

ОДНОСТОРОННИЕ ТЕОРЕМЫ О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА
БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О НЕЗАВИСИМОСТИ

1. Пусть $\{X_n; n=1, 2, \dots\}$ - последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) , и пусть $\{b_n; n=1, 2, \dots\}$ - последовательность положительных постоянных. Положим

$$S_{a,n} = \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i, \quad S_n = S_{0,n}.$$

Во многих работах были исследованы условия, при которых имеет место соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} \leq 1 \quad \text{почти наверное} \quad (I)$$

В частности, в работах [1] и [2] найдены условия, достаточные для соотношения (I), без дополнительных предположений о независимости или каком-либо типе зависимости рассматриваемых случайных величин. Настоящая работа примыкает к [1] и [2].

Обозначим через G множество положительных функций $q(n)$, определенных на множестве целых положительных чисел и удовлетворяющих следующим условиям:

$$(A) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{q(Kn)}{q(n)} > 1 \quad \text{для некоторого целого } K > 2;$$

(B) для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\gamma < 1$ такое, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{\gamma n \leq i \leq n} q(i)}{q(n)} < 1 + \varepsilon;$$

$$(C) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(n+1)}{q(n)} = 1.$$

Условия (A), (B) и (C) выполнены, если $q(n) = n^\lambda L(n)$, где $\lambda > 0$ и $L(\cdot)$ - медленно меняющаяся функция. Условие (B) выполнено, если функция $q(n)$ не убывает.

ТЕОРЕМА I. Пусть для последовательности случайных величин $\{X_n\}$ и некоторой функции $q \in G$ выполнены следующие условия:

(D) для любого b из некоторого интервала $1 < b < 1 + \beta$ существуют положительные числа C, C_0 и n_0 такие, что

$$P(S_{a,n} \geq b \sqrt{2q(n) \log \log n}) \leq C_0 \exp\{-(1 + c \log b) \log \log n\} \quad (2)$$

для всех $a \geq 0$ и $n \geq n_0$;

(E) существуют положительные числа $C, C_0, B > 1, a_1$ и n_1 такие, что неравенство (2) имеет место для всех $b \geq B, a \geq a_1$ и $n \geq n_1$.

Пусть, далее, выполнено условие

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} E^+(S_{a,n}^p) < \infty \quad (3)$$

для всех $n > 1$ и $p > 0$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2q(n) \log \log n}} \leq 1 \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

В условии (3) использовано следующее обозначение:

$$E^+ \varphi(X) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dF(x),$$

если X - случайная величина с функцией распределения $F(x)$.

Теорема I представляет собой односторонний аналог одного результата Лай и Стаута [I]. Все условия теоремы I налагаются на поведение распределений участвующих в них случайных величин только на положительной полуоси.

Приведем одно просто формулируемое следствие теоремы I, которое имеет также односторонний характер.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{X_n\}$ - последовательность случайных величин, и пусть

$$E e^{t S_{a,n}} \leq C e^{\frac{t^2}{2} q(n)} \quad (5)$$

для всех $a \geq 0, n \geq 1$ и $0 < t \leq \sqrt{\frac{2 \log \log(n+3)}{q(n)}}$ и некоторой функции $q \in G$, где C - положительная постоянная. Тогда имеет место соотношение (4).

Заметим, что для стационарной гауссовской последовательности $\{X_n\}$, удовлетворяющей условию $E X_1 = 0$, при любых $t, a \geq 0$ и $n \geq 1$ справедливо равенство

$$E e^{t S_{a,n}} = E e^{t S_n} = e^{\frac{t^2}{2} B_n},$$

где $B_n = E S_n^2$. Таким образом, для этой последовательности условие (5) выполнено для всех действительных t и всех $a \geq 0$, $n \geq 1$ при $q(n) = B$. В теореме 2 условие (5) предполагается выполненным только для всех t из некоторого интервала на положительной полупрямой.

2. Перейдем к доказательству теоремы I. Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 2 из [1]. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \delta < 1$, $n = [2^{k\delta}]$ ($k = 1, 2, \dots$). Введем события

$$A_k = [S_{n_k} \geq (1 + \varepsilon) \chi(n_k)],$$

$$B_k = [\max_{n_k \leq n < n_{k+1}} (S_n - S_{n_k}) \geq 2\varepsilon \chi(n_k)],$$

где

$$\chi(n) = \sqrt{2q(n) \log \log n}. \quad (6)$$

В силу условия (D) и определения чисел n_k имеем $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, поэтому

$$P(A_k \text{ б.ч.}) = 0 \quad (7)$$

вследствие леммы Бореля-Кантелли.

