Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, Описание некоторого класса проекционных операторов для полупростых комплексных алгебр Ли,
*Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 1, 15–25

https://www.mathnet.ru/mzm6800

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)


# ОПИСАНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ПОЛУПРОСТЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБР ЛИ


Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой


1. Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, $\Delta$ $(\Delta_+)$ — система (положительных) корней пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{h})$, $E_\alpha$ — корневой вектор, отвечающий корню $\alpha$, $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$. Пусть $R$ — конечномерный $\mathfrak{G}$-модуль. Условимся рассматривать $R$ как унитарное пространство со скалярным произведением, относительно которого операторы $E_\alpha$, $E_{-\alpha}$ сопряжены (известно, что такое скалярное произведение существует). Обозначим через $P_+$ оператор ортогонального проектирования на подпространство

$$R_+ = \{\xi \in R\colon\ E_\alpha\xi = 0,\ \forall\alpha \in \Delta_+\}$$

($R_+$ — подпространство старших векторов $\mathfrak{G}$-модуля $R$).

В этой статье рассматривается вопрос о явном описании оператора $P_+$. Известно, что $P_+$ индуцируется ассоциированным действием алгебры $U(\mathfrak{G})$ ($U(\mathfrak{G})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}$), т. е. $P_+$ можно выразить в виде полинома от операторов $\mathfrak{G}$-модуля $R$ с коэффициентами, зависящими от $R$. Явный вид этого полинома был найден в работах [1]—[3] [1]). Результаты [1]—[3] показывают, что в действительности $P_+$ можно выразить в универсальной форме (не зависящей

[1]) Позднее в работе [4] эти операторы были найдены из интегральной формы проекционного оператора для соответствующих полупростых комплексных групп Ли.

от $R$), если воспользоваться подходящим расширением алгебры $U$ ($\mathfrak{G}$). Искомое расширение можно получить следующим образом. Вначале алгебра $U$ ($\mathfrak{G}$) расширяется до алгебры $\bar{U}'$ ($\mathfrak{G}$) всех формальных рядов над $\mathfrak{G}$, причем имеет место естественный изоморфизм

$$U'(\mathfrak{G}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{E}(\mathfrak{G}),$$

где $\mathcal{P}$ ($\mathfrak{h}$) — алгебра полиномов над $\mathfrak{h}$, а $\mathcal{E}$ ($\mathfrak{G}$) — векторное пространство с базисом из одночленов вида

$$E_{\alpha_1}^{k_1} E_{\alpha_2}^{k_2} \ldots E_{\alpha_N}^{k_N} \tag{1}$$

при некотором фиксированном порядке корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_N$. Все одночлены (1) являются весовыми относительно $\mathcal{P}$ ($\mathfrak{h}$), что позволяет естественно расширить $\bar{U}'$ ($\mathfrak{G}$) до алгебры

$$\widetilde{U}(\mathfrak{G}) \simeq \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{E}(\mathfrak{G}),$$

где $\mathcal{F}$ ($\mathfrak{h}$) — алгебра всех функций, определенных над $\mathfrak{h}$. Заметим, что для каждого конечного $\mathfrak{G}$-модуля $R$ при достаточно большом $k_i$ $E_\alpha^{k_i} = 0$ и функция $f(\mathfrak{h}) \in \mathcal{F}(\mathfrak{h})$ диагональна относительно весового базиса.

Выражение оператора $P_+$, найденное в работах [1]—[3], является упорядоченным произведением элементов

$$P_\alpha = \sum\nolimits_{r=0} C_r(H_\alpha)\, E_{-\alpha}^r E_\alpha^r, \tag{1а}$$

где положено

$$C_r(H_\alpha) = \frac{(-2)^r \Gamma(2(|H_\alpha| + (\alpha, \rho))/(\alpha, \alpha) + 1)}{r!\,(\alpha, \alpha)^r \Gamma(2(H_\alpha + (\alpha, \rho))/(\alpha, \alpha) + r + 1)} \tag{1б}$$

с обычным обозначением [1]) $\rho \equiv (1/2)\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$. Сомножители $P_\alpha$ для всех $\alpha \in \Delta_+$ входят в $P_+$ ровно по одному разу.

