М. П. Королева, Об одном обобщении интеграла Перрона,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 83–85

3. Гашков С. Б. О глубине булевых функций//Проблемы кибернетики. Вып. 34. М., 1978. 265—268.
4. Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в некоторых базисах//Ann. Univ. Sci. budapest. Sec. Comput. 1983. IV. 113—125.
5. Лупанов О. Б. О сложности универсальной параллельно-последовательной сети глубины 3//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1973. **133.** 127—131.
6. Ложкин С. А. О синтезе ориентированных контактных схем//Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 1995. № 2. 36—42.

Поступила в редакцию
16.06.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 517.51

М. П. Королева

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА ПЕРРОНА

В работе [1] В. А. Скворцов построил интеграл перроновского типа, соответствующий производной относительно последовательностей двоичных сетей и позволяющий вычислять коэффициенты всюду сходящихся рядов Хаара или Уолша как коэффициенты Фурье их сумм. Он же показал (см. [2]), что примитивная в смысле этого интеграла не обладает N-свойством Лузина. Е. С. Байгожин в [3] сузил этот интеграл: решая ту же задачу о вычислении коэффициентов, интеграл в то же время обладает N-свойством Лузина.

Аналогичные вопросы возникают в связи с построением интегралов, позволяющих вычислять коэффициенты сходящихся рядов по мультипликативным системам, обобщающим систему Уолша. При этом вместо двоичных используются P-ичные сети. Соответствующий перроновский интеграл, базирующийся на понятии производной относительно последовательностей P-ичных сетей (см. [4]), как и в двоичном случае, не обладает N-свойством. Более того, можно показать, что этот интеграл не обладает N-свойством даже в случае, когда подынтегральная функция в каждой точке является конечной производной относительно последовательностей P-ичных сетей от своего интеграла.

В данной заметке дается более узкое определение P-ичной производной и вводится соответствующий этой производной более узкий P-ичный интеграл, который, решая задачу вычисления коэффициентов для рядов по мультипликативной системе, обладает N-свойством на классе точных P-ичных производных.

Естественной областью определения мультипликативных систем является P-ичная группа, т. е. группа $G(P)$ целочисленных последовательностей $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, $0 \leqslant x_j \leqslant p_j - 1$, где $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — заданная последовательность натуральных чисел, $p_j \geqslant 2$ при всех $j \geqslant 1$, с групповой операцией $\oplus$, определяемой как покоординатное сложение по модулю p_j для j-й координаты. Если x_j истолковывать как j-й коэффициент P-ичного разложения некоторого числа из отрезка $[0, 1]$, то мы придем к геометрической модели группы $G(P)$ в виде «модифицированного» отрезка $[0, 1]_P^*$, в котором каждая P-ично-рациональная точка «раздваивается», соответствуя двум своим различным P-ичным разложениям. Отображение $\lambda_P : x \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}$, где $m_j = p_1 p_2 \ldots p_j$, переводит группу $G(P)$ в отрезок $[0, 1]$. Величина $\rho(x, y)=\min\{\lambda_P(x\ominus y), \lambda_P(y\ominus x)\}$, где $\ominus$ — операция, обратная к $\oplus$, играет роль расстояния в группе $G(P)$ или, что то же, в $[0, 1]_P^*$, превращая ее в метрическое пространство. Две различные точки из $[0, 1]_P^*$, которые при отображении λ_P переходят в одну и ту же P-ично-рациональную точку отрезка $[0, 1]$, назовем λ-эквивалентными.

Рассмотрим в $[0, 1]_P^*$ «отрезки» $\overset{*}{\Delta}{}^{(k)}(x)$ — замыкания прообразов при отображении λ_P интервалов $\left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right)$, содержащие $x\in[0, 1]_P^*$. Обозначим через $a_k(x)$ и $b_k(x)$ соответственно левый и правый концы отрезка $\overset{*}{\Delta}{}^{(k)}(x)$, а через Q^- и Q^+—множества точек $[0, 1]_P^*$, являющихся соответственно левым и правым концами некоторого отрезка $\overset{*}{\Delta}{}_r^{(k)}$. Кроме того, пусть $Q=Q^-\cup Q^+$ и $I=[0, 1]_P^*\setminus Q$.

Определение 1. Назовем функцию $F(x)$, определенную на $[0, 1]_P^*$, Q-непрерывной в точке $x\in[0, 1]_P^*$, если

$$\lim_{k\to\infty} F(a_k(x))=F(x)=\lim_{k\to\infty} F(b_k(x)).$$

Определение 2. Функцию $F(x)$ назовем Q-дифференцируемой в точке $x\in[0, 1]_P^*$, если существуют и равны пределы

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F(x)-F(a_k(x))}{\lambda_P(x)-\lambda_P(a_k(x))} \text{ и } \lim_{k\to\infty}\frac{F(b_k(x))-F(x)}{\lambda_P(b_k(x))-\lambda_P(x)}, \qquad (1)$$

причем в точках множества Q^- требуем существования только первого предела, а в точках множества Q^+ — второго.

