



О гомоклинических аттракторах трехмерных потоков

Ю. В. Баханова¹, А. О. Казаков^{1,2}, Е. Ю. Каратецкая¹, А. Д. Козлов², К. А. Сафонов^{1,2}

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

²Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет имени Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: bakhanovayu@gmail.com, kazakovdz@yandex.ru, eyukaratetskaya@gmail.com,
kozzloff@list.ru, safonov.klim@yandex.ru

Автор для переписки Казаков Алексей Олегович, kazakovdz@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.11.2019, принята к публикации 02.03.2020, опубликована 30.06.2020

Основной целью работы является построение классификации гомоклинических аттракторов трехмерных динамических систем с непрерывным временем и выделение среди них классов псевдогиперболических аттракторов, хаотическая динамика которых сохраняется при возмущениях системы. Основным методом исследования является качественный метод карты седел, заключающийся в построении расширенной бифуркационной диаграммы на плоскости параметров системы вида $\dot{x} = y + g_1(x, y, z)$, $\dot{y} = z + g_2(x, y, z)$, $\dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z)$, $g_i(0, 0, 0) = (g_i)'_x(0, 0, 0) = (g_i)'_y(0, 0, 0) = (g_i)'_z(0, 0, 0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, матрица линеаризации которой представляется в форме Фробениуса, а собственные числа, определяющие тип состояния равновесия, выражаются только лишь через коэффициенты A , B и C . Для проверки псевдогиперболичности рассматриваемых аттракторов применяется численный метод анализа непрерывности подпространства равномерного сжатия и подпространства растяжения объемов на аттракторе. Принадлежность аттракторов к классу гомоклинических устанавливается с помощью численного метода расчета расстояния от аттрактора до седлового состояния равновесия. **Результаты.** На плоскости параметров (A, B) построена расширенная бифуркационная диаграмма, на которой выделена область устойчивости состояния равновесия, а также шесть областей, отвечающих двум различным типам спиральных восьмерочных аттракторов, аттрактору Шильникова, аттрактору Лоренца, седловому аттрактору Шильникова и аттрактору типа Любимова–Закса–Ровеллы. Численно установлена псевдогиперболичность аттрактора Лоренца. Для аттракторов Любимова–Закса–Ровеллы установлена непрерывность подпространств сжатия и растяжения объемов. Тем не менее показано, что такие аттракторы не могут быть псевдогиперболическими. В работе **обсуждается**, что в трехмерных потоках помимо аттракторов Лоренца псевдогиперболическими могут быть еще только лишь седловые аттракторы Шильникова, содержащие седловое состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием. Однако примеры таких аттракторов на данный момент не известны.

Ключевые слова: хаотический аттрактор, седловое состояние равновесия, седло-фокус, гомоклиническая траектория, псевдогиперболичность, аттрактор Лоренца, спиральный аттрактор, аттрактор Шильникова.

Образец цитирования: Баханова Ю.В., Казаков А.О., Каратецкая Е.Ю., Козлов А.Д., Сафонов К.А. О гомоклинических аттракторах трехмерных потоков // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 231–258.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-231-258>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-71-10048. Численные эксперименты, представленные в разделе 3, выполнены при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931. Авторы также благодарят РФФИ (гранты № 18-31-20052, № 18-29-10081, № 18-31-00431 и № 19-01-00607) за поддержку научных исследований. Авторы благодарят С.В. Гонченко за полезные замечания и советы, позволившие улучшить статью.

On homoclinic attractors of three-dimensional flows

Yu. V. Bakhanova¹, A. O. Kazakov^{1,2}, E. Yu. Karatetskaia¹, A. D. Kozlov², K. A. Safonov^{1,2}

¹National Research University Higher School of Economics

25/12, Bolshaya Pecherskaya, Nizhny Novgorod 603155, Russia

²N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University

23/2, Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia

E-mail: bakhanovayu@gmail.com, kazakovdz@yandex.ru, eyukaratetskaya@gmail.com,

kozloff@list.ru, safonov.klim@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Kazakov Alexey, kazakovdz@yandex.ru

Received 17.11.2019, accepted 02.03.2020, published 30.06.2020

The main **goal** is to construct a classification of such attractors and to distinguish among them the classes of pseudohyperbolic attractors which chaotic dynamics is preserved under perturbations of the system. The main research **method** is a qualitative method of saddle charts, which consists of constructing an extended bifurcation diagram on the plane of the system parameters in the form $\dot{x} = y + g_1(x, y, z)$, $\dot{y} = z + g_2(x, y, z)$, $\dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z)$, $g_i(0, 0, 0) = (g_i)'_x(0, 0, 0) = (g_i)'_y(0, 0, 0) = (g_i)'_z(0, 0, 0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, the linearization matrix of which is represented in the Frobenius form, and the eigenvalues that determine the type of equilibrium state are expressed only through the coefficients A, B and C . The pseudohyperbolicity of the attractors under consideration is verified by means of a numerical method which helps to check the continuity of the subspaces of strong contractions and volume expansion on the attractor. The homoclinic nature of attractors is established using the numerical method of calculating the distance from an attractor to a saddle equilibrium. **Results.** An extended bifurcation diagram is constructed on the parameter plane (A, B) , on which the stability region of the equilibrium state is highlighted, as well as six regions corresponding to two different types of spiral figure-eight attractors, Shilnikov attractor, Lorenz-like attractor, Shilnikov saddle attractor, and Lyubimov–Zaks–Rovella attractor. The pseudohyperbolicity of the Lorenz-like attractor is confirmed numerically. For the attractors of Lyubimov–Zaks–Rovella, it is shown that despite the continuity of strong contracting and volume-expanding subspaces such attractors cannot be pseudohyperbolic. The paper **discusses** that in three-dimensional flows, in addition to Lorenz-like attractors, only Shilnikov saddle attractors containing a saddle equilibrium state with a two-dimensional unstable manifold can be pseudohyperbolic. However, we currently do not know examples of such attractors.

Key words: chaotic attractor, saddle equilibrium, saddle-focus, homoclinic trajectory, pseudohyperbolicity, Lorenz attractor, spiral attractor, Shilnikov attractor.

Reference: Bakhanova Yu.V., Kazakov A.O., Karatetskaia E.Yu., Kozlov A.D., Safonov K.A. On homoclinic attractors of three-dimensional flows. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 231–258.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-231-258>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The paper is carried out by the financial support of the RSF grant No. 19-71-10048. Numerical results in Sec. 3 were supported by the Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Russian Ministry of Science and Higher Education (Grant No. 075-15-2019-1931). Authors also thank RFBR (grants 18-31-20052, 18-29-10081, 18-31-00431 and 19-01-00607) for the support of scientific research. Authors thank S.V. Gonchenko for fruitful discussion and valuable advices.

Введение

Настоящая работа посвящена вопросам классификации и псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков – динамических систем с непрерывным временем. Под *псевдогиперболическими аттракторами* понимается широкий класс хаотических аттракторов, любая траектория которых обладает положительным показателем Ляпунова, и это свойство сохраняется при возмущениях системы [1].

Впервые термин *гомоклинический* был введен в работе [2] для странных аттракторов точечных отображений. Напомним, что странный аттрактор отображения называется *гомоклини-*

ческим, если он содержит только одну седловую неподвижную точку, ее неустойчивое многообразие, а также все гомоклинические к нему траектории, то есть те траектории, в которых неустойчивое многообразие седловой точки пересекается с устойчивым. В общем случае для отображений это свойство аттрактора сохраняется и при всех малых возмущениях. В случае потоков седловое состояние равновесия также может иметь гомоклинические траектории, их также называют гомоклиническими петлями. Однако эта ситуация является негрубой, так как при малых возмущениях петли исчезают. Но при этом могут появляться новые гомоклинические петли. Такая ситуация хорошо известна, например, в случае аттрактора Лоренца [3, 4], где значения параметров, отвечающих появлению гомоклинических петель, плотны. Соответственно, аттрактор Лоренца может быть назван гомоклиническим (он либо содержит единственное состояние равновесия вместе с петлей, либо неустойчивое многообразие состояния равновесия подходит сколь угодно близко к этому равновесию при $t \rightarrow \infty$). Такая же ситуация может быть и с другими аттракторами. Например, согласно результатам работ [1, 5], значения параметров, отвечающих гомоклиническим петлям, плотны и в спиральных аттракторах (содержащих состояние равновесия типа седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием).

В настоящей работе рассматриваются аттракторы двух типов, для которых мы будем использовать обобщающий термин «гомоклинические». Во-первых, это аттракторы, которые имеют единственное седловое состояние равновесия и для которых значения параметров, отвечающие гомоклиническим петлям, плотны (без доказательства последнего факта, поскольку эта задача весьма специфическая). Во-вторых, такие аттракторы, как, например, аттрактор Шильникова [6], которые имеют гомоклинические петли при дискретных значениях параметра. Однако к каждому такому значению параметра, в свою очередь, накапливаются те, при которых снова есть петля, но уже многообходная по отношению к исходной [7]. Для аттракторов первого типа принадлежность седлового состояния равновесия аттрактору является грубым (с физической точки зрения) свойством. Тогда как у аттракторов второго типа, в окрестности состояния равновесия, могут образовываться «дырки», отвечающие интервалам значений параметра, когда аттрактор не содержит равновесие. Такие аттракторы будем называть гомоклиническими в том случае, когда они содержат гомоклиническую петлю, либо неустойчивое многообразие состояния равновесия подходит сколь угодно близко к этому равновесию.

Также отметим, что аттракторы первого типа можно разделить на две группы. К первой группе относятся «настоящие» гомоклинические аттракторы, содержащие состояние равновесия с положительной седловой величиной (суммой действительных частей пары ближайших к мнимой оси собственных чисел, одно из которых имеет положительную действительную часть, а другое – отрицательную). В общем случае, согласно работам [8, 9], из гомоклинических петель здесь рождаются седловые предельные циклы. Для аттракторов второй группы седловая величина является отрицательной. Из петель состояния равновесия в этом случае рождаются устойчивые периодические траектории [8, 9]. Тем не менее с физической точки зрения, такие аттракторы во многих случаях могут считаться гомоклиническими, поскольку, как будет показано в разделах 3.1 и 3.5, их траектории, как и для «настоящих» гомоклинических аттракторов, могут подходить близко к равновесию. При этом для таких аттракторов (как и для аттракторов из первой группы) седловое состояние равновесия (на уровне численного счета) принадлежит аттрактору для открытого множества значений параметра.

К классу гомоклинических аттракторов относятся многие известные аттракторы трехмерных потоков, например, аттрактор Лоренца, возникающий в классических системах Лоренца [10] и Шимицу–Мориока [11, 12], спиральный восьмерочный аттрактор, содержащий седло-фокусное положение равновесия с одномерным неустойчивым многообразием и возникающий, например, в цепи Чуа [13], спиральный аттрактор Шильникова в системе Ресслера [14] и многие другие странные аттракторы.

Большинство гомоклинических аттракторов трехмерных потоков не могут быть псевдогиперболическими из-за наличия гомоклинических касаний седловых периодических траекторий. В случае трехмерных потоков такие касания неизбежно приводят к рождению устойчивых периодических траекторий внутри аттрактора [15, 16]. Очень часто такие траектории имеют очень большие периоды, малые бассейны притяжения и, таким образом, не разрушают хаотическую динамику, наблюдаемую в экспериментах. В работе Афраймовича и Шильникова [17] такие аттракторы были названы *квазиаттракторами*. Несмотря на то, что с физической точки зрения квазиаттрактор часто неотличим от псевдогиперболического аттрактора, с математической точки зрения не до конца ясно, что из себя представляет этот объект. Невозможно предсказать, существуют ли устойчивые периодические траектории внутри рассматриваемого квазиаттрактора. Более того, согласно теории Афраймовича и Шильникова [17] (см. также [18]), даже если каким-то образом удастся установить, что квазиаттрактор не содержит устойчивых периодических траекторий при рассматриваемых параметрах, нет никаких гарантий, что такие траектории не возникнут уже при сколь угодно малых возмущениях системы (изменениях параметров). Таким образом, задача построения классификации гомоклинических аттракторов и выделения среди них классов псевдогиперболических аттракторов является весьма актуальной как с точки зрения теории динамических систем, так и с точки зрения приложений, в которых важна устойчивость хаотической динамики к возмущениям.

