

© 2014 г.

Н. М. Боголюбов*[†]

КОМБИНАТОРИКА СИЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ БОЗОННОЙ СИСТЕМЫ

Квантовая фазовая модель введена как предел сильной связи сильно коррелированной q -бозонной обменной модели. Описано общее решение модели, а скалярные произведения векторов состояния представлены в детерминантной форме. Представление векторов состояния через функции Шура позволило получить комбинаторную интерпретацию скалярных произведений в терминах наборов самоизбегающих решеточных путей. Показано, что при специальной параметризации скалярные произведения представляют собой производящие функции плоских разбиений, заключенных в ящике конечного размера. Рассмотрена двумерная вершинная модель, связанная с фазовой моделью. Статистическая сумма вершинной модели при специальных граничных условиях выражена через скалярное произведение векторов состояния фазовой модели.

Ключевые слова: сильно взаимодействующие бозоны, скалярные произведения, самоизбегающие пути, плоские разбиения.

DOI: 10.4213/tmf8703

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение квантовых точно решаемых моделей в рамках квантового метода обратной задачи [1]–[3] привело к появлению алгебраических структур, которые являются q -деформациями универсальных обертывающих алгебр [4]–[6]. Эти деформированные структуры обычно называются *квантовыми группами* или *квантовыми алгебрами*. Квантовые группы появляются во многих современных проблемах математической физики, среди которых квантовые интегрируемые q -деформированные модели – модели, динамическими переменными которых являются q -деформированные структуры, – занимают заметное место.

Интегрируемые модели q -бозонного типа имеют отношение ко многим математическим проблемам. Они связаны как с теорией симметрических функций [7], так и с теорией плоских разбиений [8], [9]. Они находят применение в низкоразмерной

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: bogoliub@yahoo.com

[†]Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

неравновесной физике [10]–[12] и в топологических калибровочных теориях [13]–[15]. В свою очередь, топологические калибровочные теории находят применение в теории топологических квантовых вычислений [16].

В настоящей статье мы обсудим комбинаторику квантовой интегрируемой модели на решетке, динамическими переменными которой являются *фазовые операторы*. Фазовые операторы представляют собой предел бесконечной связи q -бозонных операторов [17]. Интегрируемая q -бозонная модель была введена и решена в работах [18]–[20]. Корреляционные функции фазовой модели были изучены в статьях [21], [22].

В разделах 2, 3 мы даем обзор фазовой модели и приводим ее решение в рамках квантового метода обратной задачи [1]–[3], [23]. В разделе 4 изучаются скалярные произведения векторов состояния с точки зрения теории симметрических функций [24] и перечислительной комбинаторики [25]. Двумерная классическая вершинная модель, связанная с фазовой моделью, рассмотрена в разделе 5.

2. q -БОЗОННАЯ РЕШЕТКА

Обменная q -бозонная модель с периодическими граничными условиями $n+M = n$ определяется гамильтонианом [18]–[20]:

$$\widehat{H}_q = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M (B_n^\dagger B_{n+1} + B_n B_{n+1}^\dagger - 2N_n), \quad (1)$$

где B_n , B_n^\dagger и $N_n = N_n^\dagger$ – три независимых оператора q -бозонной алгебры:

$$[N_i, B_j^\dagger] = B_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [N_i, B_j] = -B_i \delta_{ij}, \quad [B_i, B_j^\dagger] = q^{-2N_i} \delta_{ij}. \quad (2)$$

Параметр q можно представить в виде $q = e^\gamma$, где $\gamma > 0$ вещественно. Кажущаяся простота модели обманчива, так как нелинейное взаимодействие бозонов скрыто в коммутационных соотношениях q -бозонных операторов.

Представление q -бозонной алгебры в пространстве Фока имеет вид

$$\begin{aligned} B_j |n_0, \dots, 0_j, \dots, n_M\rangle &= 0, \\ B_j^\dagger |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle &= [n_j + 1]^{1/2} |n_0, \dots, n_j + 1, \dots, n_M\rangle, \\ B_j |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle &= [n_j]^{1/2} |n_0, \dots, n_j - 1, \dots, n_M\rangle, \\ \widehat{N}_j |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle &= n_j |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Векторы (состояния) Фока $|n_1, \dots, n_M\rangle$ ортогональны, $\langle p_1, \dots, p_M | n_1, \dots, n_M \rangle = \delta_{p_1 n_1} \dots \delta_{p_M n_M}$, и строятся из вакуумного состояния

$$|0\rangle = |0, \dots, 0\rangle \equiv \prod_{j=0}^M |0\rangle_j \quad (4)$$

действием на него операторами B_j^\dagger :

$$|n_0, \dots, n_M\rangle = \prod_{j=0}^M ([n_j]!)^{-1/2} (B_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad 0 \leq n_j \leq N, \quad \sum_{j=0}^M n_j = N.$$

