В.А.Барт, В.П.Хавин

ВЕСОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СУММАМИ И ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА-ГОЛУЗИНА-КРЫЛОВА

Интерполяционная формула Карлемана-Голузина-Крылова (короче, формула КГК) восстанавливает функцию класса Харди $H^1(\mathbb{D})$ (где $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ - единственный круг) по её граничным значениям на множестве $E\subset\mathbb{T}\,(=\{|z|=1\})$ положительной длины (см. [I], [2]). Тем самым эта формула даёт эффективное доказательство граничной теоремы единственности для функций классов Харди $H^p(\mathbb{D})$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. В этой статье мы хотим обратить внимание на то, что формула КГК служит также источником некоторых явных а п п р о к с и м а ц и о н н ы х формул.

При $p\in(1,+\infty)$ упомянутая граничная теорема единственности равносильна теореме аппроксимации в пространства $L(E')$, где $E':=\mathbb{T}\setminus E$, $q:=p/(p-1)$, утверждающей, что в $L^q(E')$ функцию, тождественно равную единице, можно приблизить линейными комбинациями гармоник z^n с о т р и ц а т е л ь н ы м и n. Этот факт выводится из теоремы единственности простой ссылкой на теорему Хана-Банаха. Однако, при таком подходе возможность аппроксимации лишь констатируется, но не осуществляется, т.к. отсутствует сколько-нибудь явная конструкция приближений.

Мы покажем, что (после некоторого преобразования формула КГК приводит к такой конструкции и служит основой эффективного доказательства не только граничных теорем единственности, но и двойственных им теорем приближения. Это относится не только к приближениям в $L^q(E')$, но и к приближениям в пространстве $L^q(h)$, где h - неотрицательная весовая функция, удовлетворяющая условиям

$$(a)\, h\in L^1(\mathbb{T})\,(=L^1(\mathbb{T},m)),\quad (b)\int\limits_{\mathbb{T}}\log h\,dm=-\infty \tag{I}$$

(m обозначает нормированную меру Лебега на $\mathbb{T}$, а $L^q(h)$ состоит из всевозможных комплексных функций g, заданных на $\mathbb{T}$, измеримых по Лебегу и таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}}|g|^q h\,dm<+\infty;$$

нормой функции g в $L^q(h)$ считается $\left(\int_{\mathbb{T}}|g|^q h\,dm\right)^{1/q}$).

В частном случае (когда $h=\chi_{E'}$ (= характеристическая функция множества E')) и в более слабой форме аналогичный подход был предложен в работе [10].

Мы опишем также аппроксимационный аналог формулы КГК для функций, заданных на вещественной прямой $\mathbb{R}$. В заметке [3] Маккин поставил задачу отыскания эффективных способов приблизить гармонику e^{ixT}, где $T>0$, суммами $\sum_{k=1}^{N} c_k e^{ixt_k}$ с $t_k \leqslant 0$ в весовом пространстве $L^2(h)$, где h – неотрицательная функция класса $L^1(\mathbb{R})$, подчиненная условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log h(t)}{1+t^2}\,dt = -\infty, \qquad (1')$$

а пространство $L^2(h)$ определяется естественным образом (см. выше). В о з м о ж н о с т ь такой аппроксимации гарантируют классические результаты Сегё, Колмогорова и М.Крейна (см. [4]–[9]). Отметим, что из работ [4], [7] и [8] (см. также [9]) можно извлечь и некоторые явные формулы. А в этой статье будет показано, что источником подобных формул может служить некоторая модификация формулы КГК.

1. <u>Весовой аналог формулы КГК</u>. В этом пункте изложены наводящие соображения, которыми мы будем руководствоваться при построении аппроксимационных вариантов формулы КГК.

Символом $H^p(\mathbb{T})$ мы будем обозначать множество

$$\{f\in L^p(\mathbb{T}) : \hat f(n)=0,\ n=-1,-2,\dots\}, \text{ где } \hat f(n):=\int_{\mathbb{T}} f z^{-n}\,dm(z)$$

– n-й коэффициент Фурье функции f, а $p\in[1,+\infty]$. Мы будем также рассматривать класс $H^p(\mathbb{D})$ всех функций F, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и таких, что

$$\sup_{0<r<1}\int_{\mathbb{T}} |F(rz)|^p\,dm(z)<+\infty, \text{ если } p<+\infty \text{ и } \sup_{\mathbb{D}}|F|<+\infty, \text{ при } p=+\infty,$$

отождествляя функцию $F\in H^p(\mathbb{D})$ с функцией $f\in H^p(\mathbb{T})$, определенной равенством $f(\zeta):=\lim_{r\uparrow 1} F(r\zeta)$ при m-почти всех $\zeta\in\mathbb{T}$.