Первая часть работы посвящена вопросам классификации гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. В основе этой классификации лежат свойства состояния равновесия, входящего в аттрактор, определяемые его собственными числами. В зависимости от знаков действительных частей собственных чисел седловые состояния равновесия трехмерных потоков бывают типа $(2,1)$ – с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями, и типа $(1,2)$ – с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями. Если седловое состояние равновесия обладает парой комплексно-сопряженных собственных чисел, то оно называется седло-фокусным. С топологической точки зрения седло-фокусное состояние равновесия не отличается от седлового (с действительными собственными числами). Однако, как показано в известной работе Шильникова о счетном числе седловых предельных циклов в любой окрестности петли седло-фокуса [19], с точки зрения динамики седло-фокус принципиально отличается от седла. Другой важной характеристикой седловых состояний равновесия является сумма действительных частей собственных чисел, ближайших к мнимой оси, но лежащих от нее по разные стороны. Такая характеристика, называемая седловой величиной состояния равновесия, определяет, сжимаются или растягиваются двумерные площади в окрестности седла.

В разделе 1 показано, что в зависимости от описанных характеристик, странные гомоклинические аттракторы трехмерных потоков могут быть шести различных видов:

1. аттрактор лоренцевского типа, содержит седло $(2,1)$ с положительной седловой величиной;
2. восьмерочный спиральный аттрактор, содержит седло-фокус $(2,1)$ с шильниковской петлей (в этом случае седловая величина положительна);
3. аттрактор Любимова–Закса–Ровеллы, содержит седло $(2,1)$ с отрицательной седловой величиной;
4. восьмерочный спиральный аттрактор с петлей седло-фокуса $(2,1)$, седловая величина которого отрицательная;
5. аттрактор Шильникова, содержит седло-фокус $(1,2)$;
6. седловой аттрактор Шильникова, содержит седловое состояние равновесия $(1,2)$.

Заметим, что аттракторы 1–4 относятся к первому типу гомоклинических аттракторов, то есть для них плотны значения параметров, отвечающих возникновению гомоклинических петель (при этом аттракторы 1 и 2 являются «настоящими» гомоклиническими, так как из гомоклини-

ческих петель таких аттракторов рождаются седловые предельные циклы, а не устойчивые, как для аттракторов 3 и 4), а аттракторы 5 и 6 относятся ко второму типу, то есть гомоклинические петли для них возникают при дискретных значениях параметров (см. подробнее в разделе 3).

Вторая часть работы (разделы 2 и 3) посвящена вопросам псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. Понятие псевдогиперболичности было введено в работе Тураева и Шильникова [1] для расширения класса робастных (устойчивых к возмущениям) хаотических аттракторов, после того как стало ясно, что класс таких аттракторов не исчерпывается гиперболическими (грубыми) и сингулярно-гиперболическими (лоренцевскими) аттракторами. Кратко псевдогиперболический аттрактор можно определить следующим образом (см. также [20, 21]). В окрестности такого аттрактора (в некоторой его поглощающей области) имеет место слабый вариант гиперболичности: в каждой точке окрестности существует разбиение на инвариантные относительно дифференциала трансверсальные подпространства, такие, что на одном из них имеет место экспоненциальное сжатие объема вдоль всех направлений, а на другом – экспоненциальное растяжение. Важно, что такое разбиение непрерывно зависит от точки в рассматриваемой окрестности; соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения, а также углы между касательными векторами подпространств равномерно ограничены; в растягивающем объеме подпространстве если и есть какие-то сжатия, то все они равномерно слабее, чем любое сжатие в сильно сжимающем подпространстве.

Важно отметить, что, так как петли сепаратрис состояний равновесия в потоковых системах не могут быть грубыми, гомоклинические аттракторы не могут быть структурно-устойчивыми и, в частности, гиперболическими. Тем не менее негрубость гомоклинических траекторий не противоречит возможной псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов потоков. В классе трехмерных потоков псевдогиперболические аттракторы, как и гиперболические не допускают гомоклинических касаний инвариантных многообразий седловых периодических траекторий, так как наличие таких касаний в этом случае неизбежно приводит к рождению устойчивых периодических траекторий внутри аттрактора [15, 16]. Однако в четырехмерных потоках такие касания могут быть псевдогиперболическими [20, 21], то есть могут не приводить к рождению устойчивых периодических траекторий.

К настоящему времени теория гиперболических аттракторов считается хорошо развитой. Здесь получен ряд исчерпывающих результатов, см., например, [22–24], построено большое количество систем, демонстрирующих такие аттракторы [25–30], а также разработаны численные методы проверки условий гиперболичности [31–35]. То же самое можно сказать и о теории лоренцевских аттракторов. Однако, несмотря на то, что теория таких аттракторов была построена еще в 1970–1980-х годах в классических работах Афраймовича, Быкова и Шильникова [3, 4, 36], до недавнего времени не существовало методов доказательства робастности таких аттракторов в конкретных системах. Первой работой в этом направлении является работа В. Такера [37], в которой с помощью методов доказательных вычислений (computer-assisted proof) установлено, что аттрактор в классической системе Лоренца [10] удовлетворяет условиям геометрической модели Афраймовича, Быкова и Шильникова. Разработанные в этой работе методы являются очень трудоемкими и сложными в реализации, а их применение для исследования свойств аттракторов в конкретных системах под силу лишь большим специалистам.

Для многих задач (в частности, из приложений) не важно, является ли аттрактор гиперболическим, сингулярно-гиперболическим или же он входит в более широкий класс псевдогиперболических аттракторов. С физической точки зрения более важен вопрос: сохраняется или нет хаотическая динамика системы при изменении параметров, то есть является ли странный аттрактор псевдогиперболическим. Достаточно простые, но эффективные методы проверки псевдогиперболичности странных аттракторов были предложены совсем недавно в работах [21, 38, 39]. В разделе 2, следуя работам [21, 38], мы описываем аналитические и численные методы про-

верки псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. С помощью предложенных методов мы показываем, что среди таких аттракторов псевдогиперболическими могут быть только лишь аттракторы лоренцевского типа и седловые аттракторы Шильникова. Остальные гомоклинические аттракторы обязательно относятся к классу квазиаттракторов.

В разделе 3 приведены примеры пяти систем, демонстрирующих все шесть типов аттракторов (два типа восьмерочных спиральных аттракторов, аттрактор Шильникова, несимметричный аттрактор Лоренца, аттрактор Любимова–Закса–Ровеллы, седловой аттрактор Шильникова), а также результаты проверки их псевдогиперболичности и гомоклиничности. Показано, что несимметричный аттрактор Лоренца действительно является псевдогиперболическим, в то время как все остальные приведенные аттракторы относятся к классу квазиаттракторов. На сегодняшний день известен целый ряд систем, демонстрирующих псевдогиперболические аттракторы лоренцевского типа, например, классическая система Лоренца [10], система Шимицу–Мориока [11, 12], системы с несимметричным аттрактором Лоренца [40, 41], и др. Однако о системах, демонстрирующих псевдогиперболический седловой аттрактор Шильникова, на данный момент нам не известно.

1. Классификация гомоклинических аттракторов. Метод карты седел

Идея классификации гомоклинических аттракторов по типу состояния равновесия была предложена в [42]. В работах [43, 44] эта идея использовалась для трехмерных отображений, а в [2] оформлена в виде метода карт седел и применена для поиска и классификации гомоклинических аттракторов трехмерных отображений Эно. Суть этого метода заключается в построении в пространстве параметров отображения разбиения на области, отвечающие различным наборам собственных чисел неподвижной точки, определяющих тип гомоклинических аттракторов. В работах [45], [46] метод карт седел был также успешно применен для поиска и классификации гомоклинических аттракторов в меняющих ориентацию трехмерных отображениях Эно.

В настоящей работе мы применяем метод карт седел для классификации гомоклинических аттракторов, содержащих состояние равновесие $O(0, 0, 0)$ трехмерных потоков вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (1)$$

где A, B и C – параметры системы, а g_i ($i = 1, 2, 3$) – нелинейные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$g_i(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что матрица линеаризации системы (1) в состоянии равновесия $O(0, 0, 0)$ записывается в форме Фробениуса

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ A & B & C \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Важно отметить, что с помощью линейной замены к виду (2) можно свести довольно широкий класс трехмерных потоков. Из линейной алгебры известен следующий критерий при-

водимости матрицы к форме Фробениуса. Квадратная матрица M размера $n \times n$ приводится к форме Фробениуса

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда степень m минимального многочлена $p(x)$ матрицы M совпадает с размерностью n этой матрицы [47].¹

В частности, данному критерию удовлетворяют матрицы, собственные значения которых различны, так как в этом случае минимальный многочлен совпадает с характеристическим многочленом. При наличии кратных корней матрица приводится к форме Фробениуса тогда и только тогда, когда каждому собственному значению в жордановой форме соответствует ровно один блок. Например, следующие три матрицы

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

имеют трехкратное собственное значение $\lambda = 1$, а минимальные многочлены этих матрицы равны, соответственно,

$$P_{M_1}(x) = x - 1, \quad P_{M_2}(x) = (x - 1)^2, \quad P_{M_3}(x) = (x - 1)^3. \quad (5)$$

Таким образом, только матрицу M_3 можно привести к форме Фробениуса.

Характеристический полином матрицы вида (3) имеет вид

$$\chi(\lambda) = \lambda^n - A_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - A_1\lambda - A_0.$$

Для системы (1) характеристическое уравнение матрицы линеаризации состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ принимает вид

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A. \quad (6)$$

Как и в случае трехмерных отображений структура и свойства гомоклинических аттракторов трехмерных потоков определяются типом состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. Поэтому классификация гомоклинических аттракторов трехмерных потоков, как и трехмерных отображений, основана на типе состояния равновесия $O(0, 0, 0)$, который, в свою очередь, определяется корнями характеристического уравнения (6). Представление трехмерного потока в виде (1) позволяет получить наиболее простую связь между параметрами системы и типом состояния равновесия, что позволяет эффективно применять для классификации гомоклинических аттракторов *метод карты седел*.

Идея этого метода заключается в построении расширенной бифуркационной диаграммы для состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ на плоскости параметров (A, B) . Отметим, что параметр C равен значению дивергенции векторного поля (1) в точке $O(0, 0, 0)$. Таким образом, условие $C < 0$ является необходимым для существования гомоклинических аттракторов, содержащих O .

¹Напомним, что минимальным многочленом матрицы M называется многочлен $P(x) = x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \dots + p_1x + p_0$ наименьшей возможной степени, удовлетворяющий тождеству $P(M) = M^m + p_{m-1}M^{m-1} + \dots + p_1M + p_0E = 0$.

Кроме того, при построении карты седел можно полагать $C = -1$. Действительно, сделаем в системе (1) следующую замену переменных

$$x_{\text{new}} = |C|^2 \cdot x, \quad y_{\text{new}} = |C| \cdot y, \quad z_{\text{new}} = z, \quad \tau = |C| \cdot t.$$

Полагая $C < 0$, запишем систему (1) в новых координатах

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{new}} = y_{\text{new}} + |C| \cdot g_1(x, y, z), \\ \dot{y}_{\text{new}} = z_{\text{new}} + g_2(x, y, z), \\ \dot{z}_{\text{new}} = A \cdot |C|^{-3} x_{\text{new}} + B \cdot |C|^{-2} y_{\text{new}} - z_{\text{new}} + |C|^{-1} \cdot g_3(x, y, z). \end{cases}$$

Несложно заметить, что характеристический многочлен новой системы равен

$$\chi_{\text{new}}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + B|C|^{-2} \cdot \lambda + A|C|^{-3} = \chi(|C|\lambda) \cdot |C|^{-3}.$$

А значит, предложенная замена координат не меняет тип состояния равновесия. При этом отображение

$$\tilde{A} = A \cdot |C|^{-3}, \quad \tilde{B} = B \cdot |C|^{-2}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между расширенной бифуркационной диаграммой на плоскости (A, B) для произвольного значения C и бифуркационной диаграммой на плоскости (\tilde{A}, \tilde{B}) при $C = -1$.