Представление оператора $P_+$ в виде произведения сомножителей $P_\alpha$ будем называть факторизованной формой (ФФ). ФФ, найденные в работах [1], [2], соответствуют некоторому конкретному упорядочению сомножителей $P_\alpha$. В настоящей работе, обобщая результаты работ [1]—[3], мы опишем некоторый класс ФФ оператора $P_+$ и покажем,

---

[1]) Предполагается, что корневая система $\Delta$ вложена в картанову подалгебру и скалярное произведение означает форму Киллинга — Картана.

что любые два ФФ из этого класса можно привести друг к другу с помощью последовательных перестановок сомножителей $P_\alpha$ в некоторых подмножествах, состоящих из двух, трех, четырех и шести рядом стоящих сомножителей $P_\alpha$. Причем каждая такая перестановка сохраняет оператор $P_+$.

Будем говорить, что система положительных корней $\Delta_+$, расположенных в порядке $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$, является нормально упорядоченной [4], если в этой системе каждый суммарный корень находится между своими составляющими, т. е. если корень $\alpha_l$ представим в виде суммы двух положительных корней: $\alpha_l = \alpha_k + \alpha_m$, где для определенности $k < m$, тогда для $k < l < m$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_l, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_N. \qquad (2)$$

Индекс $i\,(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ корня $\alpha_i$ в нормально упорядоченной системе (2) будем называть номером корня $\alpha_i$. Нормально упорядоченную систему (2) обозначим через $\vec{\Delta}_+$. Существование системы $\vec{\Delta}_+$ для алгебры $\mathfrak{G}$ следует из результатов работ [2], [3]. Заметим, что нормальное упорядочение для системы $\Delta_+$, состоящей более чем из одного корня, является неоднозначным. Так, если мы имеем систему $\vec{\Delta}_+$, то, переписав ее в обратном порядке, опять получим нормально упорядоченную систему. Если в системе $\vec{\Delta}_+$ для любого следующего подмножества рядом стоящих корней

$$\alpha, \beta;\ \alpha, \alpha+\beta, \beta;\ \alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \beta;\ \beta, \alpha+2\beta, \alpha+\beta, \alpha;$$

$$\alpha, \alpha+\beta, 2\alpha+3\beta, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta, \beta;\ \beta, \alpha+3\beta, \alpha+2\beta, 2\alpha+3\beta, \alpha+\beta, \alpha$$

величина $\alpha - \beta$ не является корнем, то, произведя перестановку

$$\alpha, \beta \to \beta, \alpha; \qquad (3а)$$

$$\alpha, \alpha+\beta, \beta \to \beta, \alpha+\beta, \alpha; \qquad (3б)$$

$$\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \beta \rightleftarrows \beta, \alpha+2\beta, \alpha+\beta, \alpha; \qquad (3в)$$

$$\alpha, \alpha+\beta, 2\alpha+3\beta, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta, \beta \rightleftarrows \beta, \alpha+3\beta, \alpha+2\beta, 2\alpha+3\beta, \alpha+\beta, \beta, \qquad (3г)$$

мы опять получим нормально упорядоченную систему.

ТЕОРЕМА. *Для произвольной нормально упорядоченной системы* $\vec{\Delta}_+$ *алгебры* $\mathfrak{G}$ *имеет место равенство*

$$P_+ = \prod_{\alpha \in \vec{\Delta}_+} P_\alpha, \tag{4}$$

*где* $P_\alpha$ *определяется по формулам* (1а, б). *При этом любые две формы вида* (4) *могут быть приведены друг к другу с помощью перестановок* (3а—г).

