



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. V. Velichko, On the theory of spaces of continuous functions, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 149–150

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 22, 2025, 15:24:57



К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Величко

Множество вещественных непрерывных функций на топологическом пространстве X обозначается через $C(X)$.

Если это множество наделено топологией простой сходимости, то мы пишем $C_p(X)$; если оно наделено компактно открытой топологией, то мы сохраняем общее обозначение $C(X)$. В последнем случае на $C(X)$ появляется слабая топология, для которой мы используем обозначение $C_\omega(X)$.

Основным результатом является

Т е о р е м а. *В случае компактного X нормальность $C_p(X)$ влечет счетную плотность X .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно докажем утверждение

(А) Пусть $C_p(X)$ нормально, F и Φ — два замкнутых непересекающихся множества в $C_p(X)$. Тогда найдется счетное множество $Y \subseteq X$ такое, что $[\pi_Y(F)]_M \cap [\pi_Y(\Phi)]_M$, где $\pi_Y(f) = f|_Y$, а $M = \pi_Y(C_p(X))$.

Пусть H и V — непересекающиеся окрестности F и Φ в $C_p(X)$. Так как $C_p(X)$ плотно в R^X , то можно применить теорему Бокштейна [1], согласно которой найдется счетное множество $Z \subseteq X$ такое, что $\pi_Z(H) \cap \pi_Z(V) = \emptyset$. Предположим, что $\emptyset = K' = [\pi_Z(F)] \cap [\pi_Z(\Phi)]$, и пусть $K = \pi_Z^{-1}(K')$. Множество K замкнуто в $C_p(X)$, а так как $\emptyset = K' \cap \pi_Z(H) = K' \cap \pi_Z(V)$, то $K \cap F = K \cap \Phi = \emptyset$. Тогда можно выбрать непересекающиеся окрестности W_1, W_2, W_3 множеств F, Φ и K в $C_p(X)$. Снова по теореме Бокштейна найдется счетное множество $Y \supseteq Z$ такое, что семейство $\{\pi_Y(W_i): i = 1, 2, 3\}$ дизъюнктно. Тогда $\emptyset = [\pi_Y(F)] \cap [\pi_Y(\Phi)]$. Действительно, если бы нашлась функция $f \in C(X)$ такая, что $\pi_Y(f) \in [\pi_Y(F)] \cap [\pi_Y(\Phi)]$, то было бы $\pi_Z(f) \in [\pi_Z(F)] \cap [\pi_Z(\Phi)] = K'$ и $f \in K$. Но в этом случае $\pi_Y(f) \in \pi_Y(W_3)$, а $\pi_Y(W_3) \cap \pi_Y(F) = \emptyset = \pi_Y(W_3) \cap \pi_Y(\Phi)$, что противоречиво, и (А) доказано.

Пусть $i(X) > \aleph_0$. В X найдется свободная последовательность $\mathcal{F} = \{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ длины \aleph_0 . Пусть F есть множество точек полного накопления \mathcal{F} . Тогда \mathcal{F} сходится по мощности к F , т. е. в любой окрестности F содержатся все элементы \mathcal{F} , начиная с некоторого.

Каждое ординальное число $\alpha < \omega_1$ представимо в виде $\alpha_0 + n$, где α_0 — предельный ординал. Следовательно, можно говорить о четности α (понимая под этим четность n).

Выберем точку x_0 из \mathcal{F} произвольно, функцию $f_0 \in C(X \setminus \{0, 1\})$ выберем под условиями $f_0|_F \equiv 0$ и $f_0(x_0) = 1$. Выберем замкнутые множества F_{0n} такими, чтобы $CZ(f_0) = \{y: f_0(y) > 0\} = \cup \{F_{0n}: n = 1, \dots\}$, $F_{0n} \supseteq \{x: f_0(x) = 1\}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, $F_{0n} \subseteq F_{0,n+1}$.