Также важно отметить, что расширенная бифуркационная диаграмма состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ не зависит от выбора нелинейных функций $g_i(x, y, z)$, поэтому полученные далее результаты являются универсальными и могут быть применены для любой системы, приводимой к виду (1). На карте седел выделяются области, соответствующие различным наборам корней характеристического уравнения (6), а именно учитываются следующие условия.

- В1 Расположение собственных значений относительно мнимой оси: является ли состояние равновесия O устойчивым или седловым. В зависимости от размерности устойчивого и неустойчивого многообразий седловые состояния равновесия трехмерных потоков бывают типа (2,1) – с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями и (1,2) – с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями.
- В2 Являются ли собственные значения вещественными или комплексными. Тем самым различаются седловые и седло-фокусные состояния равновесия.
- В3 В случае седлового состояния равновесия типа (2,1) важен также знак его седловой величины ν , равной сумме действительных частей устойчивого и неустойчивого собственных значений, ближайших к мнимой оси.²

1.1. Построение карты седел. Определим условия на параметры A и B системы (1), соответствующие границам областей карты седел. Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ корни характеристического уравнения (6). Пусть $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_2) \geq \text{Re}(\lambda_3)$. При построении карты седел важны следующие граничные условия:

- существование характеристического корня, лежащего на мнимой оси: $\text{Re} \lambda_i = 0$;
- существование пары кратных корней: $\lambda_i = \lambda_j$;
- обнуление седловой величины: $\nu = 0$.

²Для седловых состояний равновесия типа (1,2) седловая величина должна быть отрицательной, так как существование аттракторов, содержащих это равновесие, возможно только в этом случае.

Соответствующие соотношения определяют на плоскости параметров (A, B) четыре кривые (рис. 1).

$$L_{\Delta} : 4A + B^2 + 18AB + 4B^3 - 27A^2 = 0 \quad (\lambda_1 = \lambda_2), \quad (7a)$$

$$L_0 : A = 0 \quad (\lambda = 0), \quad (7b)$$

$$L_{\phi} : A - B = 0 \quad (\lambda_{1,2} = \pm i\omega \text{ при } A < 0, \lambda_1 = -\lambda_2 \text{ при } A > 0), \quad (7c)$$

$$L_{\nu} : B + A - 1 = 0, A > 1 \quad (\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega, \lambda_3 = \gamma, \text{ где } \gamma > 0, \omega > 0) \quad (7d)$$

Первое уравнение представляет собой дискриминантную кривую, которая разделяет плоскость параметров на области, в которых характеристическое уравнение (6) имеет один действительный и два комплексных корня, и область, в которой все корни являются действительными. На границе между этими областями уравнение (6) имеет кратный корень, то есть существует число λ_* , для которого выполняются равенства

$$\chi(\lambda_*) = \lambda_*^3 + \lambda_*^2 - B\lambda_* - A = 0$$

$$\chi'(\lambda_*) = 3\lambda_*^2 + 2\lambda_* - B = 0.$$

Вычислив из второго уравнение возможные значения λ_{\pm}

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3B}}{3}$$

и подставив в первое уравнение, получим кривую (7a).

При условии (7b) ($A = 0$) одним из корней характеристического уравнения (6) является $\lambda = 0$. Учитывая, что система (1) при любых значениях параметров имеет состояние равновесия $O(0, 0, 0)$, этот момент соответствует так называемой транскритической бифуркации (бифуркация трансляции), при котором равновесие сохраняется, но меняет свой тип за счет перехода собственного значения через ноль, см. например [48].

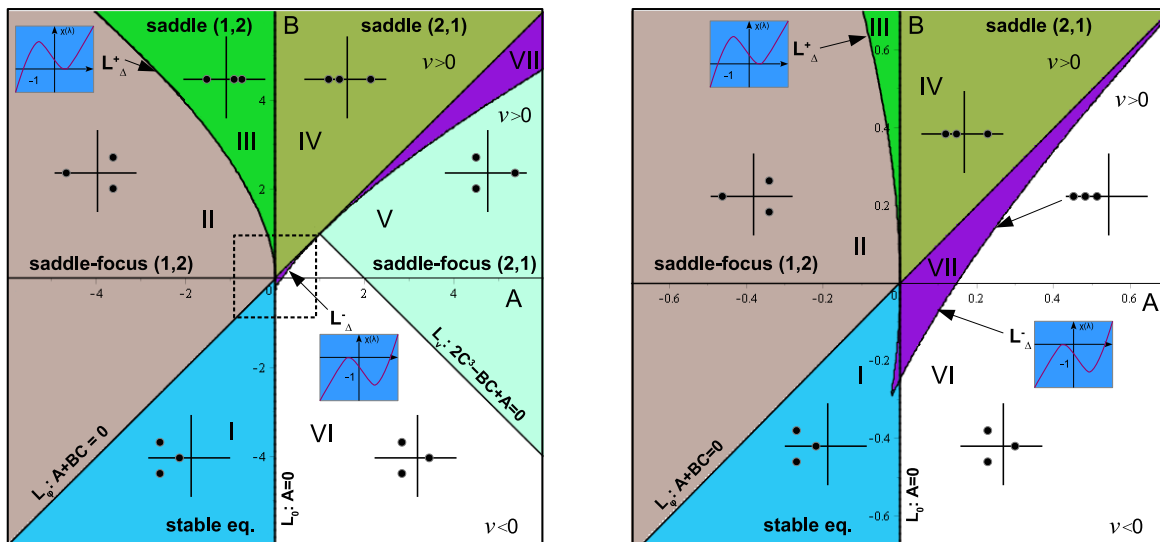


Рис. 1. Карта седел для состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ системы (1) и ее увеличенный фрагмент в окрестности точки $(0, 0)$ на плоскости параметров (A, B)

Fig. 1. Saddle chart for the equilibrium state $O(0, 0, 0)$ of the system (1) and its enlarged fragment in the neighborhood of the point $(0, 0)$ on the plane of parameters (A, B)

Третья кривая (7с) отвечает условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Действительно, в этом случае последний корень характеристического полинома равен $\lambda_3 = -1$, что эквивалентно равенству

$$\chi(C) = B - A = 0.$$

Отметим, что при $A < 0$ условие (7с), соответствует наличию у состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$. Последнее означает, что при переходе через кривую (7с) происходит бифуркация Андронова–Хопфа. При этом само состояние равновесия меняет свой тип с асимптотически устойчивого в обл. I на седло-фокус типа (1,2) в обл. II. Кривая $A = B$ соответствует седловому состоянию равновесия $O(0, 0, 0)$ с набором собственных значений $\lambda_3, -\lambda_1, \lambda_1$, где $\lambda_3 < -\lambda_1 < 0 < \lambda_1$. В этом случае условие (7с) задает кривую обнуления седловой величины $\nu = 0$.

Последнее уравнение (7d) является условием равенства седловой величины нулю для состояния равновесия типа седло-фокус. В этом случае состояние равновесия O имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\omega$ и $\lambda_3 = 1$ (то есть O – это седло-фокус типа (2,1)). Таким образом, должны выполняться условия

$$\chi(1) = B + A - 2 = 0, \quad A > -1.$$

Последнее неравенство гарантирует то, что собственные значения λ_1, λ_2 являются комплексными.

Полученными кривыми плоскость параметров (A, B) разбивается на 7 областей, см. рис. 1.

Область I. Данная область определяется неравенствами: $B < A < 0$. Здесь точка O является асимптотически устойчивым состоянием равновесия.

Область II. Данная область определяется неравенствами: $4A + B^2 + 18AB + 4B^3 - 27A^2 < 0$, $A < 0$, $A - B < 0$. Здесь точка O является седло-фокусом (1,2). Соответственно, ожидаемый здесь странный гомоклинический аттрактор – это аттрактор Шильникова, сценарий возникновения которого хорошо известен, см. [6].

Область III. Определяется неравенствами: $4A + B^2 + 18AB + 4B^3 - 27A^2 > 0$, $A < 0$. В данной области точка O является седлом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Существование странных гомоклинических аттракторов в данной области также возможно. Однако, поскольку у седла имеется неведущее неустойчивое собственное значение, то вдоль соответствующего направления траектории могут легко покинуть окрестность седла. Поэтому существование странного гомоклинического аттрактора, который можно назвать седловым аттрактором Шильникова, можно ожидать лишь для значений параметров вблизи границы между областями II и III.

Область IV. Данная область задается неравенствами: $0 < A < B$. В этой области точка O является седлом типа (2,1) с седловой величиной $\nu > 0$. Возникновение гомоклинического аттрактора здесь связано с образованием гомоклинических восьмерок седла. Однако, если неустойчивые сепаратрисы седла входят в него, касаясь ведущего устойчивого направления с разных сторон (обычная гомоклиническая восьмерка), то аттрактора нет, поскольку каждая из гомоклинических петель является неустойчивой на соответствующем C^1 -гладком глобальном центральном инвариантном многообразии (в силу того, что $\nu > 0$). Существование аттрактора можно ожидать только в случае, когда у седла появляется гомоклиническая восьмерка-бабочка, то есть когда аттрактор является аттрактором лоренцевского типа. При этом такой аттрактор в случае системы (1) не является, вообще говоря, симметричным, так как сама система не обладает симметрией вида $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$, характерной для системы Лоренца.³

³Однако, интересно, что саму систему Лоренца можно привести к виду (1), но соответствующая линейная замена координат разрушает ее симметрию. Соответственно, область IV следует рассматривать как область (потенциального) существования *несимметричного аттрактора Лоренца*, содержащего состояние равновесия $O(0, 0, 0)$.

Область V. Определяется следующими неравенствами: $4A + B^2 + 18AB + 4B^3 - 27A^2 < 0$, $A > 0$, $B + A > 2$. В этой области точка O является седло-фокусом типа $(2,1)$ с $\nu > 0$. Соответственно, здесь можно ожидать существование *спирального аттрактора*, даже симметричного, поскольку система (1) может допускать центральную симметрию (в случае когда нелинейности являются нечетными функциями координат).

Область VI. Задаётся неравенствами: $4A + B^2 + 18AB + 4B^3 - 27A^2 < 0$, $A > 0$, $B + A < 2$. Здесь точка O является также седло-фокусом $(2,1)$, но уже с $\nu < 0$. Как показано в [8, 9], здесь из петли сепаратрисы седло-фокуса рождается устойчивая периодическая орбита. Тем не менее в этой области также могут возникать странные гомоклинические аттракторы, сложная хаотическая динамика которых, по всей видимости, образуется за счет существования отделенного от петли седло-фокуса нетривиального гиперболического множества (счетного числа седловых периодических орбит), сохраняющегося в аттракторе при переходе от $\nu > 0$ к $\nu < 0$.

Область VII. Данная область задается неравенствами: $4A + B^2 + 18AB + 4B^3 - 27A^2 > 0$, $A > 0$, $A - B > 0$. В этой области точка O является седлом типа $(2,1)$ с $\nu < 0$. Здесь можно ожидать, например, появление гомоклинических аттракторов типа Любимова–Закса–Ровеллы [49, 50], то есть гомоклинических аттракторов, похожих на аттрактор Лоренца, но содержащих седловое состояние равновесия с отрицательной седловой величиной.

2. О методах проверки псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков

Определение псевдогиперболического аттрактора было дано в работе [1]. Далее приведем это определение в виде эффективно проверяемых условий, см. также [21, 38].