В формуле (4) операторы $P_\alpha$ расположены слева направо в том же порядке, что и корни $\alpha \in \Delta_+$ в системе $\vec{\Delta}_+$.

Доказательство. В работе [2] было показано, что оператор $P_+$ имеет форму (4) при некотором конкретном нормальном упорядочении системы $\Delta_+$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что а) каждая перестановка (3а—г) сохраняет оператор $P_+$, б) любые два нормальных упорядочения системы $\Delta_+$ могут быть сведдены друг к другу с помощью этих же перестановок.

2. Сначала покажем, что справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Если корни* $\alpha$ *и* $\beta$ $(\alpha, \beta \in \Delta_+)$ *таковы, что* $\alpha - \beta \notin \Delta$, *то имеет место одно из следующих равенств*:

$$P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha, \tag{5а}$$

$$P_\alpha P_{\alpha+\beta} P_\beta = P_\beta P_{\alpha+\beta} P_\alpha, \tag{5б}$$

$$P_\alpha P_{\alpha+\beta} P_{\alpha+2\beta} P_\beta = P_\beta P_{\alpha+2\beta} P_{\alpha+\beta} P_\alpha, \tag{5в}$$

$$P_\alpha P_{\alpha+\beta} P_{2\alpha+3\beta} P_{\alpha+2\beta} P_{\alpha+\beta} P_\beta = \\ = P_\beta P_{\alpha+3\beta} P_{\alpha+2\beta} P_{2\alpha+3\beta} P_{\alpha+\beta} P_\alpha, \tag{5г}$$

*где множители* $P_\alpha$ *определяются по формулам* (1а, б). *Эти равенства выполняются соответственно, если подалгебра, порожденная образующими* $E_\alpha$, $E_{-\alpha}$, $E_\beta$, $E_{-\beta}$, *изоморфна соответственно одной из следующих алгебр*: $A_1 + A_1$, $A_2$, $B_2$, $G_2$.

Доказательство. Справедливость равенства (5а) очевидна, поскольку операторы $P_\alpha$ и $P_\beta$ в этом случае коммутируют между собой.

Известно, что ни одна простая комплексная алгебра Ли не содержит подалгебру, изоморфную алгебре $G_2$, кроме самой $G_2$. Поэтому правая и левая части (5г) представляют собой, как это следует из работы [2], две формы оператора $P_+$ алгебры $G_2$. (Фактически равенство (5г) есть условие эрмитовости для оператора $P_+$ алгебры $G_2$ [2].) Таким образом, равенство (5г) справедливо.

Несколько сложнее обстоит дело с доказательством равенств (5б, в). Докажем равенство (5б). Возьмем правую и левую части (5б) и переставим все операторы $E_\gamma$ ($\gamma \in \Delta_+$) направо, а операторы $E_{-\gamma}$ ($\gamma \in \Delta_+$) — налево; получим

$$P_\alpha P_{\alpha+\beta} P_\beta \equiv A(\alpha;\beta) \sum \varphi_1 (H_\alpha + (\alpha,\rho), H_\beta + (\beta,\rho); a, b, c, d) \cdot \cdot E_{-\alpha}^{a-d} E_{-\beta}^{b} E_{-\alpha-\beta}^{c-b} E_{\alpha+\beta}^{c-d} E_\beta^d E_\alpha^{a-b}, \quad (6)$$

$$P_\beta P_{\alpha+\beta} P_\alpha \equiv A(\alpha;\beta) \sum \varphi_2 (H_\alpha + (\alpha,\rho), H_\beta + (\beta,\rho); a, b, c, d) \cdot \cdot E_{-\alpha}^{a-d} E_{-\beta}^{b} E_{-\alpha-\beta}^{c-b} E_{\alpha+\beta}^{c-d} E_\beta^d E_\alpha^{a-b}, \quad (7)$$