Здесь $[n] = (1 - q^{-2n}) / (1 - q^{-2})$, а $[n]! = \prod_{k=1}^n [k]$.

q -Бозонные операторы могут быть выражены через канонические бозонные операторы b_j^\dagger, b_j , которые удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$:

$$B_j = (B_j^\dagger)^\dagger = \sqrt{\frac{[N_j + 1]}{N_j + 1}} b_j, \quad N_j = b_j^\dagger b_j.$$

При $q \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow 0$) q -бозоны становятся обычными бозонами, $B_j \rightarrow b_j$, $B_j^\dagger \rightarrow b_j^\dagger$, а q -бозонная модель сводится к линейной бозонной обменной модели с гамильтонианом

$$\widehat{H}_b = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M (b_n^\dagger b_{n+1} + b_n b_{n+1}^\dagger - 2N_n).$$

В пределе сильной связи $q = \infty$ ($\gamma = \infty$) q -бозонные операторы преобразуются в операторы ϕ, ϕ^\dagger, N с коммутационными соотношениями

$$[N_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}, \quad [N_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij}, \quad (5)$$

где π_j – вакуумный проектор $\pi_j = (|0\rangle\langle 0|)_j$. В этом пределе q -бозонный гамильтониан имеет вид

$$\widehat{H}_{\text{ph}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^M (\phi_n^\dagger \phi_{n+1} + \phi_n \phi_{n+1}^\dagger - 2N_n). \quad (6)$$

Этот гамильтониан называется гамильтонианом *фазовой модели*. Введенный оператор ϕ является изометрическим и удовлетворяет соотношениям

$$\phi_j \phi_j^\dagger = 1, \quad \phi_j^\dagger \phi_j = 1 - \pi_j.$$

Операторы экспоненциальной фазы ϕ_j, ϕ_j^\dagger [26] могут быть представлены через обыкновенные бозоны:

$$\phi_j = (N_j + 1)^{-1/2} b_j, \quad \phi_j^\dagger = b_j^\dagger (N_j + 1)^{-1/2}, \quad N_j = b_j^\dagger b_j.$$

В непрерывном пределе $n\delta \rightarrow x$, $M\delta \rightarrow L$ при стремлении постоянной решетки к нулю, $\delta \rightarrow 0$, q -бозонный гамильтониан становится гамильтонианом непрерывного бозе-газа:

$$\widehat{H}_{\text{BG}} = \int_0^L \left\{ \psi^\dagger(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x) + \frac{g}{2} \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right\} dx.$$

3. ФАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

Опишем решение фазовой модели, определяемой гамильтонианом (6). Представление алгебры фазовых операторов (5) в пространстве Фока следует из (3):

$$\begin{aligned} \phi_j |n_0, \dots, 0_j, \dots, n_M\rangle &= 0, \\ \phi_j^\dagger |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle &= |n_0, \dots, n_j + 1, \dots, n_M\rangle, \\ \phi_j |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle &= |n_0, \dots, n_j - 1, \dots, n_M\rangle, \\ \widehat{N}_j |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle &= n_j |n_0, \dots, n_j, \dots, n_M\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$|n_0, \dots, n_M\rangle = \prod_{j=0}^M (\phi_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad 0 \leq n_j \leq N, \quad \sum_{j=0}^M n_j = N,$$

а вакуумное состояние $|0\rangle$ задается равенством (4).

Рассмотрим набор N частиц на периодической одномерной решетке длины $M+1$ с пронумерованными узлами $i = M, M-1, \dots, 1, 0$. В каждом узле решетки может находиться произвольное число частиц, динамика которых определяется следующим правилом: произвольно выбранная частица может перескакивать в соседний узел направо или налево с равной вероятностью $1/2$. Любая конфигурация частиц может быть представлена последовательностью $\{n\} \equiv (n_0, n_1, \dots, n_M)$ чисел заполнения n_j , которые удовлетворяют условию $0 \leq n_0, n_1, \dots, n_M \leq N$, $n_0 + n_1 + \dots + n_M = N$. Представляя конфигурации частиц в виде векторов Фока $|n_0, \dots, n_M\rangle$, мы можем выразить генератор данного обменного процесса в виде гамильтониана фазовой модели (6).

