf{Z}\}$ и $\{\psi_{jk}, k \in \mathbf{Z}\}$ являются ортонормированными базисами в V_j и W_j соответственно.

Лемма 3. *Для любого* $j = 0, 1, 2, \ldots$

(4) $\quad V_j \subset V_{j+1}, \quad V_j \oplus W_j = V_{j+1}.$

Кроме того,

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(R^1).$$

Л е м м а 4. *Для любой функции* $f \in L_2(R^1)$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |(f,\varphi_{0k})|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |(f,\psi_{jk})|^2 = \|f\|_{L_2(R^1)}.$$

Пусть $j = 0, 1, 2, \ldots$; $r = 1, 2, \ldots$ Обозначим

$$\eta_{r,0}^{(j)}(t) := 2^{j/2} \kappa_{(-2^{-j-1},\, 2^{-j-1})}(t),$$

где $\kappa_e(t)$ – характеристическая функция множества e. Определим рекурсивно функции $\eta_{r,\nu}^{(j)}$, $\nu = 1, \ldots, r$:

$$\eta_{r,\nu}^{(j)} := \sqrt{2} \sum_{l=0}^{2j+2r+1-2\nu} h_{j+r+1-\nu}(l)\, \eta_{r,\nu-1}^{(j)}(2t + 2^{-j} l),$$

где числа $h_N(l)$, $l = 0, 1, \ldots, 2N-1$, определяются тождеством

$$m_N(\xi) = 2^{-1/2} \sum_{l=0}^{2N-1} h_N(l)\, e^{il\xi}.$$

Л е м м а 5. *Для любого* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *функции* $\eta_{r,r}^{(j)}$ *сходятся при* $r \to \infty$ *к* φ_j *поточечно и в* $L_2(R^1)$.

Из леммы 5 следует

Л е м м а 6. *Функции* φ_j *и* ψ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *имеют компактный носитель*:

$\operatorname{supp} \varphi_j = [-(2j+3) \cdot 2^{-j}, 0]$;

$\operatorname{supp} \psi_j = [-(4j+5) \cdot 2^{-j-1}, 2^{-j-1}]$.

Из лемм 1, 2, 4, 6 следует

Т е о р е м а. *Система* Ψ, *состоящая из бесконечно гладких функций с компактными носителями, образует ортонормированный базис в* $L_2(R^1)$.

К о м м е н т а р и и. 1. Пусть $N = 1, 2, 3, \ldots$ В работе [4] рассмотрены функции

$$\Phi_1^{(N)}(t) = (2\pi)^{-1/2}\left(F^{-1}\left(\prod_{l=1}^{\infty} m_N(2^{-l}\xi)\right)\right)(t),$$

$$\Phi_2^{(N)}(t) = (2\pi)^{1/2} \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} g_N(\nu)\, \Phi_1^{(N)}(2t+\nu),$$

где

$$g_N(\nu) := (-1)^\nu h_N(-\nu+1), \qquad \nu \in \mathbf{Z}.$$

Там же доказано, что система функций

$$\{2^{j/2} \Phi_2^{(N)}(2^j t - k),\ j \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}\}$$

является ортонормированным базисом в $L_2(R^1)$ и

$$\operatorname{supp} \Phi_2^{(N)} = [-N+1, N].$$

Кроме того, гладкость функций $\Phi_1^{(N)}$, $\Phi_2^{(N)}$ возрастает с ростом N.

2. Используя формулу

$$\prod_{N=1}^{\infty} \cos(2^{-N}\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi},$$

можно показать, что для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$F\varphi_j(\xi) =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \cdot 2^{-j/2} e^{i \cdot 2^{-j-1}(j+2)\xi} \cdot R_j(\xi) \cdot \prod_{N=j+1}^{\infty} Q_N(2^{-N}\xi),$$

где

$$R_j(\xi) = \left(\frac{\sin 2^{-j-1}\xi}{2^{-j-1}\xi}\right)^{j+1} \prod_{N=j+2}^{\infty} \frac{\sin 2^{-N}\xi}{2^{-N}\xi}.$$

Функции

$$\mathrm{up}_j(t) = (2\pi)^{-1/2}(F^{-1}R_j)(t), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots ,$$

введены и подробно изучены в [5].

Из комментариев 1 и 2 следует, что наш подход развивает идеи работ [4, 5].

3. Построение функций ψ_{jk}, $j = 0, 1, 2, \ldots$; $k \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих [3, 4], использует принципы анализа мультиприближений [6].

4. Рассматривая тензорные произведения функций из системы Ψ, можно построить ортонормированный базис в $L_2(R^n)$, $n > 1$, состоящий из бесконечно гладких почти-всплесков с компактными носителями. Пусть $E = \{\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)\colon \epsilon \neq 0$, $\epsilon_\lambda = 0, 1;\ \lambda = 1, \ldots, n\}$. $\psi_j^{(1)} := \psi_j$, $\psi_j^{(0)} := \varphi_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим функции

$$\psi_{0k}^{(0)}(x) = \prod_{\lambda=1}^{n} \psi_0^{(0)}(x_\lambda - k_\lambda),$$

$$\psi_{jk}^{(\epsilon)}(x) = \prod_{\lambda=1}^{n} \psi_j^{(\epsilon_\lambda)}(x_\lambda - 2^{-j}k_\lambda),$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots;\quad k_\lambda \in \mathbf{Z},\quad \epsilon \in E;\quad x = (x_1, \ldots, x_n);\quad k = (k_1, \ldots, k_n).$$

Нетрудно показать, что система функций

$$\{\psi_{0k}^{(0)},\ \psi_{jk}^{(\epsilon)},\quad j = 0, 1, \ldots,\ k \in \mathbf{Z}^n,\ \epsilon \in E\}$$

образует ортонормированный базис в $L_2(R^n)$, $n \geqslant 2$.

5. Интересно исследовать базисность системы Ψ в пространствах Бесова и Лизоркина–Трибеля. Авторы намерены посвятить этому отдельную статью.

Воронежский инженерно-строительный институт
Воронежский государственный университет

Поступило
1 VI 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meyer Y.* – Sem. Bourbaki, 1985/1986, № 662, p. 1–15. 2. *Battle G.* – Comm. Math. Phys., 1987, vol. 110, p. 601–615. 3. *Lemarie P.G.* – J. Math. Pures Appl., 1988, vol. 67, p. 227–236. 4. *Daubechies I.* – Comm. Pure Appl. Math., 1987, vol. 41, p. 909–996. 5. *Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* Неклассические методы теории приближения в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1979. 196 с. 6. *Mallat S.G.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1989, vol. 315, p. 69–87.