

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. Gichev, R. Angelova, Quasilinear Instantaneous Processes Described
by Ordinary Differential Equations,
Differ. Uravn., 2005, Volume 41, Number 3, 306–311

<https://www.mathnet.ru/eng/de11238>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to
these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 20, 2025, 10:12:09



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ МГНОВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ,
ОПИСЫВАЕМЫЕ ОБЫКНОВЕННЫМИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2005 г. Т. Гичев, Р. Ангелова

Процессы коммутации в теории электрических цепей, процесс соударения двух материальных точек и процесс быстрого сбрасывания массы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Во всех этих процессах некоторые из входящих в уравнения параметров быстро увеличиваются по абсолютной величине. Это вызывает почти скачкообразное изменение состояния процесса. Математической абстракцией таких процессов является мгновенный процесс, в котором изменение состояния осуществляется в фиксированный момент времени. Один из классических подходов к его построению состоит в использовании дополнительных постулатов и соотношений. Таковы, например, законы коммутации и законы сохранения зарядов и потокосцеплений в теории цепей [1, с. 271–275] и закон сохранения количества движения в механике.

Естественным образом возникает проблема создания математических моделей мгновенных процессов, которые описываются дифференциальными уравнениями. Модели мгновенных процессов в линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях рассматривались в [2]. К анализу процессов коммутации в линейных цепях с сосредоточенными и с распределенными параметрами такие модели применялись в [3, 4]. Мгновенное сбрасывание массы движущейся точки и колеблющейся струны анализировалось в [5].

В настоящей работе исследуются модели мгновенных процессов, которые описываются двумя типами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные мгновенные процессы возникают при моделировании коммутации в электрических цепях с нелинейными элементами. Так как при этих процессах конечное состояние процесса похоже на соответствующее состояние мгновенного процесса в линейных цепях, то рассматриваемые мгновенные процессы называются квазилинейными. В качестве приложения изучается мгновенный процесс в некоторых уравнениях с частными производными. Возможность практического применения полученных результатов иллюстрируется на конкретном примере коммутации.

1. Основные результаты. В дальнейшем через $|p|$ обозначается евклидова норма вектора p , а через p_i – его i -я координата. Пусть $\|A\|$ – норма квадратной матрицы A , соответствующая векторной норме $|\cdot|$. Если $p(t)$ и $q(t)$ – определенные на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функции одинаковой размерности, то $\rho_T(p, q) = \max_{t_0 \leq t \leq T} |p(t) - q(t)|$.

При $T \in (t_0, T_0)$ и $t \in (t_0, T)$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (Ax + By + C)\alpha_T(t) + f_T(x, y, t), \quad x \in R^m, \quad \dot{y} = g_T(x, y, t), \quad y \in R^n, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

Здесь A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что A имеет обратную матрицу A^{-1} . Функции-столбцы $f_T(x, y, t)$ и $g_T(x, y, t)$ имеют размеры соответственно переменных x и y . Скалярная функция $\alpha_T(t)$ определена и непрерывна либо на промежутке $[t_0, T)$, причем допускается равенство $\lim_{t \rightarrow T-0} |\alpha_T(t)| = +\infty$, либо на промежутке $(t_0, T]$, причем допускается равенство $\lim_{t \rightarrow t_0+0} |\alpha_T(t)| = +\infty$.

Пусть $\Phi_T(t, \tau)$ – нормированная при $t = \tau$ фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = Ax\alpha_T(t)$.

Условие 1. Для матрицы $\Phi_T(t, \tau)$ существуют пределы

$$\Phi_T(T, \tau) = \lim_{t \rightarrow T} \Phi_T(t, \tau); \quad \Phi_T(t, t_0) = \lim_{\tau \rightarrow t_0} \Phi_T(t, \tau)$$

и при некоторой постоянной M_1 выполнено неравенство $\sup_{t_0 \leq \tau \leq t \leq T < T_0} \|\Phi_T(t, \tau)\| \leq M_1$.