Собственные векторы и собственные числа фазовой модели были найдены с помощью квантового метода обратной задачи [1]–[3], [23] в статьях [18]–[20]. L -оператор модели имеет вид

$$L(n | u) = \begin{pmatrix} u^{-1} & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & u \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где параметр $u \in \mathbb{C}$. Этот L -оператор удовлетворяет сплетающему соотношению

$$R(u, v)(L(n | u) \otimes L(n | v)) = (L(n | v) \otimes L(n | u))R(u, v)$$

с R -матрицей

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $f(v, u) = u^2/(u^2 - v^2)$ и $g(v, u) = uv/(u^2 - v^2)$. Матрица монодромии фазовой модели представима в виде произведения L -операторов:

$$T(u) = L(M | u) \cdots L(1 | u)L(0 | u) \equiv \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

причем коммутационные соотношения ее матричных элементов A , B , C и D задаются R -матрицей фазовой модели

$$R(u, v)(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))R(u, v). \quad (11)$$

Гамильтониан фазовой модели (6) может быть выражен в терминах матрицы перехода $\tau(u) = \text{tr} T(u) = A(u) + D(u)$:

$$-2\widehat{H}_{\text{ph}} = \frac{\partial u^{M+1}\tau(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0} + \frac{\partial u^{-M-1}\tau(u)}{\partial u^{-2}} \Big|_{u=\infty} - 2\widehat{N}.$$

N -частичные векторы состояния имеют вид

$$|\Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N u_j^M B(u_j) |0\rangle, \quad (12)$$

где векторное состояние $|0\rangle$ определяется равенством (4), а сопряженные векторы состояния равны соответственно

$$\langle \Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N) | = \langle 0 | \prod_{j=1}^N u_j^{-M} C(u_j). \quad (13)$$

Параметры u_i – это произвольные комплексные числа. В дальнейшем мы будем обозначать наборы K чисел жирными буквами: $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_K)$.

Используя метод алгебраического анзаца Бете [1], [23], можно показать, что векторы состояния (12) являются собственными векторами матрицы перехода, а следовательно, и гамильтониана (6), если параметры u_1, \dots, u_N удовлетворяют уравнениям Бете

$$u_n^{-2(M+N+1)} = (-1)^{N-1} U, \quad U = \prod_{j=1}^N u_j^{-2}. \quad (14)$$

Собственные энергии гамильтониана (6) равны

$$E_N = \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{u_k^2 + u_k^{-2}}{2} \right). \quad (15)$$

Используя явные выражения для операторов $B(u)$ и $C(u)$ [8], можно представить векторы состояния (12) и (13) в “координатном” виде

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \sum_{\lambda \subseteq \{M^N\}} S_\lambda(\mathbf{u}^2) (\phi_M^\dagger)^{n_M} \dots (\phi_1^\dagger)^{n_1} (\phi_0^\dagger)^{n_0} |0\rangle, \quad (16)$$

где

$$S_\lambda(\mathbf{x}^2) \equiv S_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\det(x_j^{N-i+\lambda_i})}{\Delta(x)}$$

– симметрическая функция Шура, λ обозначает разбиение $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, определяемое последовательностью целых неотрицательных чисел, которые расположены в порядке нестрогого убывания $M \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$, а

$$\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$$

– определитель Вандермонда. Существует взаимно однозначное соответствие между конфигурацией чисел заполнения (n_M, \dots, n_1, n_0) , $0 \leq n_0, n_1, \dots, n_M \leq N$, $n_0 + n_1 + \dots + n_M = N$, и разбиением $\lambda = (M^{n_M}, (M-1)^{n_{M-1}}, \dots, 1^{n_1}, 0^{n_0})$, в котором каждое число S повторяется n_S раз. Суммирование в (16) проводится по всем разбиениям λ , состоящим из N частей при условии, что $N \leq M$. Соответствие между координатами частиц и частями λ_j разбиения λ приведено на рис. 1. Для того чтобы вычислить корреляционные функции, нам необходим сопряженный вектор состояния

$$\langle \Psi_N(\mathbf{u}) | = \sum_{\lambda \subseteq \{M^N\}} S_\lambda(\mathbf{u}^{-2}) \langle 0 | (\phi_M)^{n_M} \dots (\phi_1)^{n_1} (\phi_0)^{n_0}. \quad (17)$$

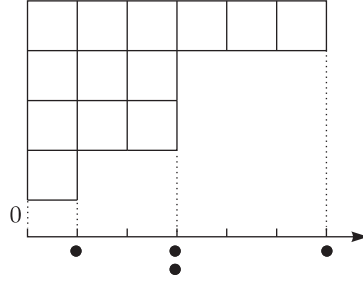


Рис. 1. Конфигурация частиц ($N = 4$) на решетке ($M = 6$) и диаграмма Юнга соответствующего разбиения.

