В. В. Шихеева, Построение модели представлений полной линейной группы над конечным полем нечетной характеристики,
УМН, 1979, том 34, выпуск 5, 233–234

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В. В. Шихеева

1. Пусть $G = GL(n, \mathrm{F}_q)$ — полная линейная группа над конечным полем нечетной характеристики. В заметке построено представление T группы G, обладающее тем свойством, что почти каждое неприводимое представление G входит в T ровно один раз (почти-модель представлений G). Эти представления напоминают построенные в [1] модели представлений компактных групп Ли. Аналогичные представления могут, по-видимому, быть построенными и для других групп Шевалле. Другой метод построения почти-моделей представлений $GL(n, \mathrm{F}_q)$ приведен в [2].

2. Пусть V — n-мерное векторное пространство над конечным полем F_q нечетной характеристики. Фиксируя в V базис, получаем естественное действие группы G на V и на пространстве $\mathcal{F}$ всех невырожденных билинейных симметричных форм. Пространство $\mathcal{F}$ под действием G разбивается на два класса эквивалентности (см. [3]). Зафиксируем представителей f_0 и f_1 этих классов.

Пусть $O(f)$ — ортогональная группа, соответствующая некоторой $f \in \mathcal{F}$. На $O(f)$ определен характер sign_f: $O(f) \to \{\pm 1\}$. А именно: если $o \in O(f)$ — отражение относительно неизотропного вектора $a \in V$, то $\mathrm{sign}_f(o) = 1$ при $f(a, a) \in (\mathrm{F}_q^*)^2$ и -1 в остальных случаях. Для $f \in \mathcal{F}$ положим

$$\tau_f = \mathrm{Ind}_{O(f)}^{GL(n,\, \mathrm{F}_q)} (\mathrm{sign}_f) \quad \text{и} \quad T(q) = \tau_{f_0} \oplus \tau_{f_1}.$$

Будем говорить, что величина $x(q)$, зависящая от q, эквивалентна величине $y(q)$ $(x \sim q)$, если существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от q такие, что для достаточно больших q

$$c_1 y(q) \leqslant x(q) \leqslant c_2 y(q).$$

Теорема 1. *Число различных представлений, входящих в $T(q)$ с единичной кратностью, эквивалентно числу всех неприводимых представлений группы $GL(n, \boldsymbol{F}_q)$.*

Приведем набросок доказательства теоремы 1.

3. Так как $\mathrm{sign}_{f_0}(-E) \neq \mathrm{sign}_{f_1}(-E)$, где E — единичная матрица, то никакое неприводимое представление группы G не может входить с ненулевой кратностью и в τ_{f_0}, и в τ_{f_1}.

4. Пусть Ω — множество всех неприводимых представлений группы G, (τ, ω) — кратность вхождения неприводимого представления $\omega \in \Omega$ в представление τ группы G. Если существует некоторая антиинволюция $\mathfrak{i}$ алгебры сплетающих операторов $\mathbf{B}$ представления $\tau = \tau_f$, причем $\mathbf{B}^{\pm} = \{x \in \mathbf{B} \mid \mathfrak{i}x = \pm x\}$, то имеем оценку:

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ (\tau,\, \omega) \neq 0}} ((\tau, w) - 1) \leqslant \dim \mathbf{B}^-. \tag{1}$$

Поскольку $|\Omega| \sim q^n$[1)], из п. 3 и (1) следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $\dim \mathbf{B}^+ \sim q^n/2$ и $\dim \mathbf{B}^- \leqslant c q^n$, где $c > 0$ не зависит от q.

Алгебра $\mathbf{B}$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$ функций на группе G таких, что $b(o_1 g o_2) = \mathrm{sign}(o_1) b(g) \mathrm{sign}(o_2)$, где $v_1, v_2 \in O(f)$, $g \in G$, $b \in \mathcal{B}$. Пусть $A \in G$. Тогда $A^{\mathfrak{f}(f)}$ определяется из условия: $(Ax, y) = (x, A^{\mathfrak{f}(f)} y)$. Антиинволюция $\mathfrak{i}$ задается формулой