где

$$A(\alpha;\beta) \equiv \equiv \Gamma(2) | H_\alpha | + (\alpha,\rho))/(\alpha,\alpha) + 1)\Gamma(2(| H_\beta | + + (\beta,\rho))/(\beta,\beta) + 1) \cdot \Gamma(2(| H_{\alpha+\beta} | + (\alpha+\beta,\rho))/ /(\alpha+\beta,\alpha+\beta) + 1),$$

а $\varphi_1$ и $\varphi_2$ являются аналитическими функциями по аргументам $H_\alpha$ и $H_\beta$. Суммирование в (6) и (7) ведется по всем неотрицательным целым значениям $a$, $b$, $c$ и $d$ при условии, что показатели степеней у операторов $E_{\pm\gamma}$ неотрицательны. Для доказательства равенства (5б) достаточно показать, что

$$\varphi_1 (H_\alpha + (\alpha,\rho), H_\beta + (\beta,\rho); a, b, c, d) = = \varphi_2 (H_\alpha + (\alpha,\rho), H_\beta + (\beta,\rho); a, b, c, d). \quad (8)$$

Покажем, что равенство (8) справедливо. Действительно, если в функции (1б) множителей $P_\alpha$, $P_{\alpha+\beta}$, $P_\beta$ подставить $\rho = \rho_{A_2} \equiv \alpha + \beta$, тогда операторы $P_\alpha P_{\alpha+\beta} P_\beta$ и $P_\beta P_{\alpha+\beta} P_\beta$ будут представлять собой две формы одного и того же оператора $P_+$ алгебры $A_2$ [2] и равенство (5б) в этом случае справедливо. Значит, равны между собой правые части выражений (6) и (7). Но поскольку одночлены $E_{-\alpha}^{a-d} E_{-\beta}^{b} E_{-\alpha-\beta}^{c-b} E_{\alpha+\beta}^{c-d} E_\beta^d E_\alpha^{a-b}$ образуют базис в алгебре $U(\mathfrak{G})$ [5], отсюда получаем, что операторные функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$ при $\rho = \rho_{A_2}$ равны между собой. Ясно, что эти функции будут равны и при $\rho = (1/2)\Sigma_{\delta\in\Delta_+}\delta$. Таким образом, равенство (5б) доказано.

Равенство (5в) доказывается аналогичным образом. При этом нужно учесть только тот факт, что при $\rho = \rho_{B_2} \equiv (3\alpha + 4\beta)/2$ операторы $P_\alpha P_{\alpha+\beta} P_{\alpha+2\beta} P_\beta$ и $P_\beta P_{\alpha+\beta} P_{\alpha+2\beta} P_\alpha$ являются двумя формами оператора $P_+$

алгебры $B_2$. Лемма 1 полностью доказана. Из этой леммы следует, что каждая перестановка (3а—г) сохраняет оператор $P_+$.

3. Дадим некоторые определения. Отрезком $[\alpha; \beta]$ $(\alpha, \beta \in \Delta_+)$ системы $\vec{\Delta}_+$ назовем подмножество корней, состоящее из $\alpha$, $\beta$ и всех корней, расположенных между $\alpha$ и $\beta$. Корень $\alpha$ $(\beta)$ является левым (правым) концом отрезка $[\alpha; \beta]$. Количество корней, содержащееся в отрезке $[\alpha; \beta]$, будем называть длиной отрезка и обозначать через $l_{[\alpha;\beta]}$. Минимальный отрезок системы $\vec{\Delta}_+$, который содержит все подмножество положительных корней, «порожденное» двумя корнями $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha, \beta \in \Delta_+)$, будем обозначать через $\{\alpha, \beta\}$ [1]). Заметим, что корни $\alpha$ и $\beta$ не обязательно являются концами отрезка. Справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Если правым (левым) концом отрезка $\{\alpha, \beta\}$ системы $\vec{\Delta}_+$, в которой корни $\alpha$ и $\beta$ стоят рядом друг с другом, является корень $\alpha$, то с помощью перестановок* (3а—г) *внутри отрезка $\{\alpha, \beta\}$ систему $\vec{\Delta}_+$ можно свести к другой системе $\vec{\Delta}'_+$, в которой корень $\alpha$ стоит слева (справа) от корня $\beta$ и номер корня $\alpha$ в системе $\vec{\Delta}'_+$ будет меньше (больше) номера этого же корня в системе $\vec{\Delta}_+$.*