Аттрактор \mathcal{A} n -мерного C^r гладкого потока F , $r \geq 1$, называется *псевдогиперболическим*, если для него выполняются следующие условия.

- 1) Для каждой точки x аттрактора \mathcal{A} существует разложение касательного пространства T_x на прямую сумму двух линейных подпространств, $T_x = E^{cu}(x) \oplus E^{ss}(x)$ ($\dim E^{cu} = k$, $\dim E^{ss} = n - k$), инвариантных относительно дифференциала DF потока:

$$DF_t E^{cu}(x) = E^{cu}(F_t(x)), \quad DF_t E^{ss}(x) = E^{ss}(F_t(x)),$$

для любого $t \geq 0$ и любой точки $x \in \mathcal{A}$.

- 2) Подпространства $E^{cu}(x)$ и $E^{ss}(x)$ зависят непрерывно от точки $x \in \mathcal{A}$.
- 3) Разложение на подпространства E^{cu} и E^{ss} является *доминантным*, то есть существуют такие константы $C > 0$ и $\beta > 0$ что

$$\|DF_t(x)|_{E^{ss}}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E^{cu}})^{-1}\| \leq C e^{-\beta t}$$

для любого $t \geq 0$ и любого $x \in \mathcal{A}$. (Это означает, что любое возможное сжатие в $E^{cu}(x)$ слабее любого сжатия в $E^{ss}(x)$, а любое возможное растяжение в E^{cu} сильнее любого растяжения в E^{ss}).

- 4) Дифференциал потока DF в ограничении на E^{cu} экспоненциально растягивает k -мерные объемы, то есть существуют константы $C > 0$ и $\sigma > 0$, такие что

$$\det(DF_t(x)|_{E^{cu}}) \geq C e^{\sigma t}$$

для любого $t \geq 0$ и любой точки $x \in \mathcal{A}$.

Условия 1, 3 и 4 данного определения проверяются с помощью расчета спектра показателей Ляпунова $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$ аттрактора. При этом условия 1 и 3 означают, что $\Lambda_k > \Lambda_{k+1}$, условие растяжение объемов 4 равносильно соотношению $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_k > 0$. Для проверки условия 2 требуется расчет ляпуновских векторов. Отметим, что число k может определяться неоднозначно для одной и той же системы. Однако в трехмерных потоковых системах для псевдогиперболических аттракторов удобно полагать, что E^{ss} отвечает подпространству экспоненциально сильного сжатия. Тогда подпространство E^{ss} является одномерным ($\dim E^{ss} = 1$), а подпространство растяжения объемов E^{cu} – двумерным ($\dim E^{cu} = 2$).

Для странных аттракторов трехмерных потоков выполняются следующие условия на показатели Ляпунова:

- $\Lambda_1 > 0$ – аттрактор является хаотическим;
- $\Lambda_2 = 0$ – вдоль типичной траектории аттрактора (не лежащей на устойчивом многообразии состояния равновесия O) отсутствует экспоненциальное растяжение и сжатие;
- $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$ – сжимаются трехмерные объемы.

Таким образом, условия 1 и 3 выполняются автоматически.

Из условия 2 непрерывности разложения на подпространства E^{ss} и E^{cu} следует, что в окрестности седлового состояния равновесия O двумерные площади должны растягиваться, то есть $\Lambda_1(O) + \Lambda_2(O) > 0$. В седловом состоянии равновесия $\Lambda_1 = \lambda_1$, $\Lambda_2 = \lambda_2$, $\Lambda_3 = \lambda_3$. Это означает, что либо седловая величина состояния равновесия должна быть положительной, либо у состояния равновесия должны быть два корня с положительными действительными частями. Таким образом, псевдогиперболические аттракторы не могут возникать в областях I, V, VI, VII. Спиральные аттракторы Шильникова трехмерных потоков (когда у состояния равновесия O имеется пара комплексно-сопряженных собственных чисел с положительной действительной частью) также не могут быть псевдогиперболическими, так как вблизи петли седло-фокуса в этом случае неизбежно возникают устойчивые периодические траектории [51]. Таким образом, в классе трехмерных потоков существование псевдогиперболических гомоклинических аттракторов возможно лишь в областях III и IV на карте седел, см. рис. 1.

Проверка условия 2 непрерывности подпространств E^{ss} и E^{cu} выполняется с помощью расчета ляпуновских векторов, отвечающих сильному сжатию и, соответственно, растяжению объемов [38], см. также [21, 39]. Для непрерывности E^{ss} подпространства необходимо, чтобы угол $d\varphi$ между любыми парами векторов в E^{ss} был малым для любых близких точек x и y , лежащих в аттракторе (теоретически, $d\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow y$). Вместо проверки непрерывности E^{cu} удобно проверять непрерывность вектора v^{cu} , ортогонального к E^{cu} , используя тот же подход, что для проверки непрерывности E^{ss} [38]. Далее подробнее опишем эти процедуры.

Работа метода проверки непрерывности E^{ss} стоит из двух этапов. Первый этап стандартный: производится расчет набора показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ для проверки условий 1, 3 и 4 определения псевдогиперболичности. В процессе расчета набора показателей Ляпунова мы сохраняем набор точек $\{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, \dots, k$, вдоль траектории аттрактора. На втором этапе мы рассчитываем максимальный показатель Ляпунова для системы в обратном времени, двигаясь вдоль траектории $\{x_n\}$, полученной на первом этапе. Отметим, что использование набора точек $\{x_n\}$ является необходимым условием работы алгоритма, так как очевидно, что, если мы возьмем любую точку на аттракторе и начнем итерировать, то ее обратные итерации рано или поздно покинут окрестность аттрактора, и мы можем потерять информацию о нем.

Заметим, что максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций исходной системы совпадает с минимальным показателем Ляпунова Λ_3 , взятым со знаком минус. В свою очередь минимальный показатель Ляпунова Λ_3 отвечает за сильное сжатие на аттракторе. На втором этапе работы алгоритма, помимо расчета Λ_3 , мы находим и запоминаем направление векторов $E^{ss}(x_n)$, отвечающих этому сжатию.

По окончании работы алгоритма строится график на плоскости $(dx, d\varphi)$, где dx – расстояние между любыми двумя точками x_i и x_j в наборе $\{x_n\}$, а $d\varphi$ – угол между соответствующими этим точкам векторами $E^{ss}(x_i)$ и $E^{ss}(x_j)$. Если исследуемый аттрактор является псевдогиперболическим, то подпространство $E^{ss}(x_n)$ является непрерывным, а огибающая точек на соответствующем графике касается вертикальной оси $d\varphi$ только в начале координат. Таким образом, если построенный график удовлетворяет такому свойству, мы делаем вывод, что сильно сжимающее подпространство E^{ss} непрерывно зависит от точки, а исследуемый аттрактор с большой вероятностью является псевдогиперболическим. С другой стороны, если огибающая набора точек на построенной LMP-диаграмме пересекает ось $d\varphi$ в нескольких точках или же между этой огибающей и осью $d\varphi$ нет видимого промежутка, исследуемый аттрактор определенно является квазиаттрактором. Для проверки непрерывности вектора v^{cu} применяется аналогичная процедура, только при этом расчет траектории на аттракторе осуществляется только в прямом времени, а ляпуновский вектор, отвечающий максимальному показателю Ляпунова, вычисляется для транспонированной матрицы в вариациях в обратном времени, см. [38]. Также в этой работе отмечено, что непрерывность E^{ss} влечет за собой непрерывность E^{cu} , поэтому далее мы будем проверять лишь непрерывность подпространства E^{ss} .

В следующем разделе демонстрируется работа метода проверки непрерывности E^{ss} на примере различных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. Для проверки, является ли аттрактор гомоклиническим, мы используем очень простой метод, заключающийся в вычислении минимального расстояния от достаточно длинной траектории на аттракторе до седлового состояния равновесия. В основе этого метода лежит следующее наблюдение. Если седловое состояние равновесия принадлежит аттрактору, то типичная его траектория подходит сколь угодно близко к этому равновесию. То есть расстояние от аттрактора до состояния равновесия должно стремиться к нулю с увеличением времени счета.

3. Примеры гомоклинических аттракторов различных типов

Далее приведем примеры пяти систем, демонстрирующих гомоклинические аттракторы, находящиеся в областях II, III, IV, V, VI, VII карты седел, изображенной на рис. 1. Первые три системы (разделы 3.1, 3.2 и 3.3) записываются в точности в виде (2), для которых в разделе 1 построена классификация гомоклинических аттракторов, а системы из разделов 3.4 и 3.5 могут быть сведены к соответствующему виду с помощью линейных замен.

3.1. Система Арнеодо–Калле–Трессе с центральной симметрией. В качестве системы, демонстрирующей спиральный аттрактор, содержащей седло-фокусное состояние равновесия типа (2,1), существование которого возможно в области V карты седел, рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = Ax + By - 0.4z - 0.5x^3. \end{cases} \quad (8)$$

Заметим, что рассматриваемая система обладает центральной симметрией, то есть инвариантна относительно замены $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$.

Наличие странных аттракторов в рассматриваемой системе было установлено в [52]. В работе Арнеодо–Калле–Трессе [53] было показано, что хаотическая динамика здесь связана с возникновением шильниковской петли седло-фокуса $O(0, 0, 0)$. По всей видимости, именно эти работы обратили внимание зарубежных ученых на открытие Шильниковым спирального хаоса [19].

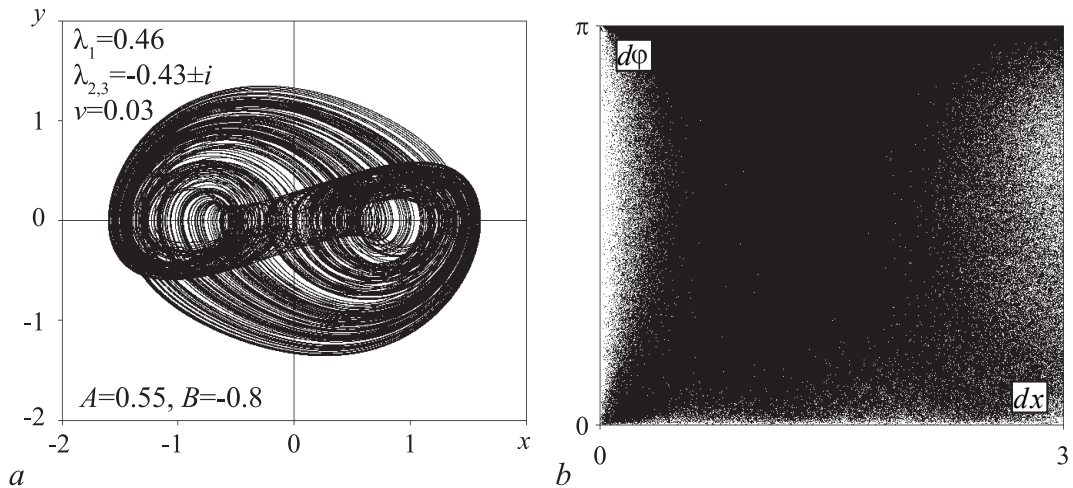


Рис. 2. *a* – Спиральный аттрактор системы (8) при значениях параметров $A = 0.55, B = -0.8$. *b* – Результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss}

Fig. 2. *a* – Spiral attractor of the system (8) for parameters $A = 0.55, B = -0.8$. *b* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss}

На рис. 2, *a* изображен спиральный аттрактор системы (8) при $(A, B) = (0.55, -0.8)$. Собственные числа состояния равновесия при этих значениях параметров $\lambda_1 \approx 0.46$, $\lambda_{2,3} \approx -0.43 \pm i$, седловая величина $\nu = \lambda_1 + \text{Re}(\lambda_2) \approx 0.03 > 0$. При выбранных значениях параметров численно установлено, что седло-фокус O вместе со своими петлями сепаратрис принадлежит аттрактору (расстояние от аттрактора до точки O стремится к нулю с увеличением времени счета). А значит, рассматриваемому аттрактору также принадлежит нетривиальное гиперболическое множество, существующее в любой окрестности петли седло-фокуса. Согласно работе [51], в любой окрестности петли седло-фокуса трехмерного потока существуют устойчивые периодические орбиты, а значит, рассматриваемый аттрактор относится к классу квазиаттракторов и не может быть псевдогиперболическим, что хорошо согласуется с результатами проверки рассматриваемого аттрактора на непрерывность подпространства E^{ss} . Соответствующий график изображен на рис. 2, *b*. Огибающая точек на этом графике не отделена от вертикальной оси $dx = 0$, что означает отсутствие непрерывности подпространства сильного сжатия E^{ss} .