Введем обозначения

$$z = (x^*, y^*)^*, \quad z_0 = (x_0^*, y_0^*)^*, \quad F_T(z, t) = (f^*(x, y, t), g^*(x, y, t))^*, \quad (3)$$

где звездочка обозначает транспонирование, и положим

$$\tilde{z}_T(t) = \left(\frac{(\Phi_T(t, t_0) - E)(x_0 + A^{-1}(By_0 + C))}{y_0 - y_0} \right), \quad \frac{\delta}{2} = \sup_{t_0 \leq t \leq T < T_0} |\tilde{z}_T(t)|.$$

Здесь и в дальнейшем через E обозначается единичная матрица. Пусть U – множество $(m + n)$ -мерных векторов z , для которых $|z - z_0| \leq \delta$. Тогда через Ω_T обозначим множество определенных на отрезке $[t_0, T]$ $(m + n)$ -мерных вектор-функций $z(t)$, для которых при каждом $t \in [t_0, T]$ значение $z(t)$ принадлежит множеству U .

Условие 2. Пусть при $T \rightarrow t_0$ функция $F_T(z, t)$ определена и непрерывна для $z \in U$, $t \in [t_0, T]$ и при некоторой постоянной M_2 имеет место неравенство $|F_T(z, t)| \leq M_2$.

Условие 3. Пусть при $T \rightarrow t_0$ существует такая постоянная K_2 , что при всех $z \in U$, $\tilde{z} \in U$ и $t \in [t_0, T]$ справедлива оценка $|F_T(z, t) - F_T(\tilde{z}, t)| \leq K_2|z - \tilde{z}|$.

Пусть $z_T(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда с учетом введенных обозначений это решение удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_T(t, t_0)x_0 + (\Phi_T(t, t_0) - E)A^{-1}(By_0 + C) + \int_{t_0}^t \Phi_T(t, \tau)f_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t (\Phi_T(t, \tau) - E)A^{-1}Bg_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau, \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t g_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

которую можно рассматривать при всех $t \in [t_0, T]$.

Теорема 1. При $T \rightarrow t_0$ и при выполнении условий 1, 2, 3 система (4) имеет единственное решение $z_T(t) = (x_T^*(t), y_T^*(t))^*$, $t \in [t_0, T]$, во множестве Ω_T и существует $y^+ = \lim_{T \rightarrow t_0} y_T(T) = y_0$. Если существует предел $\Phi^+ = \lim_{T \rightarrow t_0} \Phi_T(T, t_0)$, то имеет место и равенство

$$x^+ = \lim_{T \rightarrow t_0} x_T(T) = \Phi^+x_0 + (\Phi^+ - E)A^{-1}(By_0 + C).$$

Решение системы (4) принимается в качестве решения задачи (1), (2).

Далее при $T \in (t_0, T_0)$ и $t \in (t_0, T)$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax\alpha_T(t) + f_T(x, y, t), \quad x \in R^m, \quad \dot{y} = A_1x\alpha_T(t) + g_T(x, y, t), \quad y \in R^n, \quad (5)$$

с начальными условиями (2). Матрицы A , A_1 постоянные соответствующих размеров; матрица A имеет обратную A^{-1} . Скалярная функция $\alpha_T(t)$ определяется, как и выше.

Предполагается, что нормированная при $t = \tau$ фундаментальная матрица $\Phi_T(t, \tau)$ системы $\dot{x} = Ax\alpha_T(t)$ удовлетворяет условию 1. Снова будем использовать обозначения (3), положим

$$\tilde{z}_T(t) = \begin{pmatrix} (\Phi_T(t, t_0) - E)x_0 \\ A_1 A^{-1}(\Phi_T(t, t_0) - E)x_0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\delta}{2} = \sup_{t_0 \leq t \leq T < T_0} |\tilde{z}_T(t)|$$

и для этого δ аналогично предыдущему определим новые множества U и Ω_T . Пусть при определенных здесь δ и U для функции $F_T(z, t)$ выполняются условия 2 и 3.