$$(\mathfrak{i}b)(A) = b(A^{\mathfrak{f}(f)}).$$

5. Зададим взаимно однозначное соответствие ψ между множеством классов смежности $O(f) \diagdown (G/O(f)$ и множеством R_f орбит естественного действия G на множество P_f пар (A, φ) таких, что $\varphi \in \mathcal{F}$, $\varphi \sim f$, $A \in G$, где A — самосопряжена относительно f, $\det A \in (\mathrm{F}_q^*)^2$, полагая $\psi(\overline{A}) = \overline{(A^{\mathfrak{f}(f)} \cdot A_1 f)}$, где $\overline{A}$ — класс, в котором лежит матрица A, $\overline{(B, \varphi)}$ — орбита пары (B, φ).

1) $|X|$ — число элементов множества X.

6. Предложение 1. *Пусть* $A \in G$ — *самосопряженная относительно* f *матрица и* $\det A \in (\mathbf{F}_q^*)^2$. *Тогда число орбит из* R_f, *содержащих пары вида* (A, φ), *не превосходит* 2^n *и в случае, если матрица* A — *регулярна, равно* 2^{k-1}, *где* k — *число неразложимых над* $\mathbf{F}_q$ *инвариантных подпространств матрицы* A.

7. Пусть λ — элемент из алгебраического замыкания поля $\mathbf{F}_q$. Обозначим через $\mathbf{F}_q(\lambda)$ поле, порожденное $\mathbf{F}_q$ и λ.

Предложение 2. *Пусть* $A \in G$ — *регулярная полупростая матрица, самосопряженная относительно* f, *причем* $A = B^{\mathfrak{f}(f)} \cdot B$. *Матрицы* O_1 *и* $O_2 \in O(f)$ *такие, что* $O_1 B O_2 = B$ *и* $\operatorname{sign}_f(O_1)\operatorname{sign}_f(O_2) = -1$ *найдутся в том и только том случае, если существует собственное значение* λ *матрицы* A, *не являющееся квадратом в* $\mathbf{F}_q(\lambda)$.

Предложение 3. *Пусть* $A \in G$ — *регулярная полупростая матрица, самосопряженная относительно* f, *причем любое собственное значение* λ_i *матрицы* A *является квадратом в* $\mathbf{F}_q(\lambda)$. *Тогда существует* $B \in G$, *самосопряженная относительно* f, *такая, что* $B^2 = A$.

8. Лемма 1. *Если для* $A \in G$ *существуют* O_1 *и* $O_2 \in O(f)$ *такие, что* $A = O_1 A O_2$ *и* $\operatorname{sign}_f(O_1)\operatorname{sign}_f(O_2) = -1$, *то любая функция* $b \in \mathcal{B}$ *обращается в* 0 *на двойном классе смежности, содержащем* A. *Наоборот, если таких* O_1 *и* O_2 *нет, то существует единственная с точностью до множителя функция из* $\mathcal{B}$, *ненулевая на любом элементе из класса смежности, содержащего* A, *и равна* 0 *на остальных элементах.*

9. Лемма 2. *Пусть подмножество* $S_f \subset R_f$ *состоит из орбит, содержащих пары* (A, φ) *такие, что* A *удовлетворяет условиям предложения* 3. *Тогда* $|S_f| \sim q^n/2$.

Из предложений 1, 2, 3 и лемм 1 и 2 следует доказательство теоремы 1.

10. Теорема 2. *Если* $n = 2k+1$, *то* $T(q)$ *совпадает с* $\operatorname{Ind}_{SO(f)}^{GL(n,\, \mathbf{F}_q)}(\operatorname{sign}^1 f)$, *где* $f \in \mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 2 следует из того, что в случае нечетного n $O(f_0)$ изоморфно $O(f_1)$.

В заключение автор выражает глубокую признательность авторам статьи [1] за постановку задачи и постоянную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, Модели представлений групп, Труды семинара имени И. Г. Петровского, вып. 2 (1976), 3—21.

[2] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, Новая модель представлений конечных полупростых алгебраических групп, УМН **29**:3 (1974), 185—186.

[3] Ж.-П. Серр, Курс арифметики, М., «Мир», 1972.

[4] Семинар по алгебраическим группам, Сборник статей, М., «Мир», 1973 г.

Поступило в Правление общества 15 марта 1977 г.