Доказательство. Прежде всего замечаем, что если лемма 2 справедлива для любого отрезка $\{\alpha, \beta\}$ системы $\vec{\Delta}_+$, когда $\alpha$ является правым концом этого отрезка, то она справедлива и для любого отрезка $\{\alpha, \beta\}$, когда $\alpha$ является левым его концом, и наоборот. Действительно, пусть корень $\alpha$ является правым концом отрезка $\{\alpha, \beta\}$. Переписывая систему $\vec{\Delta}_+$ в обратном порядке, мы получим другую нормально упорядоченную систему $\vec{\Delta}'_+$. При этом отрезок $\{\alpha, \beta\}$ перейдем в отрезок $\{\alpha, \beta\}'$. Левым концом отрезка $\{\alpha, \beta\}'$ будет являться корень $\alpha$. Любой перестановке (3а—г) в отрезке $\{\alpha, \beta\}$ будет соответствовать обратная перестановка в отрезке $\{\alpha, \beta\}'$ и наоборот. И если лемма 2 справедлива для отрезка $\{\alpha, \beta\}$, то она справедлива и для отрезка $\{\alpha, \beta\}'$, и наоборот. Следовательно, для доказательства справедливости лем-

---

[1]) Подмножество положительных корней, порожденное корнями $\alpha$ и $\beta$, состоит из всех тех корней $\delta_i \in \Delta_+$, которые представимы в виде $\delta_i = n_i\alpha + m_i\beta$, где $n_i$ и $m_i$ — целые числа.

мы 2 достаточно рассмотреть, например, случай, когда корень $\alpha$ является правым концом отрезка $\{\alpha, \beta\}$.

Итак, пусть корень $\alpha$ является правым концом отрезка $\{\alpha, \beta\}$. В зависимости от того, какое подмножество положительных корней порождают корни $\alpha$ и $\beta$, возможны следующие случаи:

$$\ldots, \beta, \alpha, \ldots; \tag{9а}$$

$$\ldots, \beta - \alpha, \ldots, \beta, \alpha, \ldots; \tag{9б}$$

$$\ldots, \beta - \alpha, \ldots, 2\beta - \alpha, \ldots, \beta, \alpha, \ldots; \tag{9в}$$

$$\ldots, \beta - 2\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \ldots, \beta, \alpha, \ldots; \tag{9г}$$

$$\ldots, \beta - \alpha, \ldots, 3\beta - 2\alpha, \ldots, 2\beta - \alpha, \ldots, 3\beta - \alpha, \ldots, \beta, \alpha, \ldots; \tag{9д}$$

$$\ldots, \beta - 3\alpha, \ldots, \beta - 2\alpha, \ldots, 2\beta - 3\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \ldots, \beta, \alpha, \ldots \tag{9ж}$$

В каждой из этих систем предполагается, что корни $\alpha$ и $\beta$ не порождают других положительных корней, кроме выделенных.

Для случая (9а) справедливость леммы 2 очевидна. В случаях (9д, ж) выделенные корни образуют систему положительных корней алгебры $G_2$, и известно [5], что ни одна из простых комплексных алгебр Ли, кроме самой $G_2$, не содержит подалгебру, изоморфную $G_2$. Поэтому все выделенные корни в системах (9д, ж) допускают перестановку (3а) со всеми другими корнями системы $\vec{\Delta}_+$. Значит, выделенные корни в (9д, ж) мы можем с помощью перестановок вида (3а) поставить рядом друг с другом в указанном порядке, а затем воспользоваться перестановкой (3г). Таким образом, для случаев (9д, ж) лемма 2 тоже верна.