Пусть $z_T(t)$ – решение задачи (5), (2). Это решение удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_T(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_T(t, \tau) f_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau, \\ y(t) &= y_0 + A_1 A^{-1}(\Phi_T(t, t_0) - E)x_0 + A_1 A^{-1} \int_{t_0}^t (\Phi_T(t, \tau) - E) f_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t g_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. При $T \rightarrow t_0$ и выполнении условий 1–3 система (6) имеет единственное решение $z_T(t) = (x_T^*(t), y_T^*(t))^*$, $t \in [t_0, T]$, во множестве Ω_T . Если существует предел $\Phi^+ = \lim_{T \rightarrow t_0} \Phi_T(T, t_0)$, то имеет место равенство

$$z^+ = \lim_{T \rightarrow t_0} z_T(T) = \begin{pmatrix} \Phi^+ x_0 \\ y_0 + A_1 A^{-1}(\Phi^+ - E)x_0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (6) принимается в качестве решения задачи (5), (2).

2. Доказательство теорем. Так как доказательство обеих теорем проводится одинаково, то приведем только доказательство первой из них.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение определенный на множестве Ω_T интегральный оператор $w = P_T(z) = (w_x^*, w_y^*)^*$, где

$$\begin{aligned} w_x(t, z) &= \Phi_T(t, t_0)x_0 + (\Phi_T(t, t_0) - E)A^{-1}(By_0 + C) + \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_T(t, \tau) f_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t (\Phi_T(t, \tau) - E)A^{-1}B g_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau, \\ w_y(t, z) &= y_0 + \int_{t_0}^t g_T(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Докажем, что при $T \rightarrow t_0$ этот интегральный оператор отображает множество Ω_T в себя и $P_T(z)$ – оператор сжатия.

Если $z(t)$ принадлежит множеству Ω_T , то введем обозначение

$$w(t, z) - z_0 = \begin{pmatrix} w_x(t, z) - x_0 \\ w_y(t, z) - y_0 \end{pmatrix}.$$

В силу сделанных предположений при $T \rightarrow t_0$ существует такая постоянная γ , что $|w(t, z) - z_0| \leq \delta/2 + \gamma(T - t_0)$. Из этого неравенства следует, что при $T - t_0 < \delta/(2\gamma)$ оператор $P_T(z)$ отображает множество Ω_T в себя.

Пусть, далее, $z(t)$ и $\tilde{z}(t)$ – две функции из множества Ω_T . Так как

$$w(t, z) - w(t, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} w_x(t, z) - w_x(t, \tilde{z}) \\ w_y(t, z) - w_y(t, \tilde{z}) \end{pmatrix},$$

то найдется такая постоянная γ_1 , что при $T \rightarrow t_0$ выполняется неравенство

$$\rho_T(w(\cdot, z), w(\cdot, \tilde{z})) \leq \gamma_1(T - t_0)\rho_T(z, \tilde{z}),$$

из которого следует, что при $T - t_0 < 1/\gamma_1$ оператор $P_T(z)$ является оператором сжатия. Тогда в силу теоремы о сжатых отображениях [6, с. 605–626] при $T \rightarrow t_0$ система интегральных уравнений (4) имеет единственное решение $z_T(t)$, $t \in [t_0, T]$, во множестве Ω_T . Равенства в теореме при соответствующих предположениях получаются после предельного перехода при $T \rightarrow t_0$ в системе (4). Теорема 1 доказана.

3. Приложение. Сначала теорема 1 применяется к анализу мгновенного процесса в гиперболическом дифференциальном уравнении с частными производными.

Пусть $T \in (t_0, T_0)$ и через H_T обозначено множество точек (x, t) , где $x \in [a, b]$ и $t \in (t_0, T)$. При $T \rightarrow t_0$ на множестве H_T рассматривается гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$Q_T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\varphi Q_T'(t) + q_1(t)) \frac{\partial u}{\partial t} - (\psi Q_T'(t) + q_2(t))u = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Здесь $Q_T(t)$ – скалярная функция, которая определена и непрерывна на отрезке $[t_0, T]$, имеет непрерывную производную $Q_T'(t)$ на промежутке $[t_0, T)$ и такая, что $Q_T(t_0) = Q_1$, $Q_T(T) = Q_2$, $Q_T(t) > 0$ при $t \in (t_0, T)$. Далее, при некоторой постоянной l_0 для $t_0 \leq s \leq t \leq T$ и при $T \rightarrow t_0$ справедливо неравенство $(Q_T(t)Q_T^{-1}(s))^\varphi \leq l_0$. Наконец, k_0 – положительное число, φ и ψ – постоянные, а $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – непрерывные на $[t_0, T_0)$ функции.