Для вычисления корреляционных функций фазовой модели можно использовать соотношение Коши для функций Шура

$$\sum_{\lambda \subseteq \{M^N\}} S_\lambda(\mathbf{x}^2) S_\lambda(\mathbf{y}^2) = \Delta^{-1}(\mathbf{x}^2) \Delta^{-1}(\mathbf{y}^2) \det(H_{jk})_{1 \leq j, k \leq N}, \quad (18)$$

где матричные элементы $(N \times N)$ -матрицы H_{jk} равны

$$H_{jk} = \frac{1 - (x_k y_j)^{2(N+M)}}{1 - (x_k y_j)^2}$$

и суммирование идет по всем разбиениям λ , состоящим из N частей при условии, что $N \leq M$.

Скалярное произведение N -частичных векторов состояния для произвольных \mathbf{u} и \mathbf{v} дается формулой

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle &= \sum_{\lambda \subseteq \{M^N\}} S_\lambda(\mathbf{v}^{-2}) S_\lambda(\mathbf{u}^2) = \\ &= \Delta^{-1}(\mathbf{v}^{-2}) \Delta^{-1}(\mathbf{u}^2) \det \left[\frac{1 - (u_k/v_j)^{2(M+N)}}{1 - (u_k/v_j)^2} \right]_{1 \leq j, k \leq N}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для того чтобы получить q -параметризованное скалярное произведение, надо положить $\mathbf{u} = \mathbf{q} \equiv (q, q^2, \dots, q^N)$, $\mathbf{v} = \mathbf{q}/q \equiv (1, q, \dots, q^{N-1})$ в (19):

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-1/2}) \middle| \Psi_N \left(\left(\frac{\mathbf{q}}{q} \right)^{1/2} \right) \right\rangle &= \sum_{\lambda \subseteq M^N} S_\lambda(\mathbf{q}) S_\lambda \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \right) = \\ &= \Delta_N^{-1}(\mathbf{q}) \Delta_N^{-1} \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \right) \det \left(\frac{1 - q^{(M+N)(j+k-1)}}{1 - q^{(j+k-1)}} \right)_{1 \leq j, k \leq N}. \end{aligned} \quad (20)$$

Это выражение используется при вычислении амплитуд низкотемпературных асимптотик корреляционных функций в пределе, когда полное число узлов цепочки достаточно велико, $M \gg 1$, в то время как число частиц N полагается умеренным: $1 \ll N \ll M$ [21].

Определитель в правой части равенства (20) был представлен в работе [8] как определитель Куперберга [27], что позволило вычислить q -параметризованное скалярное произведение:

$$\left\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-1/2}) \middle| \Psi_N \left(\left(\frac{\mathbf{q}}{q} \right)^{1/2} \right) \right\rangle = \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{M+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}. \quad (21)$$

Отметим, что сумма функций Шура в левой части (20) может быть выражена через q -биномиальный определитель [28].

4. СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И РЕШЕТОЧНЫЕ ПУТИ

Комбинаторное описание функций Шура дается диаграммами Юнга. Заполнение клеток диаграммы Юнга формы λ целыми положительными числами $n \in \mathbb{N}^+$ называется полустандартной таблицей формы λ , если оно нестрого возрастает по строкам и строго по столбцам. Вес \mathbf{x}^T таблицы T определяется как

$$\mathbf{x}^T \equiv \prod_{i,j} x_{T_{ij}}, \quad (22)$$

где произведение берется по всем элементам T_{ij} таблицы T . Эквивалентное определение функции Шура дается равенством

$$S_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_T \mathbf{x}^T, \quad (23)$$

где $m \geq N$, а суммирование ведется по всем таблицам T формы λ , содержащим числа из набора $\{1, 2, \dots, m\}$.

Существует естественный способ представления полустандартной таблицы формы λ с элементами, не превосходящими N , в виде набора самоизбегающих решеточных путей с заданными начальными и конечными точками. Пусть T_{ij} является элементом i -й строки и j -го столбца полустандартной таблицы T . При этом i -й решеточный путь (считая с верхней строки диаграммы) кодирует i -ю строку таблицы ($i = 1, \dots, N$). Набор C состоит из путей, идущих из точек $C_i = (i, N - i)$ в точки $(N, \mu_i = \lambda_i + N - i)$ (см. рис. 2). Они делают λ_i шагов на север, причем шагу вдоль линии x_j соответствует появление буквы j в таблице T . Степень l_j переменной x_j в весе конкретного набора путей равна числу шагов на север, взятых вдоль вертикальной линии x_j . Таким образом, эквивалентное представление функции Шура имеет вид

$$S_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_C \prod_{j=1}^N x_j^{l_j}, \quad (24)$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам C .