Покажем теперь, что если будет доказано равенство

$$P(B_k \text{ б.ч.}) = 0, \quad (8)$$

то теорема I будет доказана. Для этого достаточно убедиться в том, что (7) и (8) влекут за собой соотношение

$$P(S_n \geq (1 + \delta) \chi(n) \text{ б.ч.}) = 0 \quad (9)$$

для любого $\delta > 0$ и, следовательно, соотношение (4).

Предположим, что имеет место (8). В силу условия (B) заданному $\varepsilon > 0$ соответствует такое k_0 , что $q(n) < (1 + \varepsilon) q(n_k)$ для $n_k \leq n < n_{k+1}$ и $k \geq k_0$. Замечая, что $S_n = (S_n - S_{n_k}) + S_{n_k}$, получаем

$$[S_n \geq (1+3\varepsilon)\sqrt{1+\varepsilon} \chi(n) \text{ б.ч.}] \subset$$

$$\subset [S_{n_k} \geq (1+\varepsilon)\chi(n_k) \text{ б.ч.}] \cup [\max_{n_k \leq n < n_{k+1}} (S_n - S_{n_k}) \geq 2\varepsilon\chi(n_k) \text{ б.ч.}],$$

как нетрудно доказать от противного. Отсюда с учетом (7) и (8) приходим к (9) для любого $\gamma > 0$.

Итак, доказательство теоремы I свелось к доказательству равенства (8). Для доказательства этого равенства определим целые положительные числа $j = j(k)$ с помощью неравенств

$$2^{j-1} \leq n_{k+1} - n_k < 2^j. \text{ Поскольку } n_{k+1} - n_k < 2^{k\delta + \beta} \text{ и}$$

$$n_{k+1} - n_k > 2^{k\delta - 1} - 1, \text{ имеем}$$

$$j(k) = k\delta + O(1) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (10)$$

и

$$n_{k+1} - n_k = n_k(2^{\delta} - 1) + O(1) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Далее,

$$n_k \geq \frac{2^{j(k)-1}}{2^{\delta} - 1} + O(1) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (12)$$

Если $n_k \leq n < n_{k+1}$, то $n - n_k < n_{k+1} - n_k < 2^j$ и

$$n - n_k = e_{j-1} 2^{j-1} + e_{j-2} 2^{j-2} + \dots + e_0,$$

где e_{i-1} равно 0 или 1 для $i=1, \dots, j$. Полагая

$$S(a, n) = S_{a, n} = \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i,$$

получаем

$$S_n = S_{n_k} + \sum_{i=1}^j S(n_k + m_i 2^i, 2^{i-1} e_{i-1})$$

для $n_k \leq n < n_{k+1}$, где

$$m_i = e_{j-1} 2^{j-i-1} + \dots + e_i \quad (i=1, \dots, j-1), \quad m_j = 0,$$

поэтому $0 \leq m_i < 2^{j-i}$.

Для $i=1, \dots, j$ и $m=0, 1, 2, \dots$ определим события

$$B_k(i, m) = \left[S(n_k + m 2^i, 2^{i-1}) > \frac{\varepsilon \chi(n_k)}{(j(k) - i + 1)^2} \right],$$

где $\chi(n)$ определено равенством (6). Рассуждением от противного с использованием неравенства $\sum_{i=1}^j (j-i+1)^{-2} < 2$ нетрудно доказать соотношение

$$B_k \subset \bigcup_{1 \leq i \leq j(k)} \bigcup_{0 \leq m < 2^{i(k)-i}} B_k(i, m).$$

Пусть $0 < \eta < 1$. Положим

$$T_1 = \sum_{\eta j(k) \leq i \leq j(k)} \sum_{0 \leq m < 2^{i(k)-i}} P(B_k(i, m)),$$

$$T_2 = \sum_{N < i < \eta j(k)} \sum_{0 \leq m < 2^{i(k)-i}} P(B_k(i, m)),$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq m < 2^{i(k)-i}} P(B_k(i, m)),$$

Так что

$$P(B_k) \leq T_1 + T_2 + T_3. \quad (I3)$$

Для завершения доказательства теоремы I достаточно показать, что

$$T_\nu = O(k^{-2}) \quad (k \rightarrow \infty; \nu = 1, 2, 3), \quad (I4)$$

поскольку из (I3) и (I4) вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)$ и следовательно, равенство (8).