В рассматриваемой системе также может возникать спиральный аттрактор, у которого седловая величина седло-фокусного состояния равновесия является отрицательной (обл. VI на карте седел). Согласно работам [8, 9], из петель сепаратрисы седло-фокуса в рассматриваемом случае рождаются устойчивые периодические траектории. Тем не менее, как показывают результаты численного счета, странные аттракторы здесь так же могут считаться гомоклиническими. На рис. 3, *a* приведен график расстояния от аттрактора системы (8) до состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ в зависимости от параметра A при $B = -0.8$. Для большого диапазона значений параметра расстояние от аттрактора до седло-фокуса близко к нулю. На соответствующих интервалах странный аттрактор можно считать гомоклиническим. Интервалы параметров, для которых расстояние от аттрактора до седло-фокуса оказалось достаточно большим, отвечают окнам устойчивости, внутри которых рождаются устойчивые периодические траектории. Существование таких окон устойчивости является неотъемлемым атрибутом квазиаттракторов.

На рис. 3, *b* изображен портрет спирального аттрактора при $(A, B) = (0.4, -0.8)$, когда минимальное расстояние от аттрактора до седло-фокуса O на времени интегрирования $t = 10000$ не превышает 0.01. Собственные числа состояния равновесия O при рассматриваемых параметрах:

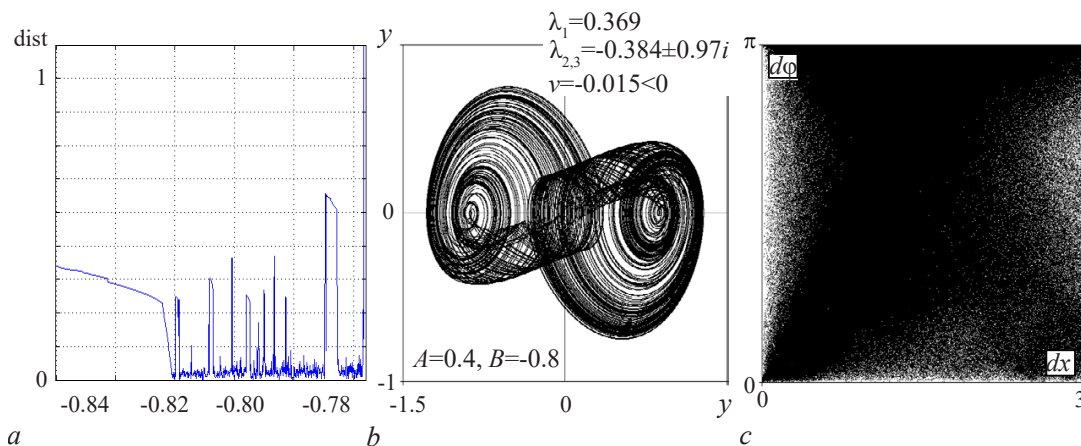


Рис. 3. *a* – График расстояния от аттрактора до состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ в зависимости от параметра A при $B = -0.8$: по горизонтальной оси берется 1000 точек, для каждой точки система интегрируется на интервале $t \in [0, 10000]$. *b* – Спиральный аттрактор системы (8) с отрицательной седловой величиной при значениях параметров $A = 0.4, B = -0.8$. *c* – Результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss}

Fig. 3. *a* – Plot of the distance from the attractor to the saddle-focus $O(0, 0, 0)$ depending on the parameter A for $B = -0.8$: along the horizontal axis 1000 points are taken, for each point, the system integrates over the interval $t \in [0, 10000]$. *b* – Spiral attractor of the system (8) with negative saddle value for parameter values $A = 0.4, B = -0.8$. *c* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss}

$\lambda_1 \approx 0.369, \lambda_{2,3} = -0.384 \pm 0.97i$, а седловая величина $\nu \approx -0.015 < 0$. На рис. 3, *c* приведен график проверки непрерывности подпространства E^{ss} для рассматриваемого аттрактора. В данном случае, как и в случае $\nu > 0$, гомоклинический аттрактор является квазиаттрактором.

3.2. Система Арнеодо–Калле–Трессе с гомоклиническим аттрактором Шильникова.

В отличие от спиральных восьмерочных аттракторов, аттракторы Шильникова являются гомоклиническими при дискретных значениях параметров. При их изменении в окрестности состояния равновесия образуется «дырка», в которую траектории аттрактора не попадают. В качестве системы, демонстрирующей аттрактор Шильникова, существование которого возможно в области II, приведем систему, также предложенную Арнеодо–Калле–Трессе [54]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = Ax + By - 0.4z + x^2. \end{cases} \quad (9)$$

В отличие от уравнений (8), рассматриваемая система не обладает центральной симметрией, однако в ней также наблюдаются аттракторы спирального типа. Характерный портрет хаотического аттрактора системы (9) при значениях параметров, когда он является гомоклиническим, изображен на рис. 4, *a*. В работе [54] странные аттракторы в рассматриваемой системе ассоциировались с возникновением петли к состоянию равновесия $O_2(A, 0, 0)$, являющемуся седло-фокусом с двумерным устойчивым W^s и одномерным неустойчивым W^u многообразиями в области параметров, отвечающей существованию странного аттрактора. Однако возникновение такой гомоклинической траектории фактически означает кризис аттрактора, связанный с его столкновением с двумерным устойчивым многообразием $W^s(O_2)$, ограничивающим бассейн притяжения аттрактора. В работе [21] показано, что гомоклинические аттракторы в рассматриваемой системе связаны с возникновением петли седло-фокуса $O(0, 0, 0)$, неустойчивое многообразие которого является двумерным. Более того, в [21] установлено, что в системе (9), как и во многих других системах со спиральным хаосом, такие аттракторы возникают по сценарию Шильникова [6].

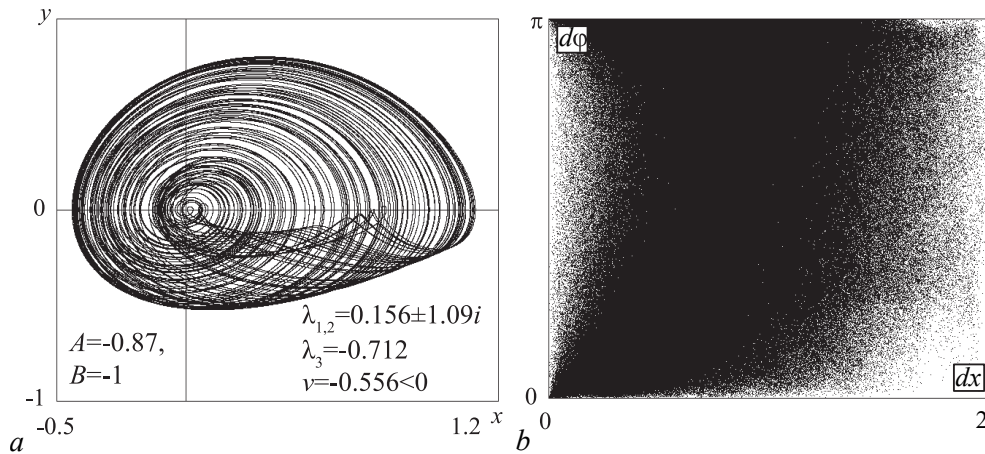


Рис. 4. *a* – Аттрактор Шильникова в системе (9) при значениях параметров $A = -0.87$, $B = -1$. *b* – Результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss}

Fig. 4. *a* – Shilnikov attractor in the system (9) for the parameters $A = -0.87$, $B = -1$. *b* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss}

В трехмерных потоках гомоклинические аттракторы Шильникова, так же, как и гомоклинические спиральные аттракторы, содержащие седло-фокус (2,1), не могут быть псевдогиперболическими [51]. На рис. 4, *b* изображен график, демонстрирующий отсутствие непрерывности подпространства E^{ss} для аттрактора, изображенного на рис. 4, *a*.

3.3. Система с несимметричным аттрактором Лоренца. Заметим, что системы вида (1) не обладают характерной лоренцевской симметрией $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$. Поэтому, в общем случае, гомоклинические аттракторы, содержащие седловую точку O , при параметрах из области IV (см. рис. 1), относятся к классу несимметричных аттракторов лоренцевского типа. Если в системах с аттракторами Лоренца возникновение одной петли сепаратрисы автоматически ведет к возникновению петли второй сепаратрисы, в результате чего образуется конфигурация, напоминающая восьмерку-бабочку, из которой рождается нетривиальное гиперболическое множество, то для систем без симметрии пары петель для левой и правой сепаратрис образуются при разных значениях параметров [40], а нетривиальное гиперболическое множество рождается после рождения второго седлового предельного цикла (из второй петли сепаратрисы).

С помощью перебора нам не удалось подобрать функции g_1, g_2, g_3 , при которых в системе вида (2) существует несимметричный аттрактор Лоренца. Для построения соответствующей системы мы воспользовались критерием Гантмахера [47] и с помощью линейных замен свели классическую систему Шимицу–Мориока к виду (1). После чего в полученной системе отбросили малые члены, разрушив симметрию возникновения петель. В результате преобразований получается система

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2), \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2). \end{cases} \quad (10)$$

Подробнее с результатами исследования полученной системы можно ознакомиться по работе [41]. На рис. 5, *a* изображен портрет аттрактора при параметрах $(A, B, C) = (0.42, 0.58, -1.4)$. Собственные числа состояния равновесия O при этих параметрах: $\lambda_1 \approx 0.57$, $\lambda_2 \approx -0.32$, $\lambda_3 \approx -1.64$, то есть седловая величина положительная ($\nu \approx 0.25 > 0$).

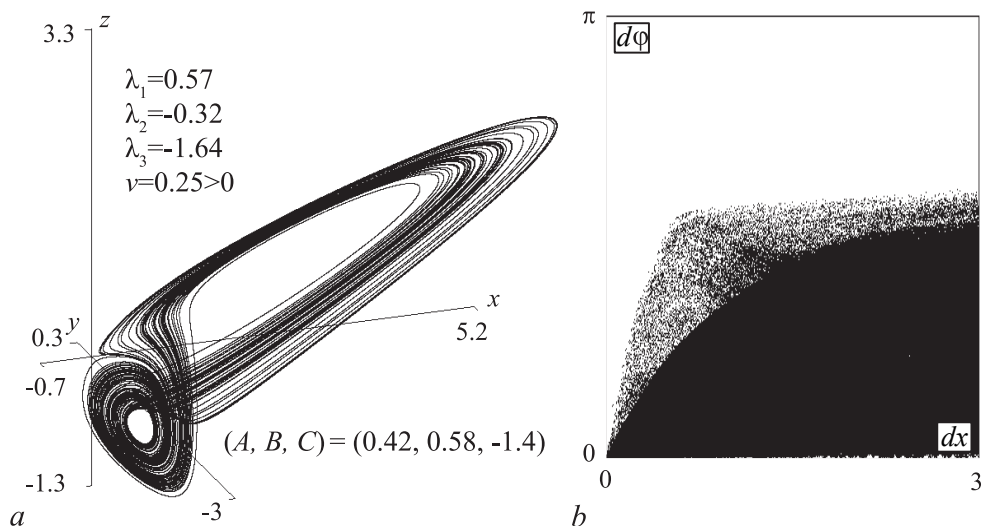


Рис. 5. *a* – Несимметричный аттрактор Лоренца системы (10) при значениях параметров $A = 0.42$, $B = 0.58$, $C = -1.4$. *b* – Результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss}

Fig. 5. *a* – Nonsymmetrical Lorenz attractor in the system (10) for the parameters $A = 0.42$, $B = 0.58$, $C = -1.4$. *b* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss}

Таким образом, все необходимые условия псевдогиперболичности аттрактора выполняются. Для проверки условия непрерывности подпространства E^{ss} воспользуемся описанным в разделе 2 методом. Соответствующий график изображен на рис. 5, *b*. Огибающая точек на представленном графике касается вертикальной оси $dx = 0$ только лишь в точке $(0, 0)$, что говорит о непрерывности подпространства сжатия направлений E^{ss} . Таким образом, аттрактор, изображенный на рис. 5, *a*, является псевдогиперболическим.