При $T \rightarrow t_0$ через $u_T(x, t)$ обозначим решение уравнения (7) с начальными условиями

$$u(x, t_0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} = F(x), \quad x \in [a, b], \tag{8}$$

и условиями на границе

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \geq t_0. \tag{9}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$k_0 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda X, \quad X(a) = X(b) = 0.$$

Пусть λ_k и $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, – собственные значения и ортонормированная система соответствующих им собственных функций этой задачи. Разложения в ряды Фурье функций $f(x)$ и $F(x)$ имеют вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k X_k(x).$$

При $T \rightarrow t_0$, $t \in (t_0, T)$, $k = 1, 2, \dots$, решение начальной задачи

$$Q_T(t)Y'' - (\varphi Q_T'(t) + q_1(t))Y' - (\psi Q_T'(t) + q_2(t))Y = \lambda_k Y, \quad Y(t_0) = a_k, \quad Y'(t_0) = b_k$$

обозначим через $Y_{kT}(t)$. Применяя к этой задаче после приведения уравнения к системе первого порядка теорему 1, получаем равенства

$$\lim_{T \rightarrow t_0} Y_{kT}(T) = a_k, \quad \lim_{T \rightarrow t_0} Y'_{kT}(T) = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^\varphi b_k + \frac{Q_2^\varphi - Q_1^\varphi}{\varphi Q_1^\varphi} \psi a_k. \tag{10}$$

При $s = 1, 2, \dots$ и $T \rightarrow t_0$ функция $u_{sT}(x, t) = \sum_{k=1}^s X_k(x) Y_{kT}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7) и граничным условиям (9). Кроме того, она удовлетворяет начальным условиям

$$u_{sT}(x, t_0) = \sum_{k=1}^s a_k X_k(x), \quad \frac{\partial u_{sT}(x, t_0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^s b_k X_k(x).$$

А это означает, что функция $u_{sT}(x, t)$ приближенно удовлетворяет начальным условиям (8).

Теорема 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , что при каждом $s > N$ найдется число $T_0(s) > t_0$ такое, что для $T \in (t_0, T_0(s))$ выполняется неравенство

$$\|u_{sT}(x, T) - f(x)\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x, T)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Здесь

$$\frac{\partial u(x, t_0^+)}{\partial t} = \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^\varphi F(x) + \frac{Q_2^\varphi - Q_1^\varphi}{\varphi Q_1^\varphi} \psi f(x),$$

$a \|\cdot\|_{L_2}$ – среднеквадратическая норма определенных на отрезке $[a, b]$ функций.

Доказательство. Введем обозначение

$$\frac{\partial u_s(x, t_0^+)}{\partial t} = \sum_{k=1}^s X_k(x) \left(\left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^\varphi b_k + \frac{Q_2^\varphi - Q_1^\varphi}{\varphi Q_1^\varphi} \psi a_k \right),$$

и пусть ε – фиксированное положительное число. Из свойств разложений в ряды Фурье функций $f(x)$ и $F(x)$ следует существование такого натурального числа N , что при $s > N$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^s a_k X_k(x) - f(x) \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_s(x, t_0^+)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

В силу равенств (10) для каждого $s > N$ можно найти такое число $T_0(s) > t_0$, что если $T \in (t_0, T_0(s))$, то

$$\left\| u_{sT}(x, T) - \sum_{k=1}^s a_k X_k(x) \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x, T)}{\partial t} - \frac{\partial u_s(x, t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Тогда из (11) и (12) следует, что при $s > N$ и $T \in (t_0, T_0(s))$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|u_{sT}(x, T) - f(x)\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x, T)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} \leq \\ & \leq \left\| u_{sT}(x, T) - \sum_{k=1}^s a_k X_k(x) \right\|_{L_2} + \left\| \sum_{k=1}^s a_k X_k(x) - f(x) \right\|_{L_2} + \\ & + \left\| \frac{\partial u_{sT}(x, T)}{\partial t} - \frac{\partial u_s(x, t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial u_s(x, t_0^+)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_0^+)}{\partial t} \right\|_{L_2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример. Применим теорему 2 к анализу, одного примера мгновенного процесса коммутации. Пусть в электрической схеме (см. рисунок) в момент t_0 осуществляется скачкообразное изменение емкости конденсатора C со значения C_H до C_K . Напряжение на конденсаторе C обозначается u_C . Пусть C_1 – емкость линейного конденсатора, а C_0 – емкость