Рассмотрим сначала сумму T_1 . Для ее оценки понадобится следующая лемма, в которой использовано обозначение

$$A = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{q(K_n)}{q(n)}.$$

ЛЕММА. Если $q \in G$, то для любого положительного $\gamma < \frac{\log A}{\log K}$ существуют числа N и $C > 0$ такие, что

$$\frac{g([an])}{g(n)} > Ca^\delta$$

для всех $a \geq N$ и $n \geq N$.

Эта лемма содержится в [1] и [3].

В силу леммы и соотношения (I2) имеем

$$\frac{g(n_k)}{g(2^{i-1})} \geq C \left(\frac{2^{j(k)-i}}{2^{\delta-1}} \right)^\delta \log \log n_k \geq \log \log 2^{i-1}$$

для всех достаточно больших $i \leq j(k)$ и достаточно больших k , если взять достаточно малое $\delta > 0$. Поэтому

$$P(B_k(i, m)) \leq P(S(n_k + m 2^i, 2^{i-1}) > \varepsilon_1 (j(k) - i + 1)^{-2} \left\{ g(2^{i-1}) \left(\frac{2^{j(k)-i}}{2^{\delta-1}} \right)^\delta \log \log 2^{i-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \right),$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon \sqrt{C}$. Учитывая условие (E), получаем

$$\sum_{0 \leq m < 2^{j(k)-1}} P(B_k(i, m)) \leq c_0 2^{j(k)} \exp \{-c_1 \log \log 2^{i-1}\}.$$

Здесь

$$c_1 = C \left\{ \frac{\delta}{2} \log \frac{2^{j(k)-i}}{2^{\delta-1}} + \log \varepsilon_2 - 2 \log (j(k) - i + 1) \right\}$$

и $0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при всех достаточно больших k имеем в силу (I0)

$$T_1 \leq c_2 j(k) \max_{\nu \geq 0} \exp \left\{ \nu \log 2 - c_3 (\log \eta j(k)) \left(\frac{\delta}{2} \log \frac{2^\nu}{2^{\delta-1}} - 2 \log (\nu + 1) + \log \varepsilon_2 \right) \right\} \leq c_4 k^{-2},$$

если δ выбрать достаточно малым. Здесь c_2, c_3 и c_4 — положительные постоянные. Первое из трех соотношений (I4) доказано. Второе соотношение доказывается аналогично; при этом мы считаем число N в определении T_2 достаточно большим.

Для оценки T_3 воспользуемся неравенством

$$P(X \geq x) \leq x^{-p} E^+ X^p, \quad (15)$$

справедливым для любых положительных x и p и любой случайной величины X . Это неравенство следует из того, что

$$P(X \geq x) = \int_x^{\infty} dF(t) \leq x^{-p} \int_x^{\infty} t^p dF(t) \leq x^{-p} E^+ X^p,$$

где $F(t)$ - функция распределения случайной величины X .

В силу определения $B_k(i, m)$, условия (3) и неравенства (15) получаем

$$T_3 \leq N 2^{j(k)} C(\epsilon \chi(n_k))^{-p} j^p(k).$$

Используя (10) и сформулированную выше лемму, находим, что $T_3 \leq C k^{-2}$ при всех достаточно больших k . Таким образом мы доказали соотношения (14) и тем самым теорему I.

Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы I и неравенства

$$P(S_{a,n} \geq b \chi(n)) \leq e^{-t b \chi(n)} E e^{t S_{a,n}},$$

где $t > 0$.

Литература

1. L a i T.L., S t o u t W. Limit theorems for sums of dependent random variables. - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1980, Bd.51, N 1, p1-14.
2. П е т р о в В.В. О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин. - Зап.научн.семина. ЛОМИ, 1980, т.97, с.186-194.
3. L a i T.L., S t o u t W. The law of the iterated logarithm and upper-lower class tests for partial sums of stationary Gaussian sequences. - Ann.Probability, 1978, vol.6, N 5, p. 731-750.