Доказательство для остальных случаев (9б—г) будем проводить методом математической индукции по длине отрезка $l_{\{\alpha, \beta\}}$. Если в системах (9в, г) $l_{\{\alpha, \beta\}} = 4$, то все выделенные корни стоят рядом друг с другом и поэтому воспользуемся перестановкой (3в). Для системы (9б) при $l_{\{\alpha, \beta\}} = 4$ лемма 2 тоже справедлива. В самом деле, пусть в (9б) $l_{\{\alpha, \beta\}} = 4$, т. е. между корнями $\beta - \alpha$ и $\beta$ находится некоторый корень $\gamma$:

$$\ldots, \beta - \alpha, \gamma, \beta, \alpha, \ldots \tag{9б'}$$

Покажем, что $\beta - \alpha - \gamma \notin \Delta$. Предположим от противного: пусть $\beta - \alpha - \gamma \in \Delta$. Тогда из тождества Якоби для корневых векторов $E_{\beta-\alpha-\gamma}$, $E_\gamma$, $E_\alpha$ следует, что по крайней мере одна из величин, $\alpha + \gamma$ или $\beta - \gamma$, является корнем. Но существование любого из этих корней противоречит, как легко проверить, тому, что система (9б) является нормально упорядоченной. Значит, предположение о том, что $\beta - \alpha - \gamma \in \Delta$, неверно. Поэтому $\beta - \alpha - \gamma \notin \Delta$ и мы можем воспользоваться сначала перестановкой (3а) для корней $\beta - \alpha$ и $\gamma$, а затем перестановкой (3б) для корней $\beta - \alpha$, $\beta$, $\alpha$. Таким образом, для всех систем (9б—г) при $l_{\{\alpha, \beta\}} = 4$ лемма 2 верна. Предположим теперь, что она верна для этих же случаев и при $l_{\{\alpha, \beta\}} = n - 1$, и докажем справедливость ее при $l_{\{\alpha, \beta\}} = n$.

Рассмотрим сначала случай, когда левым концом отрезка $\{\alpha, \beta\}$ является корень $\beta - \alpha$ (система (9б, в)). Пусть $\gamma$ есть корень, следующий за корнем $\beta - \alpha$. Покажем, что если $\gamma \neq 2\beta - \alpha$, то отрезок $\{\beta - \alpha, \gamma\}$ содержится в отрезке $[\beta - \alpha; \beta]$. Если $\beta - \alpha - \gamma \notin \Delta$, то очевидно, что $\{\beta - \alpha, \gamma\} \subset [\beta - \alpha; \beta]$. Пусть теперь $\beta - \alpha - \gamma \in \Delta$. Из тождества Якоби для корневых векторов $E_{\beta-\alpha-\gamma}$, $E_\gamma$, $E_\alpha$ следует, что по крайней мере одна из величин, $\alpha + \gamma$ или $\beta - \gamma$, является корнем. Если $\beta - \alpha - \gamma \in \Delta_+$, то существование любого из корней, $\alpha + \gamma$ или $\beta - \gamma$, как легко проверить, противоречит тому, что система $\vec{\Delta}_+$ является нормально упорядоченной. Поэтому должно быть $\alpha - \beta + \gamma \in \Delta_+$. Кроме того, существование любого из корней, $\beta - \gamma$ или $\alpha + \gamma$, приводит к тому, что корень $\alpha - \beta + \gamma \in \Delta_+$ должен быть расположен между корнями $\gamma$ и $\beta$:

$$\ldots, \beta - \alpha, \gamma, \ldots, \alpha - \beta + \gamma, \ldots, \beta, \alpha, \ldots \qquad (10)$$