Хорошо известно, что не все аттракторы лоренцевского типа (содержащие соответствующее седловое состояние равновесия с положительной седловой величиной) являются псев-

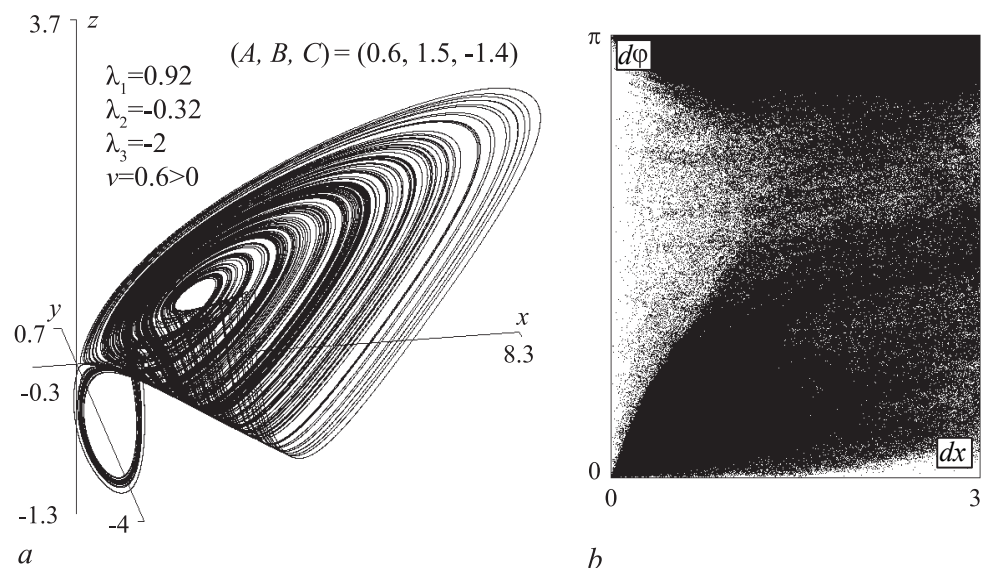


Рис. 6. *a* – Аттрактор системы (10) за границей области существования псевдогиперболического аттрактора Лоренца при $A = 0.6$, $B = 1.5$, $C = -1.4$. *b* – Результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss}

Fig. 6. *a* – Attractor of the system (10) outside the region of existence of the pseudo-hyperbolic Lorenz attractor for $A = 0.6$, $B = 1.5$, $C = -1.4$. *b* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss}

догиперболическими. Например, в классической системе Лоренца за границей области существования аттрактора Лоренца, образованного кривой нулевой сепаратрисной величины, нарушается непрерывность сильно устойчивого слоя [4], аттрактор становится квазиаттрактором. В системе Шимицу–Мориока эта граница устроена гораздо сложнее [11, 12]. Также и в системе (10) не все гомоклинические аттракторы, содержащие седловое состояние равновесия типа (2,1) с положительной седловой величиной, являются псевдогиперболическими. Например, при $(A, B, C) = (0.51, 0.9, -1.4)$, аттрактор, изображенный на рис. 6, *a*, не обладает псевдогиперболической структурой, см. рис. 6, *b*.

3.4. Система Розенцвейга–Макартура с седловым аттрактором Шильникова. В качестве системы, демонстрирующей пример седлового аттрактора Шильникова из области III карты седел (см. рис. 1), рассмотрим систему Розенцвейга–Макартура, описывающую динамику взаимодействия популяций в пищевой цепочке «жертва–хищник–суперхищник» [55].

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{5y}{1+3x} \right), \\ \dot{y} = y \left(\frac{5x}{1+3x} - \frac{0.1z}{1+2y} - 0.4 \right), \\ \dot{z} = z \left(\frac{0.1y}{1+2y} - 0.01 \right). \end{cases} \quad (11)$$

Хаотические аттракторы в рассматриваемой системе были впервые обнаружены в статьях [56–58]. В работах [59], [55] было показано, что странные аттракторы здесь могут иметь спиральную структуру за счет возникновения гомоклинических петель седло-фокусного состояния равновесия. Совсем недавно в [60] было установлено, что аттракторы в системе (11) возникают в соответствии со сценарием Шильникова. Один из таких аттракторов, при параметрах $(r, K) = (0.79, 1.06356)$, изображен на рис. 7, *a*.

Изображенный аттрактор содержит состояние равновесия S с координатами

$$(x, y, z) \approx (0.820, 0.125, 9.815)$$

и собственными числами: $\lambda_{1,2} \approx 0.021 \pm 0.088i$, $\lambda_3 \approx -0.367$. То есть в данном случае состояние равновесия S является седло-фокусом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями.

В работах [55, 60] показано, что гомоклинической петле к состоянию равновесия S на плоскости управляющих параметров K и r отвечает бифуркационная кривая h . Вдоль этой кривой аттрактор хоть и меняется (его форма усложняется за счет возникновения многообходных

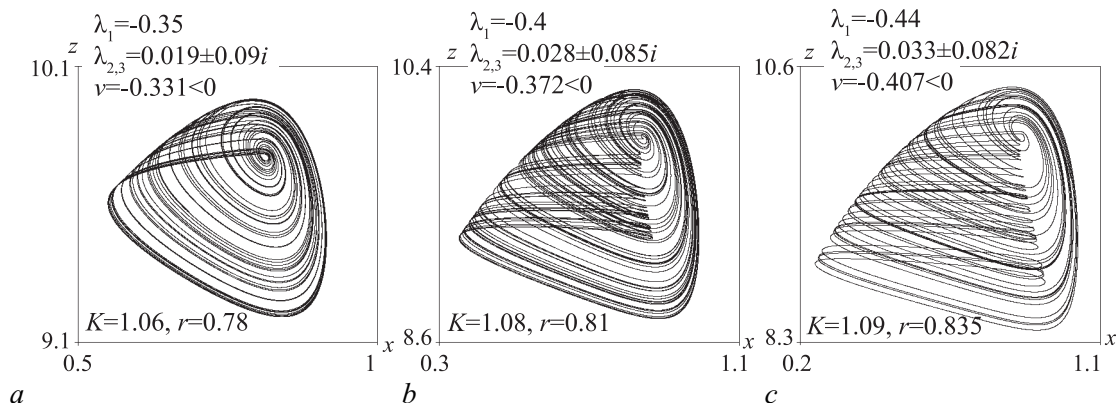


Рис. 7. Различные аттракторы Шильникова в системе Розенцвейга–Макартура (11)

Fig. 7. Different Shilnikov attractors in Rosenzweig–MacArthur system (11)

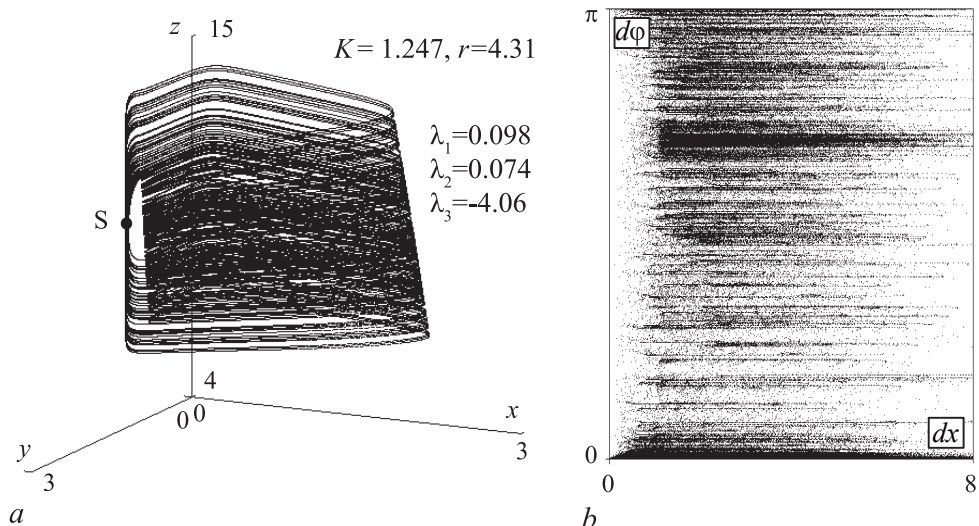


Рис. 8. *a* – Седловой аттрактор Шильникова в системе Розенцвейга–Макартура (11) при значениях параметров $(K, r) = (1.247, 4.31)$. *b* – Результат проверки непрерывности подпространства E^{ss}

Fig. 8. *a* – Shilnikov saddle attractors in Rosenzweig–MacArthur system (11) for the parameters $(K, r) = (1.247, 4.31)$. *b* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss}

гомоклинических петель), но при этом всегда содержит точку S , то есть является гомоклиническим, см. рис. 7, *a*, 7, *b* и 7, *c*. В точке $B : (K, r) \approx (1.220, 4.026)$ на кривой h у состояния равновесия S появляется пара кратных собственных чисел $\lambda_1 = \lambda_2 \approx 0.085$, $\lambda_3 \approx -3.771$: ниже этой точки S является седло-фокусом (1,2), а выше – седлом (1,2).⁴ Результаты численного счета показывают, что при переходе через точку B гомоклинический аттрактор сохраняется, а его тип меняется с шильниковского на седловой шильниковский. Пример седлового аттрактора Шильникова при $(K, r) = (1.247, 4.31)$ изображен на рис. 8, *a*.

Входящее в аттрактор состояние равновесия $S = (x, y, z) \approx (1.208, 0.125, 11.328)$ при рассматриваемых значениях параметров имеет следующий набор собственных чисел: $\lambda_1 \approx 0.098$, $\lambda_2 \approx 0.074$, $\lambda_3 \approx -4.06$. Таким образом, в окрестности S двумерные площади растягиваются, то есть выполняются все необходимые условия возникновения псевдогиперболического аттрактора. Однако результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss} на непрерывность (рис. 8, *b*), показывают, что обнаруженный аттрактор не является псевдогиперболическим. Вопрос существования псевдогиперболического аттрактора в рассматриваемой модели, как и более общий вопрос существования псевдогиперболического седлового аттрактора Шильникова, на сегодняшний день остается открытым.

3.5. Система Любимова–Закса. В качестве примера системы, демонстрирующей аттрактор Любимова–Закса–Ровеллы, рассмотрим систему, предложенную в работе [49]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) + \sigma D(z - r)y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (12)$$

⁴Бифуркационное множество в окрестности таких точек коразмерности два исследовалось в работе Л.А. Белякова [61], где было показано, что из такой точки выходит пучок кривых седло-узловых бифуркаций, а также пучок кривых гомоклинических бифуркаций, отвечающих возникновению двухобходных петель сепаратрисы. Важность открытия Л.А. Белякова для исследования систем с петлями седло-фокуса отмечалась во многих работах, см., например, [55, 62]. В частности, в работе [55] показано, что в модели (11) границы окон устойчивости, неизбежно возникающих внутри области с хаотическим поведением при изменении параметров, образованы кривыми, выходящими из беляковских точек. Кроме того в этой работе доказано, что помимо пучка кривых седло-узловых и гомоклинических бифуркаций из этой точки также выходит пучок кривых бифуркаций удвоения периода.