Пусть

$$(a)\ f\in H^1(\mathbb{T}),\ (b)\ \psi\in L^1(\mathbb{T}),\ (c)\ |f-\psi|\leqslant h \quad m\text{-п.в.}, \qquad (2)$$

где h удовлетворяет условиям (1). Условие (1б) выражает определенную "малость" функции h. Поэтому оценка (2с) позволяет рассматривать ψ как некоторое приближение к функции f. При данной ψ в силу известных свойств классов Харди неравенству (2с) способна удовлетворить лишь о д н а функция $f \in H^1(\mathbb{T})$. Сейчас мы рассмотрим необходимое обобщение формулы КГК, позволяющее восстановить эту функцию f по её приближению ψ.

С неотрицательной функцией H, заданной на $\mathbb{T}$ и удовлетворяющей условию

$$\log H \in L^1(\mathbb{T}),$$

мы свяжем внешнюю функцию $\operatorname{Ext} H$:

$$(\operatorname{Ext} H)(\zeta) = \exp\left[\int_{\mathbb{T}} \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \log H(z)\, dm(z)\right] \quad (\zeta \in \mathbb{D}). \tag{3}$$

Модуль граничных значений функции $\operatorname{Ext} H$ на окружности $\mathbb{T}$ m-почти везде равен H. Отметим, что правая часть равенства (3) имеет смысл при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, а не только при $\zeta \in \mathbb{D}$. Тем самым функция $\operatorname{Ext} H$ определена и аналитична всюду в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$.

Положим

$$H := 1/h, \quad H_N := \min(H, N), \quad \varphi_N := \operatorname{Ext} H_N$$

(мы считаем, что $H(\zeta) = +\infty$, если $h(\zeta) = 0$; N обозначает натуральное число).

ТЕОРЕМА I. При условиях (I) и (2)

$$f(\zeta) = \lim_{N=+\infty} \frac{1}{\varphi_N(\zeta)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\varphi_N(z)\psi(z)}{z-\zeta}\, dm(z) \quad (\zeta \in \mathbb{D}) \tag{4}$$

равномерно на каждом круге $r\mathbb{D}$, $0 < r < 1$.

Формула (4) становится классической формулой КГК при $\psi = f\chi_{E'}$, $h = \chi_{E'}$, где $E \subset \mathbb{T}$, $m(E) > 0$, а χ_E – характеристическая функция множества E.

В формулировке теоремы I мы рассматриваем f как элемент множества $H^1(\mathbb{D})$ (т.е. как функцию, заданную в $\mathbb{D}$). Если $\psi \in L^2(\mathbb{T})$, $f \in H^2(\mathbb{D})$, то функцию f и выражение под знаком предела в формуле (4) можно рассматривать и как элементы пространства $H^2(\mathbb{T})$. Названное выражение можно при этом записать как $\varphi_N^{-1} T_{\varphi_N}(\psi)$, где $T_{\varphi_N} : \psi \mapsto P_+(\varphi_N \psi)$ – оператор Теплица с символом φ_N (P_+ обозначает проектор Рисса : $P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$). Дальнейшее основано на следующем наблюдении: если вес h на большом протяжении равен единице, то $\varphi_N^{-1} T_{\varphi_N}(\psi)$ мало отличается в $L^2(h)$ от граничных значений некоторой (явно выписываемой) функции, аналитической во внешности круга $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$.

2. Модификация формулы (4).

Положим

$$E_K := \{\zeta \in \mathbb{T},\ N_K \leqslant H(\zeta) \leqslant N_{K+1}\},$$

где (N_K) - строго возрастающая последовательность положительных чисел. Её можно выбрать так, что

$$\lim_{K \to +\infty} \int_{E_K} \log h \, dm = -\infty$$

(см. (Iв)). Пусть. далее,

$$h_K(\zeta) := 1, \text{ если } h(\zeta) > 1/N_K,\ h_K(\zeta) = h(\zeta), \text{если } \zeta \in E_K,\ h_K(\zeta) = N_{K+1}^{-1},$$
$$\text{если } h(\zeta) < N_{K+1}^{-1}.$$