Далее, если $\alpha - \beta + 2\gamma \in \Delta_+$, то этот корень должен находиться между корнями $\gamma$ и $\alpha - \beta + \gamma$. Если же $2\alpha - 2\beta + \gamma \in \Delta$, тогда из тождества Якоби для корневых векторов $E_{2\alpha-2\beta+\gamma}$, $E_{\beta-\alpha-\gamma}$, $E_\beta$ следует, что по крайней мере одна из величин, $2\alpha - \beta + \gamma$ или $2\beta - \alpha - \gamma$, является корнем. Но существование любого из этих корней приводит к тому, что $2\alpha - 2\beta + \gamma \in \Delta_+$ и этот корень должен быть расположен между корнями $\alpha - \beta + \gamma$ и $\beta$. В результате получаем, что $\{\beta - \alpha, \gamma\} \subset [\beta - \alpha; \beta]$. Поскольку длина отрезка $\{\beta - \alpha, \gamma\}$ меньше $n$, то по предположению с помощью перестановок (3а — в) внутри этого отрезка мы можем преобразовать систему (10) в другую нормально упорядоченную систему $\vec{\Delta}'_+$, в которой корень $\beta - \alpha$ будет расположен справа от корня $\gamma$. В системе $\vec{\Delta}'_+$ длина отрезка $[\beta - \alpha; \alpha]$ будет меньше $n$, следовательно, по предположению для этого отрезка справедлива лемма 2.

Если в системе (9в) $\gamma = 2\beta - \alpha$, то, переписав эту систему в обратном порядке, мы получим систему вида (9г). Таким образом, для окончательного доказательства леммы 2 нам осталось рассмотреть случай (9г). Пусть в системе (9г) $l_{[\beta-2\alpha;\alpha]} = n$ и $\delta$ есть корень, следующий за корнем $\beta - \alpha$:

$$\ldots, \beta - 2\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \delta, \ldots, \beta, \alpha, \ldots \qquad (11а)$$

Как мы уже показали, $\{\beta - \alpha, \delta\} \subset [\beta - \alpha; \beta]$. Поскольку длина отрезка $\{\beta - \alpha, \delta\}$ меньше $n$, следовательно, с помощью перестановок (3а — в) внутри этого отрезка систему (11а) можно преобразовать в другую систему $\vec{\Delta}'_+$, в которой корень $\beta - \alpha$ будет расположен справа от корня $\delta$ и тем самым будет находиться ближе к корню $\beta$. Отсюда ясно, что с помощью перестановок (3а — в) в системе (11а) корень $\beta - \alpha$ можно вплотную приблизить к корню $\beta$:

$$\ldots, \beta - 2\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \alpha, \ldots \qquad (11б)$$

Пусть в системе (11б) $\rho$ есть корень, следующий за корнем $\beta - 2\alpha$:

$$\ldots, \beta - 2\alpha, \rho, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \alpha, \ldots \qquad (11в)$$

Опять получаем, что $\{\beta - 2\alpha, \rho\} \subset [\beta - 2\alpha; \beta - \alpha]$. Поскольку длина отрезка $\{\beta - 2\alpha, \rho\}$ меньше $n$, следовательно, с помощью перестановок (3а — в) внутри этого отрезка систему (11в) можно преобразовать в другую нормально упорядоченную систему $\vec{\Delta}'_+$, в которой корень $\beta - 2\alpha$ будет расположен справа от корня $\rho$. В системе $\vec{\Delta}'_+$ длина отрезка $[\beta - 2\alpha; \alpha]$ меньше $n$ и, следовательно, по предположению для него справедлива лемма 2. Таким образом, лемма 2 полностью доказана.

С л е д с т в и е. *Любые две нормально упорядоченные системы алгебры $\mathfrak{S}$ можно свести друг к другу с помощью перестановок* (3а—г).