Решеточный путь с номером k содержится в прямоугольнике размера $\lambda_k \times (N - k)$, $k = 1, \dots, N$. Началом каждого пути является нижняя левая вершина. Определим объем пути как число квадратов под путем в соответствующем прямоугольнике. Объем набора решеточных путей C равен объему его решеточных путей:

$$|\zeta|_C = \sum_{j=1}^N (N - j) l_j = \sum_{j=1}^N (j - 1) l_{N-j+1}. \quad (25)$$

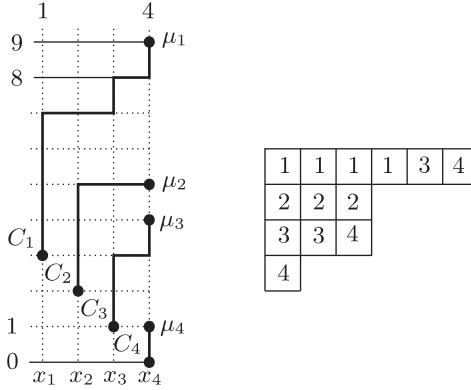


Рис. 2. Полустандартная таблица формы $\lambda = (6, 3, 3, 1)$ представлена в виде набора решеточных путей. Шаги вдоль вертикальной линии x_j соответствуют появлению буквы j в таблице.

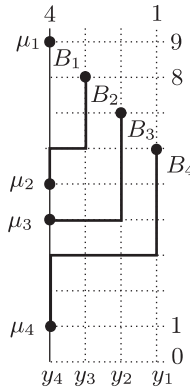


Рис. 3. Сопряженный набор решеточных путей.

Из этого определения следует, что q -параметризованная функция Шура является статистической суммой описанных наборов:

$$S_\lambda\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right) = \sum_C q^{|\zeta|_C}, \tag{26}$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам C . Добавляя вес разбиения $|\lambda| = \sum_{k=1}^N \lambda_k$ к объему набора, мы получим, что

$$|\xi|_C = |\lambda| + |\zeta|_C = \sum_{j=1}^N (N - j + 1)l_j = \sum_{j=1}^N j l_{N-j+1}, \tag{27}$$

и

$$S_\lambda(\mathbf{q}) = \sum_C q^{|\xi|_C} = q^{|\lambda|} \sum_C q^{|\zeta|_C} = q^{|\lambda|} S_\lambda\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right). \tag{28}$$

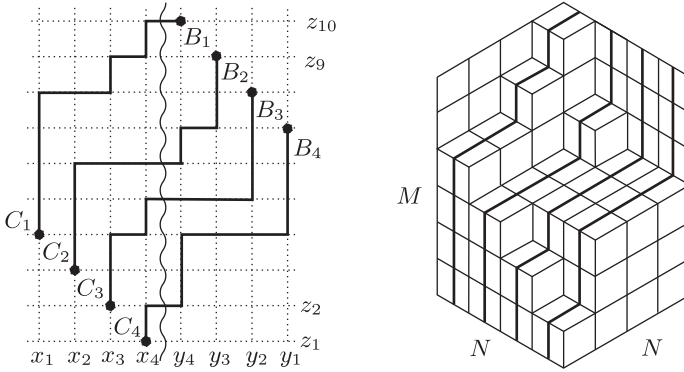


Рис. 4. Конфигурация типа арбуз и соответствующее плоское разбиение.

Рассмотрим *сопряженный* набор самоизбегающих путей (см. рис. 3), идущих из точек $(N, \mu_i = \lambda_i + N - i)$ в точки $B_i = (N - i + 1, N + M - i)$. Путь с номером i содержит $M - \lambda_i$ шагов на север. Представление функции Шура, соответствующей описанному набору, имеет вид

$$S_\lambda(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_B \prod_{j=1}^N y_j^{(M-l_j)}, \quad (29)$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам путей B , состоящим из N самоизбегающих путей. Путь с номером k содержится в прямоугольнике размера $(k - 1) \times (M - \lambda_k)$, $k = 1, \dots, N$. Конечными точками каждого пути являются верхние правые точки. Объем пути равен числу квадратов под путем в соответствующем прямоугольнике. Объем набора B решеточных путей дается следующим выражением:

$$|\zeta|_B = \sum_{j=1}^N (j - 1)(M - l_j). \quad (30)$$

Из представлений (24) и (29) следует, что число наборов самоизбегающих путей типов B или C равно

$$S_\lambda(1, \dots, 1) = \sum_B 1 = \sum_C 1. \quad (31)$$

Слагаемое в скалярном произведении (19), будучи произведением двух функций Шура, может быть представлено графически как набор, состоящий из N самоизбегающих путей, стартующих в эквидистантных точках C_i и заканчивающихся в эквидистантных точках B_i , $i = 1, \dots, N$. Эти конфигурации, известные как *арбузы* [29], представлены на рис. 4. Скалярное произведение (19) есть сумма всех таких арбузов. Повторяя аргументы, приведенные при выводе объемов решеточных путей, можно показать, что объем арбуза равен

$$|w| = |\xi|_C + |\zeta|_B. \quad (32)$$

Статистическая сумма арбузов (производящая функция арбузов) равна по построению q -параметризованному скалярному произведению (20):

$$W(N, M) = \sum_W q^{|w|} = \sum_{\lambda \subseteq M^N} S_\lambda(\mathbf{q}) S_\lambda\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right) = \left\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-1/2}) \left| \Psi_N\left(\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right)^{1/2}\right) \right. \right\rangle, \quad (33)$$

где сумма берется по всем арбузам с фиксированными конечными точками $C_i, B_i, 1 \leq i \leq N$.