Иными словами

$$1/h_K(\zeta) := H_K(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } H(\zeta) < N_K, \\ H(\zeta), & \text{если } \zeta \in E_K, \\ N_{K+1}, & \text{если } H(\zeta) > N_{K+1}. \end{cases}$$

Отметим, что если $h(\zeta) > 0$, то при всех достаточно больших K $(K > K(\zeta))$

$$H_K(\zeta) = 1.$$

Кроме того,

$$1 \leqslant H_K(\zeta) \leqslant H(\zeta) \quad \text{при любом } \zeta \in \mathbb{T}.$$

Положим

$$Q_K := \operatorname{Ext} \sqrt{H_K},$$

так что,в частности,

$$Q_K \overline{Q_K} = H_K \quad m\text{-п.в.} \quad \text{на } \mathbb{T}. \qquad (5)$$

При фиксированном K

$$1 \leqslant |Q_K| \leqslant \sqrt{N_{K+1}}$$

всюду в $\mathbb{D}$ и m-п.в. на $\mathbb{T}$, так что $Q_K, Q_K^{-1} \in H^\infty(\mathbb{T})$ (имеются в виду граничные значения функций $Q_K^{\pm 1}$ изнутри $\mathbb{D}$). Пусть

$$\psi_K = f(1-h_K), \text{ где } f \in H^2(\mathbb{T}),\ S_K^f(\zeta) := \frac{1}{Q_K(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\psi_K(z)\cdot Q_K(z)}{z-\zeta}\, dz \ (\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{T}).$$

Нетрудно доказать следующий аналог формулы (4):

$$f(\zeta) = \lim_{K\to\infty} S_K^f(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{D}). \tag{6}$$

Этот результат можно усилить. Положим

$$R_K(f) := f - Q_K^{-1} T_{Q_K}((1-h_K)f) = f - S_K^f(\zeta).$$

ТЕОРЕМА 2. (а) $\lim\limits_{K\to\infty} \|R_K(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$; (в) если $m \in \mathbb{Z}_+$, $f = z^m$, то $\lim\limits_{K\to\infty} \|R_K(f)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0$.

Заметим, что в утверждении (в) $Q_K R_K(z^m)$ есть линейная комбинация степеней $1, z, z^2, \ldots, z^m$ (Это легко следует из (5)).

3. Аппроксимация положительных гармоник отрицательными. Дальнейшие преобразования основаны на том, что функции S_K^f определены и внутри, и вне окружности $\mathbb{T}$.

ЛЕММА I. Пусть $f \in H^\infty(\mathbb{T})$. При любом K функция S_K^f есть интеграл типа Коши некоторой функции $\eta_K \in L^2(\mathbb{T})$:

$$S_K^f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\eta_K(z)\,dz}{z-\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{T}).$$

Если $m \in \mathbb{Z}_+$, $f = z^m$, то

$$\lim_{K\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} |\eta_K|^2 h\, dm = 0.$$

Теперь всё готово для написания аппроксимационной формулы, доставляющей явное выражение функций класса $H^2_-(\mathbb{T})$, приближающих в $L^2(h)$ данную степень z^m, где $m \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $g \in L^2(\mathbb{T})$. Обозначим через g_+ и g_- риссовские проекции $P_+(g)$, $P_-(g)$ функции g. Иначе говоря, при m-п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$

$$g_+(\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)\,dz}{z - r\zeta}, \quad -g_-(\zeta) = \lim_{r \downarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)\,dz}{z - r\zeta}$$

Из теоремы 2 и из леммы I легко следует

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия (I), $m \in \mathbb{Z}_+$, $f = z^m$, то

$$\lim \| f - (\eta_K)_- \|_{L^2(h)} = 0.$$

Функция $(\eta_K)_-$ совпадает m-п.в. на $\mathbb{T}$ с граничными значениями функции S_K^f, ограниченной и аналитической в $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup \mathbb{T})$. Кроме того, $S_K^f(\infty) = 0$. Фейеровские суммы ряда Лорана функции $S_K^f \mid (\mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup \mathbb{T}))$ при данном K равномерно ограничены, содержат лишь отрицательные степени z и m-почти всюду (а значит и в $L^2(h)$) сходятся к S_K^f.