Доказательство. Пусть $\vec{\Delta}'_+$ и $\vec{\Delta}''_+$ — две произвольные нормально упорядоченные системы алгебры $\mathfrak{G}$:

$$\vec{\Delta}'_+ \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \ldots, \alpha_n), \tag{12а}$$

$$\vec{\Delta}''_+ \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_l, \ldots, \beta, \alpha_k, \ldots, \alpha_m). \tag{12б}$$

Эти системы отличаются друг от друга порядком расположения корней, начиная с корня $\alpha_k$. Доказательство следствия фактически сводится к доказательству того, что корень $\alpha_k$ в системе (12б) можно переставить вплотную к корню $\alpha_{k-1}$ с помощью перестановок (3а—г). Для этого достаточно показать, что отрезок $\{\beta, \alpha_k\}$ содержится в отрезке $[\alpha_l; \alpha_k]$. Покажем это. Если $\beta - \alpha_k \notin \Delta$, то $\{\beta, \alpha_k\} \subset \subset [\alpha_l; \alpha_k]$. Пусть теперь $\beta - \alpha_k \in \Delta$. Ясно, что должно быть $\beta - \alpha_k \in \Delta_+$. Действительно, если бы $\alpha_k - \beta \in \Delta_+$, то, как видно из системы (12а), либо корень $\alpha_k - \beta$, либо $\beta$ принадлежал бы подмножеству корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$. А это возможно только в случае, когда $\beta = \alpha_{k-1}$. Таким образом, $\beta - \alpha_k \in \Delta_+$. Далее, корень $\beta - \alpha_k$ не принадлежит подмножеству $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, ибо в противном случае корень $\beta$ тоже принадлежал бы этому подмножеству. Итак, если $\beta - \alpha_k \in \Delta$, то система (12б) имеет вид

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \ldots, \beta - \alpha_k, \ldots, \beta, \alpha_k, \ldots \tag{12в}$$

Далее, если $\beta - 2\alpha_k \in \Delta$, то аналогичным образом показывается, что, во-первых, $\beta - 2\alpha_k \in \Delta_+$, во-вторых, этот корень расположен между корнями $\alpha_{k-1}$ и $\beta - \alpha_k$. Ясно, что если $2\beta - \alpha_k \in \Delta$, то этот корень расположен между корнями $\beta$ и $\beta - \alpha_k$. Далее, если $\beta - 3\alpha_k \in \Delta$, то аналогичным образом можно показать, что $\beta - 3\alpha_k \in \Delta_+$ и этот корень расположен между корнями $\alpha_{k-1}$ и $\beta - \alpha_k$. Если

$$2\beta - \alpha_k, \quad 3\beta - 2\alpha_k \in \Delta,$$

то эти корни положительные и расположены между корнями $\beta - \alpha_k$ и $\beta$.

Таким образом, отрезок $\{\beta, \alpha_k\}$ содержится в отрезке $[\alpha_l; \alpha_k]$. Для отрезка $\{\beta, \alpha_k\}$ справедлива лемма 2. Отсюда ясно, что с помощью перестановок (3а—г) корень $\alpha_k$ можно приблизить к корню $\alpha_{k-1}$, получая на каждом этапе преобразований нормально упорядоченную систему. Следствие доказано.

Из леммы 1 и следствия леммы 2 следует справедливость сформулированной выше теоремы.

Авторы выражают благодарность профессору Д. П. Желобенко за интерес к работе и полезные обсуждения.

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ

Поступило 11.X.1976

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Проекционные операторы для классических групп, Успехи матем. наук, **24**, № 3 (1969), 227—228.

[2] Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., Проекционные операторы для простых групп Ли, ТМФ, **8**, № 2 (1971), 255—271.

[3] Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., Метод проектирования в теории ядра и разные формы проекционных операторов для классических групп, Препринт ФЭИ-397, 1973.

[4] Лезнов А. Н., Савельев М. В., Об одной параметризации компактных групп, Функц. анализ и его прилож., **8**, № 4 (1974), 87—88.

[5] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., «Наука», 1970.