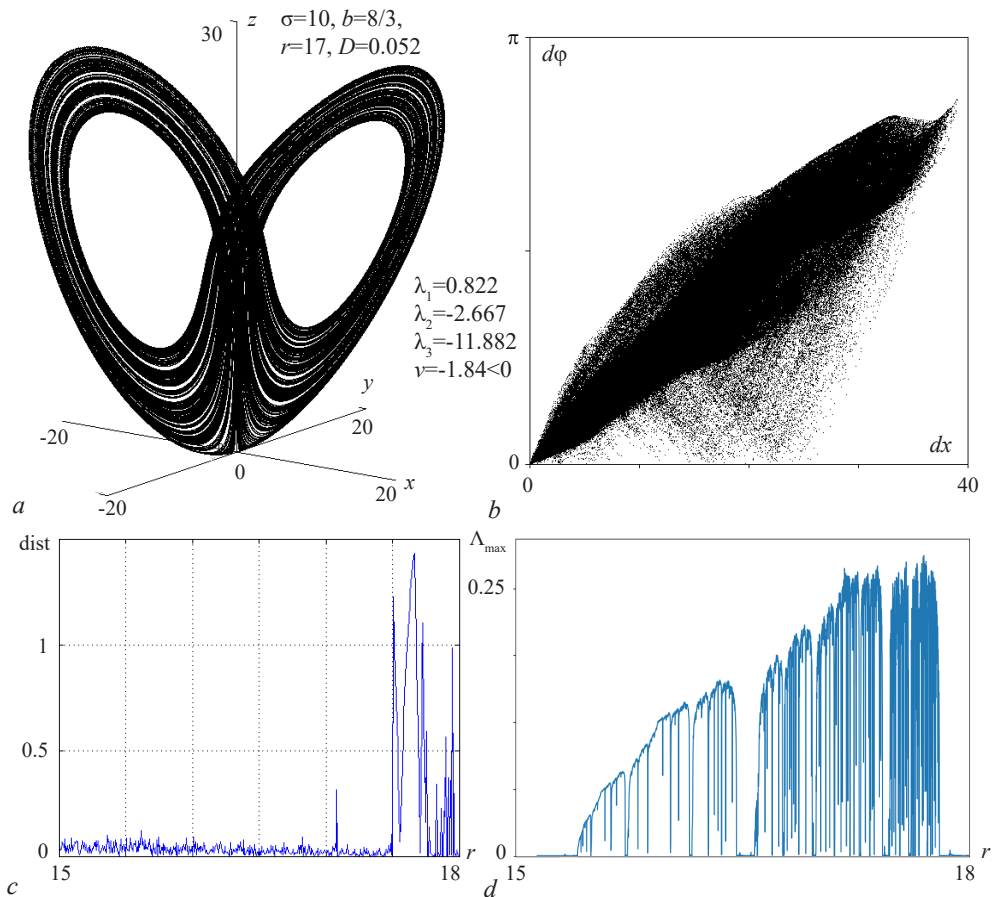


Рис. 9. *a* – Аттрактор в системе Любимова–Закса (12) при значениях параметров $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 17$, $D = 0.052$. *b* – Результат проверки непрерывности подпространства E^{ss} . *c* – График расстояния от аттрактора до состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ в зависимости от параметра r : по горизонтальной оси берется 1000 точек, для каждой точки система интегрируется на интервале $t \in [0, 100000]$. *d* – График максимального показателя Ляпунова в зависимости от параметра r

Fig. 9. *a* – Attractor in Lyubimov–Zaks system (12) for the parameters $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 17$, $D = 0.052$. *b* – Results of the continuity verification for the subspace E^{ss} . *c* – Plot of the distance from the attractor to the equilibrium state $O(0, 0, 0)$ depending on the parameter r : there are 1000 points along the horizontal axis, for each point the system integrates over the interval $t \in [0, 100000]$. *d* – Plot of the maximum Lyapunov exponent depending on the parameter r

Здесь b , σ , r и D – параметры системы, а x , y и z фазовые переменные. Заметим, что при $D = 0$ рассматриваемая система в точности представляет собой классическую систему Лоренца. Как показано в работе [49], при $D > 0$ система также обладает аттракторами лоренцевского типа, однако, седловая величина состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ у таких аттракторов может оказаться отрицательной. Кроме того, в указанной работе предложены сценарии возникновения таких аттракторов в однопараметрических семействах. Математическая теория таких аттракторов была построена в работе А. Ровеллы [50].

На рис. 9, *a* приведен пример странного аттрактора системы (12) при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 17$, $D = 0.052$ ⁵. При этом собственные числа состояния равновесия O принимают следующие значения: $\lambda_1 \approx 0.822$, $\lambda_2 \approx -2.667$, $\lambda_3 \approx -11.882$, то есть седловая величина отрицательная ($\nu \approx -1.844$). На рис. 9, *c* приведен график расстояния от траектории длины 10000 до нулевого состояния равновесия, подтверждающий, что рассматриваемый аттрактор является гомоклиническим.

⁵Параметры b и σ здесь взяты такими же, как для классического аттрактора Лоренца.

Визуально аттрактор Любимова–Закса–Ровеллы не отличается от аттрактора Лоренца. Однако наличие седлового состояния равновесия с отрицательной седловой величиной кардинально сказывается на структуре и свойствах этого аттрактора. Здесь из петель сепаратрисы, возникающих, как и в аттракторе Лоренца, на всюду плотном множестве значений параметров, рождаются устойчивые периодические орбиты. В результате чего аттрактор не может быть псевдогиперболическим (сколь угодно малые изменения параметров приводят к рождению из гомоклинических петель устойчивых предельных циклов), см. рис. 9, *d*, на котором изображен график зависимости максимального показателя Ляпунова системы в зависимости от параметра D . Тем не менее, как доказано в работе [50], множество параметров, при которых рассматриваемый аттрактор является хаотическим, имеет положительную меру. Кроме того, аттракторы Ровеллы, так же как и аттракторы Лоренца, не допускают гомоклинических касаний (инвариантные многообразия седловых предельных циклов, принадлежащих аттрактору, здесь могут пересекаться только трансверсально) и обладают непрерывным устойчивым слоением, что подтверждают эксперименты проверки непрерывности подпространства E^{ss} , см. рис. 9, *a*. Эти свойства принципиально отличают аттрактор Любимова–Закса–Ровеллы от других известных квазиаттракторов, в том числе от аттракторов спирального типа.

Заключение

В заключении отметим, что гомоклинические касания седловых периодических траекторий в трехмерных потоках с отрицательной дивергенцией неизбежно приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [15, 16]. Таким образом, инвариантные многообразия седловых периодических траекторий, принадлежащих псевдогиперболическим аттракторам трехмерных потоков, могут пересекаться только лишь трансверсально, а отсутствие псевдогиперболичности в данном случае может быть установлено за счет обнаружения гомоклинических касаний. С другой стороны, в потоках размерности 4 и выше гомоклинические касания могут не приводить к рождению устойчивых периодических траекторий [20, 21, 63, 64]. Более того, в таких потоках могут возникать новые типы псевдогиперболических гомоклинических аттракторов (так называемые дикие аттракторы), гомоклинические касания в которых неустраимы. Одним из таких аттракторов является дикий спиральный аттрактор Тураева, Шильникова, содержащий седло-фокус (3,1) [1]. По всей видимости, в этом случае также возможно существование других типов псевдогиперболических гомоклинических аттракторов. В последующих работах мы планируем построить классификацию гомоклинических аттракторов четырехмерных потоков и выделить среди них возможные классы псевдогиперболических аттракторов, в том числе диких.

Библиографический список

1. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб. 1998. Т. 189. С. 137–160.
2. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps // Physica D: Nonlinear Phenomena, 2016. Vol. 337. P. 43–57.
3. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
4. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО, 1982. Т. 44. С. 150–212.
5. Hayashi S. Hyperbolicity, stability, and the creation of homoclinic points // Documenta Mathematica, Extra Volume ICM, 1998. Т. 2. С. 789–796.
6. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность. Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. Горький: ГГУ. 1986. С. 150–163.
7. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Gaspard P. and Nicolis G. Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus // Nonlinearity, 1997. Vol. 10, no. 2. P. 409.

8. Шильников Л.П. Некоторые случаи рождения периодических движений в n -мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1962. Vol. 143, № 2. P. 289–292
9. Шильников Л.П. О рождении периодических движений в n -мерном пространстве // Мат. сб. 1963, № 4. С. 443–466
10. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130–141.
11. Шильников А.Л. Бифуркации и хаос в системе Мориока–Шимицу // Межвуз. сб. Методы КТДУ. Горький, 1986. С. 180–183.
12. Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Physica D. 1993. Vol. 62. P. 338–346.
13. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1986. Vol. 33, no. 11. P. 1072–1118.
14. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // Physics Letters A. 1976. Vol. 57, № 5. P. 397–398.
15. Gavrilov N.K., Shilnikov L.P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 1 // Math. USSR Sb. 1972. Vol. 17, no. 4. P. 467–485.
16. Gavrilov N.K., Shilnikov L.P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 2 // Math. USSR Sb. 1973. Vol. 19, no. 1. P. 139–156.
17. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange Attractors and Quasiattractors. Nonlinear Dynamics and Turbulence, G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph (Eds.). Boston: Pitmen, 1983.
18. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Quasiattractors and homoclinic tangencies // Computers and Mathematics with Applications. 1997. Vol. 34, no. 2–4. P. 195–227.
19. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // ДАН СССР. 1965. Т. 160, № 3. С. 558–561.
20. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.
21. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I Pseudohyperbolic Attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2018. Vol. 28, no. 11. P. 291–314
22. Кузнецов С.П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике. 2013.
23. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
24. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., Pochinka O.V. Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 225. P. 195–219.
25. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Physical Review Letters. 2005. Т. 95, no. 14. 144101.
26. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
27. Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2007. Т. 232, no. 2. С. 87–102
28. Кузнецов С.П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 4. С. 5–34.
29. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16. P. 3219–3223.
30. Jalnine A.Yu. Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited

- FitzHughNagumo systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 23, no. 1–3. P. 202–208.
31. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Physics Letters. 2007. Vol. A365. P. 97–104.
 32. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 015203(R).
 33. *Круглов В.П.* Методика и результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов для редуцированных моделей распределенных систем // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 6. P. 79–93.
 34. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, no. 2. P. 160–174.
 35. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P.* Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 56. P. 227–239.
 36. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // В кн.: Бифуркации рождения цикла и ее приложения / Под ред. Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. М.: Мир, 1980. С. 317–335.
 37. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Vol. 328, no. 12. P. 1197–1202.
 38. *Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.* Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system // arXiv preprint arXiv:1809.07250. 2018.
 39. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P.* Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: Angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23, no. 7–8. P. 908–932
 40. *Shilnikov A.L., Shilnikov L.P.* On the nonsymmetrical Lorenz model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. Vol. 1, no. 4. P. 773–776.
 41. *Казаков А.О., Козлов А.Д.* Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Vol. 20, № 2. P. 187–198
 42. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований; Часть 2, 2009. 546 с.
 43. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
 44. *Gonchenko A., Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, № 8. P. 1440005.
 45. *Гонченко А.С., Козлов А.Д.* О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Vol. 18, № 4. P. 17–29.
 46. *Козлов А.Д.* Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Vol. 19, № 2. P. 62–75.
 47. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Москва: Издательство «Наука», 1966.
 48. *Guckenheimer J., Holmes P.* Local bifurcations. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer, New York, 1983. P. 117–165.
 49. *Lyubimov D.V., Zaks M.A.* Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. Vol. 9, no. 1–2. P. 52–64.