Пусть функция λ определена в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Условимся обозначать через $\lambda_+(\zeta)$ и $\lambda_-(\zeta)$ её радиальный предел в точке ζ, соответственно, изнутри и извне $\mathbb{T}$. Прямой подсчет показывает, что

$$Q_K^-(\zeta) = \left(\overline{Q_K^+}\right)^{-1}(\zeta) \text{ при } m\text{-п.в. } \zeta \in \mathbb{T}.$$

Это позволяет записать результат теоремы 3 в следующем виде:

$$f = \lim_{K \to \infty} \left(-\left(\overline{Q}_K\right)_+ \left(C\left(\frac{f}{Q_K^+} \right) \right)_- \right) \text{ в } L^2(h). \qquad (7)$$

Здесь C обозначает преобразование Коши, сопоставляющее любой функции $R \in L^1(\mathbb{T})$ функцию $C(R)$, заданную в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ формулой

$$C(R)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{R(z)\,dz}{z - \zeta} \quad (|\zeta| \neq 1).$$

Формулу (7) можно записать и по-другому, используя понятие оператора Ганкеля (см. [II], стр.232). А именно,

$$f = \lim_{k \to \infty} -(\bar{Q}_k)_+ H_{1/\bar{Q}_k}(f) \text{ в } L^2(h),$$

где H_φ обозначает оператор Ганкеля с символом φ.

Из доказательства леммы I можно усмотреть, что для ограниченного веса h результат теоремы 3 сохраняет силу при любой функции f класса $\bigcup_{p>2} H^p_+(\mathbb{T})$.

4. <u>Весовая аппроксимация на прямой</u>. Здесь мы кратко опишем аналог формулы (7) для пространства $L^2(\mathbb{R}, h) (= L^2(h))$. Мы следуем той же схеме, что и в предыдущем пункте. Её осуществление несколько осложняется из-за некомпактности прямой $\mathbb{R}$.

Пусть неотрицательная функция h, заданная на $\mathbb{R}$, принадлежит классу $L^1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (I′). Положим: $h_0(x) := h(x) \cdot (1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Как и раньше, выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_k\}$ и последовательности подмножеств вещественной прямой:

$$E_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{N_{k+1}} \leqslant h_0(x) < \frac{1}{N_k} \right\},$$

$$E'_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : h_0(x) > \frac{1}{N_k} \right\},$$

$$E''_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : h_0(x) < \frac{1}{N_{k+1}} \right\};$$

очевидно, что $\mathbb{R} = E_k \cup E'_k \cup E''_k$, при любом $k \in \mathbb{N}$.
Положим

$$h_k(x) := \begin{cases} 1, & x \in E'_k, \\ h_0, & x \in E_k, \\ \frac{1}{N_{k+1}}, & x \in E''_k. \end{cases}$$

Будем считать, что последовательность $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ выбрана так, что

$$\int_{E_k} \frac{\log h_0}{1+x^2}\, dx \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty;$$

возможность такого выбора гарантирует условие (I′). Далее, пусть

$$H_k(x) := \frac{1}{h_k(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Введем внешние функции Q_k :

$$Q_k(z) := \exp \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+xz}{x-z} \cdot \frac{\log \sqrt{H_k}}{1+x^2} \, dx, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Они имеют угловые граничные значения п.в. на $\mathbb{R}$ при стремлении из верхней и нижней полуплоскости, которые мы обозначим соответственно $Q_k^+(x)$ и $Q_k^-(x)$, $x \in \mathbb{R}$, причем

$$Q_k^+ \cdot \overline{Q_k^+} = H_k \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}. \qquad (5')$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$, функции Q_k, Q_k^{-1} ограничены и голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что функция f принадлежит $H_+^\infty \cap H_+^2$. Определим функции

$$\psi_k := f(1-h_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$S_k^f(\zeta) := \frac{1}{Q_k(\zeta)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\psi_k(x) \cdot Q_k^+(x)}{x-\zeta} \, dx, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Легко доказывается аналог формулы КГК:

$$f(\zeta) = \lim_{k \to +\infty} S_k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}_+. \qquad (6')$$

Положим, как и в случае окружности,

$$R_k[f] := f - Q_k^{-1} S_k^f.$$

ТЕОРЕМА 2′. $\lim\limits_{k \to \infty} \| R_k(f) \|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} \| R_k(f) \|_{L^2(h)} = 0$, если вес ограничен. Так же, как и в случае окружности, справедлива

ЛЕММА I′. Если $f \in H_+^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, то при любом $k > 0$ функция S_k^f есть интеграл типа Коши с плотностью $\eta_k \in L^2(\mathbb{R})$:

$$S_k^f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\eta_k(x)}{x-\zeta}\,dx,\ (\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

причём $\lim_{k\to\infty}\|\eta_k\|_{L^2(h)}=0$. (Символ $H^2_+(\mathbb{R})$ обозначает множество всех функций класса $L^2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых сосредоточено на $(0,+\infty)$.