Для того чтобы связать арбузы с полустандартными таблицами, следует прочесть конфигурацию арбузного типа следующим образом. Путь с номером i (считая снизу) делает $\lambda_i = N$ шагов на восток. Степень m_j переменной z_j в весе равна числу шагов на восток вдоль горизонтальной линии z_j . Таблица Юнга такой конфигурации представляет собой прямоугольник размера $N \times N$. Функция Шура арбуза имеет вид

$$S_{\mathbf{N}}(z_1, z_2, \dots, z_{N+M}) = \sum_W \prod_{j=1}^{N+M} z_j^{m_j}, \quad (34)$$

где суммирование ведется по всем допустимым арбузам, а \mathbf{N} – разбиение (N, N, \dots, N) длины N , т. е. $\mathbf{N} = N^N$ в наших обозначениях. Объем арбуза равен

$$|w| = \sum_{j=1}^{M+N} (j-1)m_j - \frac{N^2(N-1)}{2}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что статистическая сумма арбуза выражается через q -параметризованную функцию Шура (34):

$$W(N, M) = q^{-N^2(N-1)/2} S_{\mathbf{N}}(1, q^2, \dots, q^{N+M-1}). \quad (36)$$

Эту функцию легко вычислить с помощью хорошо известной формулы (см. [24], глава 1, пример 1):

$$S_\lambda(1, q^2, \dots, q^{m-1}) = q^{n(\lambda)} \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1 - q^{\lambda_i - \lambda_j - i + j}}{1 - q^{j-i}}, \quad (37)$$

где $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$. Причем если $m > N$, то $\lambda_i = 0$ для $i > N$. Воспользовавшись формулой (37), мы получим следующий ответ для статистической суммы:

$$W(N, M) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=N+1}^{N+M} \frac{1 - q^{N-i+j}}{1 - q^{j-i}}. \quad (38)$$

Заменяя $j \rightarrow N + j$ и $i \rightarrow N + 1 - i$, можно привести (38) к виду

$$W(N, M) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \frac{1 - q^{N+i+j-1}}{1 - q^{j+i-1}} = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{M+i+j-1}}{1 - q^{j+i-1}}. \quad (39)$$

В результате видно, что выражения (33) и (39) согласуются с выражениями (20) и (21).

Существует биекция между арбузами и плоскими разбиениями, заключенными в ящик конечного размера [29]. Плоским разбиением называется таблица $(\pi_{ij})_{1 \leq i, j}$ неотрицательных целых чисел, расположенных в порядке нестрогого убывания по индексам i и j [24], [30]. Целые числа π_{ij} называются частями плоского разбиения, а число $|\pi| = \sum_{1 \leq i, j} \pi_{ij}$ называется объемом плоского разбиения. У каждого плоского разбиения есть трехмерная диаграмма, представляющая множество столбцов из единичных кубов (трехмерная диаграмма Юнга). Высота столбца с координатами (i, j) равна π_{ij} . Если $j \leq N$, $i \leq L$ и $\pi_{ij} \leq M$ для всех частей плоского разбиения, то такое плоское разбиение называется плоским разбиением, заключенным внутри ящика $\mathcal{B}(N, L, M)$ со сторонами N , L , M . Производящая функция плоских разбиений равна

$$Z(N, L, M) = \sum_{\mathcal{B}(N, L, M)} q^{|\pi|}, \quad (40)$$

где суммирование ведется по всем плоским разбиениям, содержащимся в ящике $\mathcal{B}(N, L, M)$.

Проекции градиентных линий плоского разбиения образуют набор решеточных путей, соответствующих арбузной конфигурации (см. рис. 4). По построению объем арбуза (35) совпадает с объемом плоского разбиения $|\pi|$, заключенного внутри симметричного ящика $\mathcal{B}(N, N, M)$, а следовательно,

$$Z(N, N, M) = W(N, M) = \left\langle \Psi_N(\mathbf{q}^{-1/2}) \left| \Psi_N \left(\left(\frac{\mathbf{q}}{q} \right)^{1/2} \right) \right. \right\rangle. \quad (41)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ эта формула воспроизводит классическую формулу МакМагона [24], [30] для числа $A(N, N, M)$ плоских разбиений, заключенных в ящике $\mathcal{B}(N, N, M)$:

$$A(N, N, M) = \langle \Psi_N(\mathbf{1}) | \Psi_N(\mathbf{1}) \rangle = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N \frac{M+i+j-1}{j+i-1}. \quad (42)$$

5. СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ДВУМЕРНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

Двумерная классическая вершинная модель, связанная с фазовой моделью, может быть определена следующим образом [8]. Матричные элементы L -оператора могут быть представлены графически в виде вершины с примыкающими стрелками (см. рис. 5а). Матричный элемент $l_{12}(n|u) = \phi_n^\dagger$ соответствует вершине (b), $l_{21}(n|u) = \phi_n$ соответствует вершине (c), $l_{11}(n|u) = u^{-1}$ – вершине (a), а $l_{22}(n|u) = u$ – вершине (d).

Матричные элементы матрицы монодромии (10) выражаются через суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M+1$ узлами с различными граничными условиями (см. рис. 5б). Как следует из определения (10) оператора $B(u)$:

$$B(u) = \sum_{k_M, \dots, k_1=1}^2 l_{1k_M}(M|u) l_{k_M k_{M-1}}(M-1|u) \dots l_{k_1 2}(0|u),$$

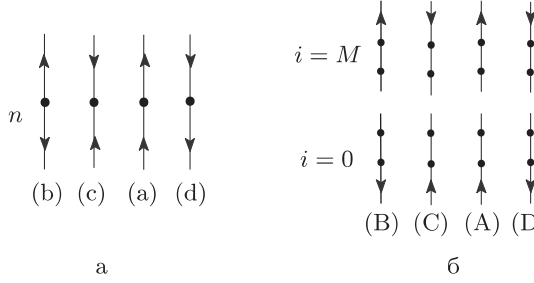


Рис. 5. Графическое представление матричных элементов L -оператора (а) и матрицы монодромии (б).

этот оператор соответствует граничному условию, когда верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация (В)). Оператору $C(u)$ соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь (конфигурация (С)). Операторам $A(u)$ и $D(u)$ соответствуют граничные условия, при которых верхняя и нижняя стрелки направлены в одном направлении, вверх и вниз (конфигурации (А) и (D) соответственно).

Рассмотрим двумерную квадратную решетку с $2N \times (M + 1)$ узлами. Вертикальные линии решетки ассоциируются с операторами $A(u_j)$, $B(u_j)$, $C(u_j)$, $D(u_j)$. Горизонтальные линии ассоциируются с локальными пространствами Фока, i -я линия – с i -м пространством. На каждом горизонтальном ребре решетки определено число заполнения n_j соответствующего фоковского вектора $|n_j\rangle_i$. Статистическая сумма модели на квадратной решетке с заданными граничными условиями равна сумме всех возможных конфигураций вершин (а), (б), (с), (d) и чисел заполнения.

Скалярное произведение (19) равно статистической сумме введенной вершинной модели со следующими граничными условиями: внешние стрелки на первых N колонках (ассоциируемых с операторами $C(v_j)$) направлены внутрь, а на последних N колонках (ассоциируемых с операторами $B(v_j)$) направлены наружу; на правой и на левой границах все числа заполнения равны нулю.

Разрешенные конфигурации могут быть представлены в виде решеточных путей. Эти конфигурации представляют собой наборы из N непересекающихся решеточных путей, стартующих из нижних левых вершин $(-N; 0)$, $(-N + 1; 0)$, \dots , $(-1; 0)$ и заканчивающихся в верхних правых вершинах $(1; M)$, $(2; M)$, \dots , $(N; M)$. В вертикальном направлении пути следуют вдоль стрелок, направленных вверх, и только один путь допустим на вертикальном ребре решетки, между тем как любое их число может быть на горизонтальном ребре. Числа путей, делящих горизонтальные ребра, равны соответствующим числам заполнения этих ребер (см. рис. 6). Так как лишь один путь допустим на вертикальных ребрах, то полученная конфигурация решеточных путей находится в биекции с конфигурацией типа арбуз на квадратной решетке с $2N \times (M + N)$ узлами и может быть представлена как плоское разбиение в ящике $\mathcal{B}(N, N, M)$. Скалярное произведение (19) может быть представлено в виде

$$\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{p,p} \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{t_k^{(d)} - t_k^{(a)} - M} \prod_{j=1}^N u_j^{t_j^{(d)} - t_j^{(a)} + M}, \quad (43)$$

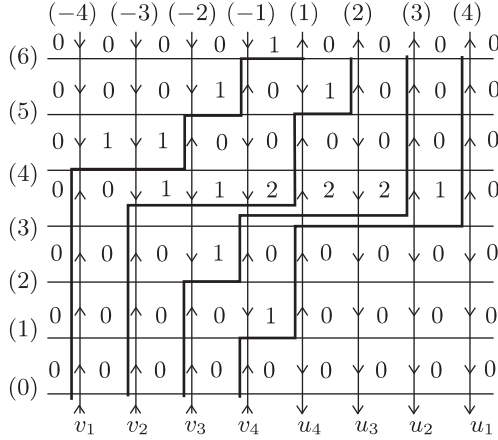


Рис. 6. Типичный набор допустимых путей по решетке.