Производную $F(x)$ в точке x обозначим через $D_QF(x)$.

Пределы по подпоследовательностям натуральных чисел в выражениях (1) назовем Q-производными числами. Тем самым, в частности, будут определены нижнее $\underline{D}_QF(x)$ и верхнее $\bar{D}_QF(x)$ Q-производные числа функции $F(x)$ в точке x.

Определение 3. Q-непрерывную на $[0, 1]_P^*$ функцию $U(x)$ $(V(x))$, значения которой в λ_P-эквивалентных точках совпадают, назовем $\mathcal{P}_Q$-мажорантой ($\mathcal{P}_Q$-минорантой) функции $f(x)$ на $[0, 1]_P^*$, если $U(0)=0$ $(V(0)=0)$ и $-\infty\neq\underline{D}_QU(x)\geqslant f(x)$ $(+\infty\neq\bar{D}_QV(x)\leqslant f(x))$ для всех $x\in[0, 1]_P^*$.

Лемма. *Если функция $F(x)$, определенная на $[0, 1]_P^*$ и принимающая равные значения в λ_P-эквивалентных точках, при всех $x\in[0, 1]_P^*$ удовлетворяет условию $\underline{D}_QF(x)\geqslant 0$, то $F(x)$ не убывает на $[0, 1]_P^*$.*

Определение 4. Будем говорить, что функция $f(x)$ $\mathcal{P}_Q$-интегрируема на $[0, 1]_P^*$, если $\inf\{U(1): U(x)$—$\mathcal{P}_Q$-мажоранта $f(x)\}=\sup\{V(1): V(x)$—$\mathcal{P}_Q$-миноранта $f(x)\}$. Их общее значение назовем определенным $\mathcal{P}_Q$-интегралом от $f(x)$ по $[0, 1]_P^*$ и обозначим $(\mathcal{P}_Q)\int_0^1 f(x)\,dx$.

Корректность этого определения следует из леммы, так как разность $U(x)-V(x)$ не убывает на $[0, 1]_P^*$, и в частности $U(1)\geqslant V(1)$.

Кроме того, в силу монотонности $U(x)-V(x)$ определяется и неопределенный $\mathcal{P}_Q$-интеграл $P(x)$, равный $\inf U(x)=\sup V(x)$.

Несложно доказать, что введенный интеграл обладает всеми основными свойствами интегралов, в том числе неопределенный $\mathcal{P}_Q$-интеграл Q-непрерывен и почти всюду (в смысле меры Хаара на группе $[0, 1]_P^*$) Q-дифференцируем на $[0, 1]_P^*$.

Определение 5. Назовем $F(x)$ функцией класса $AC(E)$ $(F(x) \in AC(E))$, где $E \subset [0, 1]_P^*$, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется $\eta > 0$, такое, что для любой конечной системы $\{[\alpha_k, \beta_k]_P^*\}_{k=1}^n$ неперекрывающихся отрезков с концами в E из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_P(\beta_k) - \lambda_P(\alpha_k)) < \eta$$

следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена и функция $F(x)$, принимающая равные значения в λ_P-эквивалентных точках, всюду на некотором множестве $A \subset [0, 1]_P^*$ удовлетворяет неравенствам*

$$-\infty < \underline{D}_Q F(x) \leqslant \overline{D}_Q F(x) < +\infty.$$

Тогда $A = \bigcup_n A_n$, *так что* $F(x) \in AC(A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

В условиях теоремы 1 функция $F(x)$ обладает N-свойством Лузина. В частности, если f является точной Q-производной некоторой функции $F(x)$, то ее неопределенный $\mathcal{P}_Q$-интеграл обладает N-свойством. Вопрос о том, обладает ли N-свойством $\mathcal{P}_Q$-интеграл в общем случае, остается открытым.

Введенный интеграл позволяет решить задачу вычисления коэффициентов всюду сходящихся рядов по мультипликативной системе Прайса. А именно справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ *по мультипликативной системе Прайса, определяемой ограниченной последовательностью P, сходится всюду на* $[0, 1]_P^*$ *к конечной функции* $f(x)$. *Тогда* $f(x)$ $\mathcal{P}_Q$-*интегрируема на* $[0, 1]_P^*$ *и*

$$a_n = (\mathcal{P}_Q) \int_0^1 f(x) \overline{\chi_n(x)}\, dx.$$

Аналогичная теорема справедлива и для системы типа Хаара.

Автор выражает благодарность профессору В. А. Скворцову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа поддержана РФФИ, проект № 94-01-00417.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скворцов В. А. О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм//Докл. АН СССР. 1968. **183**, № 4. 784—786.
2. Skvortsov V. A. Some properties of dyadic primitives//Lect. Notes Math. 1988. **1419**. 167—179.
3. Байгожин Е. С. Обобщенные интегралы и задача восстановления коэффициентов некоторых всюду сходящихся ортогональных рядов: Канд. дис. М., 1992.
4. Skvortsov V. A. A Perron type integral in an abstract space//Real Analysis exchange. 1989. **13**, N 1. 76—79.

Поступила в редакцию
12.10.94