50. *Rovella A.* The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor // *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*. 1993. Vol. 24, no. 2. P. 233–259.
51. *Обвьянников И.М., Шильников Л.П.* О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса // *Математический сборник*. 1986. Т. 130, № 4. С. 552–570.
52. *Couillet P., Tresser C., Arneodo A.* Transition to stochasticity for a class of forced oscillators // *Physics letters A*. 1979. Vol. 72, no. 4-5. P. 268–270.
53. *Couillet P., Tresser C., Arneodo A.* Possible new strange attractors with spiral structure // *Communications in Mathematical Physics*. 1981. Vol. 79, no. 4. P. 573–579.
54. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov // *Journal of Statistical Physics*. 1982. Vol. 27, no. 1. P. 171–182.
55. *Kuznetsov Y.A., De Feo O., Rinaldi S.* Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2001. Vol. 62, no. 2. P. 462–487.
56. *Hastings A., Powell T.* Chaos in a three-species food chain // *Ecology*. 1991. Vol. 72, no. 3. P. 896–903.
57. *Rai V., Sreenivasan R.* Period-doubling bifurcations leading to chaos in a model food chain // *Ecological modelling*. 1993. Vol. 69, no. 1–2. P. 63–77.
58. *Kuznetsov Y.A., Rinaldi S.* Remarks on food chain dynamics // *Mathematical biosciences*. 1996, vol. 134, no. 1. P. 1–33.
59. *Deng B., Hines G.* Food chain chaos due to Shilnikov's orbit // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2002. Vol. 12, no. 3. P. 533–538.
60. *Bakhanova Y.V., Kazakov A.O., Korotkov A.G., Levanova T.A., Osipov G.V.* Spiral attractors as the root of a new type of «bursting activity» in the Rosenzweig–MacArthur model // *The European Physical Journal Special Topics*. 2018. Vol. 227, no. 7–9. P. 959–970.
61. *Беляков Л.А.* Бифуркации систем с гомоклинической кривой седло-фокуса с нулевой седловой величиной // *Математические заметки*. 1984. Т. 36, № 5. С. 681–689.
62. *Barrio R., Blesa F., Serrano S., Shilnikov A.* Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with Shilnikov saddle-foci // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84, no. 3. 035201.
63. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Росс. Акад. Наук*. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
64. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // *Докл. РАН*. 1993. Т. 329, № 4. С. 404–407.

References

1. *Turaev D.V., Shilnikov L.P.* An example of a wild strange attractor. *Sb. Math.*, 1998, vol. 189, pp. 291–314.
2. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2016, vol. 337, pp. 43–57.
3. *Afraimovich V.S., Bykov V.V., Shilnikov L.P.* On the origin and structure of the Lorenz attractor. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 1977, vol. 234, pp. 336–339.
4. *Afraimovich V.S., Bykov V.V., Shilnikov L.P.* Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type. *Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo*, 1982, vol. 44. pp. 150–212.
5. *Hayashi S.* Hyperbolicity, stability, and the creation of homoclinic points. *Documenta Mathematica, Extra Volume ICM*, 1998, vol. 2. pp. 789–796.

6. Shilnikov L.P. The theory of bifurcations and turbulence. *Selecta Mathematica Sovietica*, 1991, vol. 10, no. 1, pp. 43–53.
7. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Gaspard P. and Nicolis G. Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus. *Nonlinearity*, 1997, vol. 10, no. 2, pp. 409.
8. Shilnikov L.P. Some cases of generation of periodic motions in an n-dimensional space. *Soviet Math. Dokl.*, 1962, vol. 3, pp. 394–397.
9. Shilnikov L.P. Some cases of generation of period motions from singular trajectories. *Matematicheskii Sbornik*, 1963, vol. 103, no. 4, pp. 443–466.
10. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.
11. Shilnikov A.L. Bifurcation and chaos in the Morioka–Shimizu system. *Selecta Math. Soviet.*, 1991, vol. 10, no. 2, pp. 105–117.
12. Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model. *Physica D*, 1993, vol. 62, pp. 338–346.
13. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1986, vol. 33, no. 11, pp. 1072–1118.
14. Rössler O.E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 1976, vol. 57, no. 5, pp. 397–398.
15. Gavrilov N.K., Shilnikov L.P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 1. *Math. USSR Sb.*, 1972, vol. 17, no. 4, pp. 467–485.
16. Gavrilov N.K., Shilnikov L.P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 2. *Math. USSR Sb.*, 1973, vol. 19, no. 1, pp. 139–156.
17. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange Attractors and Quasiattractors. Nonlinear Dynamics and Turbulence, G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph (Eds.), Boston, Pitmen, 1983.
18. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Quasiattractors and homoclinic tangencies. *Computers and Mathematics with Applications*, 1997, vol. 34, no. 2–4, pp. 195–227.
19. Shilnikov L.P. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1965, vol. 160, no. 3, pp. 558–561.
20. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 4–36 (in Russian).
21. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I Pseudohyperbolic Attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, vol. 28, no. 11, pp. 291–314.
22. Kuznetsov S.P. Dynamic Chaos and Hyperbolic Attractors: From Mathematics to Physics. M.-Izhevsk: Izhevsk Institute for Computer Research, 2013, 488 p. (in Russian).
23. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: From mathematics to physics. *Phys. Usp.*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
24. Grines V.Z., Zhuzhoma E.V., Pochinka O.V. Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 225, pp. 195–219.
25. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type. *Physical Review Letters*, 2005, vol. 95, no. 14, pp. 144101.
26. Kuznetsov S.P. and Seleznev E.P. Strange attractor of Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2006, vol. 102, no. 2, pp. 355–364.
27. Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007, vol. 232, no. 2, pp. 87–102.
28. Kuznetsov S.P. Hyperbolic strange attractors of physically realizable systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, no. 4, pp. 5–34 (in Russian).

29. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, pp. 3219–3223.
30. Jalnina A.Yu. Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited FitzHughNagumo systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 23, no. 1–3, pp. 202–208.
31. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones. *Physics Letters*, 2007, vol. A365, pp. 97–104.
32. Kuptsov P.V. Fast numerical test of hyperbolic chaos. *Phys. Rev. E.*, 2012, vol. 85, 015203(R).
33. Kruglov V.P. Technique and results of numerical test for hyperbolic nature of attractors for reduced models of distributed systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 6, pp. 79–93 (in Russian).
34. Kuznetsov S.P., Kruglov V.P. Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 160–174.
35. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 56, pp. 227–239.
36. Shilnikov L.P. Bifurcation theory and the Lorenz model. Appendix to Russian edition of The Hopf Bifurcation and Its Applications. Eds. J. Marsden and M. McCracken, 1980, pp. 317–335.
37. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 1999, vol. 328, no. 12, pp. 1197–1202.
38. Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system. *arXiv preprint arXiv:1809.07250*, 2018.
39. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: Angles Between tangent subspaces, loca, volume expansion and contraction. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018, vol. 23, no. 7-8, pp. 908–932.
40. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P. On the nonsymmetrical Lorenz model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1991, vol. 1, no. 4, pp. 773–776.
41. Kazakov A.O., Kozlov A.D. The asymmetric Lorenz attractor as an example of a new pseudohyperbolic attractor of three-dimensional systems. *J. SVMO*, 2018, vol. 20, no. 2, pp. 187–198.
42. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. World Scientific; part 2, 2001, 577 p.
43. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 3–28 (in Russian).
44. Gonchenko A., Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 8, pp. 1440005.
45. Gonchenko A.S., Kozlov A.D. On scenaria of chaos appearance in three-dimension nonorientable maps. *J. SVMO*, 2016. vol. 18, no. 4, pp. 17–29.
46. Kozlov A.D. Examples of strange attractors in three-dimentional nonoriented maps. *Zhurnal SVMO*, 2017, vol. 19, no. 2, pp. 62–75.
47. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society; 2000, 660 p.
48. Guckenheimer J., Holmes P. Local bifurcations, in *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983, P. 117–165.

49. Lyubimov D.V., Zaks M.A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, vol. 9, no. 1–2, pp. 52–64.
50. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin. Brazilian Mathematical Society*, 1993, vol. 24, no. 2, pp. 233–259.
51. Ovsyannikov I. M., Shilnikov L. P. On systems with a saddle-focus homoclinic curve. *Matematicheskii Sbornik*, 1986, vol. 172, no. 4, pp. 552–570.
52. Couillet P., Tresser C., Arneodo A. Transition to stochasticity for a class of forced oscillators. *Physics letters A*, 1979, vol. 72, no. 4–5, pp. 268–270.
53. Couillet P., Tresser C., Arneodo A. Possible new strange attractors with spiral structure // *Communications in Mathematical Physics*. 1981, vol. 79, no. 4, pp. 573–579.
54. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov. *Journal of Statistical Physics*, 1982, vol. 27, no. 1, pp. 171–182.
55. Kuznetsov Y.A., De Feo O., Rinaldi S. Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2001, vol. 62, no. 2, pp. 462–487.
56. Hastings A., Powell T. Chaos in a three-species food chain. *Ecology*, 1991, vol. 72, no. 3, pp. 896–903.
57. Rai V., Sreenivasan R. Period-doubling bifurcations leading to chaos in a model food chain. *Ecological modelling*, 1993, vol. 69, no. 1–2, pp. 63–77.
58. Kuznetsov Y.A., Rinaldi S. Remarks on food chain dynamics. *Mathematical biosciences*, 1996, vol. 134, no. 1, pp. 1–33.
59. Deng B., Hines G. Food chain chaos due to Shilnikov's orbit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 533–538.
60. Bakhanova Y.V., Kazakov A.O., Korotkov A.G., Levanova T.A., Osipov G.V. Spiral attractors as the root of a new type of «bursting activity» in the Rosenzweig–MacArthur model. *The European Physical Journal Special Topics*, 2018, vol. 227, no. 7–9, pp. 959–970.
61. Belyakov L.A. Bifurcation of systems with homoclinic curve of a saddle-focus with saddle quantity zero. *Mathematical Notes*, 1984, vol. 36, no. 5, pp. 838–843.
62. Barrio R., Blesa F., Serrano S., Shilnikov A. Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with Shilnikov saddle-foci. *Physical Review E*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 035201.
63. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with non-rough Poincare homoclinic curve. *Doklady Mathematics*, 1993. Vol. 330, no. 2, pp. 144–147.
64. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. On an existence of Newhouse regions near systems with non-rough Poincare homoclinic curve (multidimensional case). *Doklady Akademii Nauk*, 1993. Vol. 329, No. 4, pp. 404–407.



Баханова Юлия Викторовна – родилась в 1995 году, окончила Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (2019). С 2018 года работает стажером-исследователем в международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, Нижний Новгород. Является соавтором трех научных статей по исследованию спирального хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
 E-mail: bakhanovayu@gmail.com



Казиков Алексей Олегович – родился в 1987 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (2010). С 2010 по 2012 обучался в очной аспирантуре в ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, НИУ МИФИ) по направлению «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Работал младшим научным сотрудником (2011–2013) в лаборатории «Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения» в УдГУ (Ижевск). С 2013 года работает доцентом на кафедре «Теории управления и динамики систем» в ННГУ им. Н.И. Лобачевского. С 2015 года работает доцентом на кафедре фундаментальной математики НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). С 2018 года работает ведущим научным сотрудником международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Опубликовал более 40 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского
E-mail: kazakovdz@yandex.ru



Каратецкая Ефросиния Юрьевна – родилась в 1997 году, окончила Национальный исследовательский университет «Высшая Школа экономики» (2019). С 2019 года работает стажером-исследователем в международной лаборатории динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород).

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: eyukaratetskaya@gmail.com



Козлов Александр Дмитриевич – родился в 1988 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (2011). После окончания ННГУ работает в исследовательской лаборатории компании Интел, параллельно занимается научной деятельностью в НИУ ННГУ и НИУ ВШЭ. Область научных интересов – странные аттракторы в многомерных диффеоморфизмах и потоках.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского
E-mail: kozzloff@list.ru



Сафонов Клим Андреевич – родился в 1995 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2019). В настоящее время обучается в очной аспирантуре ННГУ им. Н.И. Лобачевского. С 2019 года работает стажером-исследователем в международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (Нижний Новгород).

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского
E-mail: safonov.klim@yandex.ru