где сумма берется по всем допустимым решеточным путям, а $t_j^{(a)}$ и $t_j^{(d)}$ – это числа вершин типа (a) и (d) соответственно на j -й колонке решетки. Объем $|\pi|$ плоского разбиения π в ящике $\mathcal{B}(N, N, M)$ равен [8]

$$2|\pi| = \sum_{k=-1}^{-N} k(l_k^{(d)} - l_k^{(a)} - M) + \sum_{j=1}^N (j-1)(l_j^{(d)} - l_j^{(a)} + M). \quad (44)$$

Подстановка параметризации $v_j = q^{-j/2}$, $u_j = q^{(j-1)/2}$ в (43) приводит к ответу (33) для q -параметризованного скалярного произведения (20).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фазовая модель, рассмотренная здесь, представляет собой весьма общее описание взаимодействующих частиц на решетке. Она имеет отношение к взаимодействующим бозонным системам, моделям квантовой оптики и описанию перескоков частиц по решетке в пределе сильной связи. Она также может быть преобразована в модель невзаимодействующих фермионов и спиновую $XX0$ -цепочку.

В этой статье мы обсудили комбинаторику скалярных произведений векторов состояния модели. Этот подход может быть использован и при изучении формфакторов фазовой модели [21], [22].

Благодарности. Автор благодарен К. Малышеву за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 13-01-00660).

Список литературы

[1] L. D. Faddeev, *Sov. Sci. Rev. Math. C*, **1** (1980), 107–155; L. D. Faddeev, “Quantum completely integrable models in field theory”, *40 Years in Mathematical Physics*, World Scientific Series in 20th Century Mathematics, **2**, World Sci., Singapore, 1995, 187–235.
 [2] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.

- [3] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories* (Tvärminne, Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin–New York, 1982, 61–119.
- [4] V. G. Drinfeld, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, August 3–11, 1986), ed. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [5] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1:1** (1989), 178–206.
- [6] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. науч. семин. ЛОМИ*, **101** (1981), 101–110.
- [7] Н. В. Цилевич, *Функц. анализ и его прил.*, **40:3** (2006), 53–65.
- [8] N. M. Bogoliubov, *J. Phys. A*, **38:43** (2005), 9415–9430.
- [9] Н. М. Боголюбов, *ТМФ*, **150:2** (2007), 193–203.
- [10] A. M. Povolotsky, *Phys. Rev. E*, **69:6** (2004), 061109, 7 pp.
- [11] A. M. Povolotsky, *J. Phys. A*, **46:46** (2013), 465205, 25 pp.
- [12] A. Borodin, I. Corwin, L. Petrov, T. Sasamoto, *Spectral theory for the q-boson particle system*, arXiv:1308.3475.
- [13] P. Sułkowski, *JHEP*, **10** (2008), 104, 17 pp.
- [14] S. Okuda, Y. Yoshida, *JHEP*, **11** (2012), 146, 13 pp.
- [15] S. Okuda, Y. Yoshida, *G/G gauged WZW-matter model, Bethe Ansatz for q-boson model and commutative Frobenius algebra*, arXiv:1308.4608.
- [16] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma, *Rev. Modern Phys.*, **80:3** (2008), 1083–1159.
- [17] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, *J. Phys. A*, **23:9** (1990), L415–L419.
- [18] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, G. D. Pang, *Phys. Rev. B*, **47:17** (1993), 11495–11498.
- [19] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, *Phys. Rev. Lett.*, **72:25** (1994), 3933–3936.
- [20] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, *Nucl. Phys. B*, **516:3** (1998), 501–528.
- [21] N. M. Bogoliubov, J. Timonen, *Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **369:1939** (2011), 1319–1333.
- [22] N. M. Bogoliubov, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **360** (2008), 5–30.
- [23] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [24] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [25] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, v. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **62**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [26] P. Carruthers, M. M. Nieto, *Rev. Modern Phys.*, **40:2** (1968), 411–440.
- [27] G. Kuperberg, *Int. Math. Res. Not.*, **1996:3** (1996), 139–150.
- [28] N. M. Bogoliubov, C. Malyshev, *Nucl. Phys. B*, **879** (2014), 268–291.
- [29] A. J. Guttmann, A. L. Owczarek, X. G. Viennot, *J. Phys. A*, **31:40** (1998), 8123–8135.
- [30] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.