Аналог теоремы 3 выглядит теперь так:

ТЕОРЕМА 3'. Если неотрицательная функция $h\in L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (I) и ограничена, а $f\in H^2_+\cap L^\infty(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{k\to\infty}\|f-(\eta_k)_-\|_{L^2(h)}=0, \tag{8}$$

где η_k^- обозначает угловые граничные значения при стремлении из нижней полуплоскости функции $C(\eta_k)$,

$$C(\eta_k)(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\eta_k(x)}{x-\zeta}\,dx\ (\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}).$$

Если должным образом сузить класс функций f, то требование ограниченности веса можно снять. Обозначим через $\mathcal{E}_\sigma$ класс всех целых функций f степени не выше σ ($|f(\zeta)|=O(e^{(\sigma+\varepsilon)|\zeta|})$, $|\zeta|\to+\infty$, при любом $\varepsilon>0$).

ТЕОРЕМА 3''. Пусть h удовлетворяет всем условиям теоремы 3' (кроме, быть может, условия ограниченности), а функция f, удовлетворяющая условиям теоремы 3, совпадает на $\mathbb{R}$ с функцией класса $\mathcal{E}_\sigma$ при некотором $\sigma>0$. Тогда имеет место (8).

Теорема 3'' позволяет предложить эффективную процедуру поиска линейной комбинации отрицательных гармоник e^{iTx} $(T>0)$ (см. задачу Маккина, о которой говорилось в начале статьи). А именно, функция $f_\varepsilon: x\longmapsto e^{iTx}((\sin\varepsilon x)/\varepsilon x)e^{i\varepsilon x}$ при $\varepsilon\to 0$ стремится к e^{iTx} в $L^2(h)$; при фиксированном ε она удовлетворяет всем условиям теоремы 3'', которая позволяет предъявить L^2-функцию g с отрицательным спектром (функцию класса $H^2_-(\mathbb{R})$) близкую к f_ε в $L^2(h)$; функцию g уже совсем нетрудно приблизить в $L^2(h)$ линейной комбинацией отрицательных гармоник. Эту довольно громоздкую процедуру можно, по всей видимости, упростить.

Литература

1. А й з е н б е р г Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. – Новосибирск: "Наука", 1990.
2. П р и в а л о в И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гос.изд.тех.-теор.лит., 1950.
3. D y m H., M c K e a n H.P. Gaussian Processes, Function Theory and the Inverse Spectral Problem. – New York; Acad. press, 1975.
4. S z e g ö G. Über der Entwickelung einer analytishen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. – Math.Ann., 1921, v.82, p.188-212.
5. К о л м о г о р о в А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. – Бюлл.МГУ, математика, 1941, т.II, вып.6.
6. К р е й н М.Г. Об одном обобщении исследований G.Szegö, В.И.Смирнова и А.Н.Колмогорова. – Докл.АН СССР, 1945, т.46, № 3, с.95-98.
7. А х и е з е р Н.И. Об одном предложении А.Н.Колмогорова и об одном предложении М.Г.Крейна. – Докл.АН СССР, 1945, т.50, № 1, с.35-39.
8. Т у м а р к и н Г.И. Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых. – Мат.сборник, 1957, т.42, с.79-128.
9. K o o s i s P. The Logarithmic Integral. – Cambridge: University Press, 1988, v.I.
10. В и д е н с к и й И.В., Г а в у р и н а Е.М., Х а в и н В.П. Аналоги интерполяционной формулы Карлемана-Голузина-Крылова. – Теория операторов и теория функций, межведомственный сборник, изд.ЛГУ, 1983, вып.I, с.21-31.
11. Н и к о л ь с к и й Н.К. Лекции об операторе сдвига. – М.: "Наука", 1980.

Bart V.A., Havin V.P. Weighted approximation for trigonometric sums and the Carleman-Krylov-Golusin formula.

Summary

An explicit formula is given yielding linear combinations of harmonics with negative frequencies approximating a prescribed harmonic with a positive frequency in a weighted space $L^2(h)$. The formula is based on the interpolation Carleman-Krylov-Golusin formula.