нелинейного конденсатора, напряжение $u_0(q)$ на котором является функцией заряда q вида $u_0(q) = a_0q + b_0q^3$ [7, с. 90]. Далее, через R обозначено сопротивление, а $u(t)$ – источник напряжения. Токи в ветвях схемы равны i, i_1, i_2 .

Рассматриваемый мгновенный процесс в момент t_0 аппроксимируется при $T \rightarrow t_0$ с помощью последовательности процессов на отрезках $[t_0, T]$. В каждом из этих процессов емкость конденсатора C является дифференцируемой функцией $C_T(t)$, для которой $C_T(t_0) = C_H$ и $C_T(T) = C_K$. Кроме того, пусть при некоторой постоянной M для $t_0 \leq \tau \leq t \leq T < T_0$ выполняется неравенство $(C_T(\tau) + C_1)/(C_T(t) + C_1) \leq M$. При $t \in [t_0, T]$ процесс в схеме описывается системой вида (5)

$$\frac{du_C}{dt} = -u_C(\ln(C_T(t) + C_1))' + \frac{i}{C_T(t) + C_1},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_C}{R}(\ln(C_T(t) + C_1))' - \frac{i}{R} \left(a_0 + 3b_0q^2 + \frac{1}{C_T(t) + C_1} \right) + \frac{u'(t)}{R}, \quad \frac{dq}{dt} = i,$$

и пусть $u_C(t_0) = u_{C0}, i(t_0) = i_0, q(t_0) = q_0$. Нормированное при $t = \tau$ решение $\Phi_T(t, \tau)$ однородного уравнения

$$\frac{du_C}{dt} = -u_C(\ln(C_T(t) + C_1))'$$

имеет вид $\Phi_T(t, \tau) = (C_T(\tau) + C_1)/(C_T(t) + C_1)$. Согласно сделанным предположениям, выполняются соотношения

$$|\Phi_T(t, \tau)| \leq M, \quad \Phi^+ = \lim_{T \rightarrow t_0} \Phi_T(T, t_0) = (C_H + C_1)/(C_K + C_1).$$

Поэтому в силу теоремы 2 начальные условия в процессе, следующем за мгновенным процессом, имеют вид

$$u_C^+ = \frac{C_H + C_1}{C_K + C_1} u_{C0}, \quad i^+ = i_0 - \frac{1}{R} \left(\frac{C_H + C_1}{C_K + C_1} - 1 \right) u_{C0}, \quad q^+ = q_0.$$

Первое из этих равенств является аналогом закона сохранения зарядов при мгновенной коммутации в линейной цепи.

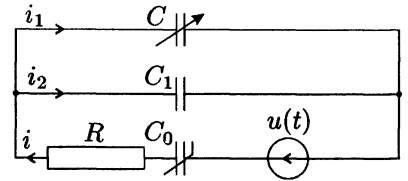


Рисунок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов В.П. Основы теории цепей. М., 1985.
2. Гичев Т. // Сердика. Българско математическо списание. 1992. Т. 18. С. 79–89.
3. Ангелова Р., Гичев Т. // Изв. вузов. Электромеханика. 1996. № 1/2. С. 15–23.
4. Ангелова Р., Колев Л., Гичев Т. // Изв. вузов. Электромеханика. 2001. № 4/5. С. 39–42.
5. Gichev T. // J. Theor. Appl. Mech. Sofia, 2001. V. 31. № 4. P. 3–9.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.
7. Филипов Е. Нелинейна електротехника. София, 1979.

Университет архитектуры, строительства и геодезии,
г. София, Болгария

Поступила в редакцию
10.11.2003 г.