Выберем, далее, для каждого $\alpha < \omega_1$ точку $x_\alpha \in \mathcal{F}$, функцию $f_\alpha \in C(X, [0, 1])$ и замкнутые множества $F_{\alpha n}$ такими, чтобы выполнялись условия:

- 1) $f_\alpha(x_\beta) = 1$ при $\beta \leq \alpha$, $f_\alpha(x_\beta) = 0$ при $\beta > \alpha$ и $f_\alpha|_F \equiv 0$,
- 2) $CZ(f_\alpha) = \cup \{F_{\alpha n}: n = 1, \dots\}$, $F_{\alpha n} \supseteq \{x: f_\alpha(x) = 1\}$, $F_{\alpha n} \subseteq F_{\alpha, n+1}$,
- 3) $x_\alpha \in \cap \{Z(f_\beta) = \{y: f_\beta(y) = 0\}: \beta < \alpha\}$, $Z(f_\alpha) \subseteq \cap \{Z(f_\beta): \beta < \alpha\}$,
- 4) для любого $F_{\alpha n}$ найдется $\beta > \alpha$ другой четности такое, что $f_\beta|_{F_{\alpha n}} \equiv f_{\alpha n}|_{F_{\alpha n}}$.

Пусть построение сделано для всех β_n , меньших α , и α — предельный ординал.

Семейство $\{F_{\beta n}: \beta < \alpha\}$ счетно, и его можно занумеровать: $\{F_i: i = 1, \dots\}$.

Пусть $Z = \cap \{Z(f_\beta): \beta < \alpha\} \cap \mathcal{F}$. Мы имеем $F \cap \{x_\beta: \beta < \alpha\} = \emptyset$ и $|Z \setminus \cup \{x_\beta: \beta < \alpha\}| > 1$ (по свойству свободных последовательностей и 1)). Точку x_α выберем произвольно из $Z \setminus \{x_\beta: \beta < \alpha\}$, функцию f_α из $C(X, [0, 1])$ выберем так, чтобы $f_\alpha|_F \equiv 0$, $f_\alpha|_{T_\alpha} \equiv 1$ и $f_\alpha|_{F_k} \equiv f_\beta|_{F_k}$, где $T_\alpha = \{x_\beta: \beta < \alpha\} \cup \{x_\alpha\}$, k — первое такое, что $F_k = F_{\beta n}$ и n нечетно. Далее выбираем $F_{\alpha n}$ так, чтобы удовлетворить 2).

Пусть $k > 0$ произвольно и построены объекты для всех $\alpha + n$ при $n < k$. Тогда $x_{\alpha+k}$ выберем произвольно из $\mathcal{F} \cap \cap \{Z(f_\beta): \beta < \alpha + k\}$, функцию $f_{\alpha+k}$ выберем из условий 1) и 3) так, чтобы $f_{\alpha+k}|_{F_m} \equiv f_\sigma|_{F_m}$, где m — первое такое, что $F_m = F_{\sigma n}$ и четности n и k различны. Множества $F_{\alpha+k, n}$ выбираем, исходя из 2).

Очевидно, что при таком построении наши объекты будут удовлетворять всем требованиям.

Положим $\Phi = \{f_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ и $T = \{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. Докажем, что Φ дискретно в $C_p(X)$.

Пусть $f \in [\Phi]$. Тогда $f \upharpoonright_{\{Z(f_\alpha): \alpha < \omega_1\}} \equiv 0$ и на T функция f может принимать только значения 0 и 1. Пусть α — первое такое, что $f(x_\alpha) = 0$. Множество $V = \{g: |g(x_\alpha)| < 2^{-1}\}$ будет окрестностью f , не содержащей f_β при $\beta \geq \alpha$. Предположим, что α предельно. Тогда найдется $y \in [\{x_\beta: \beta < \alpha\}]$ такое, что $y \notin [\{x_\gamma: \gamma < \beta\}]$, $\beta < \alpha$ (это легко проверить). Но $f(y) = 1$. Если $\beta < \alpha$, то $f_\beta(y) = 0$ по 3) и $y \in [\{x_\gamma: \gamma < \alpha\}]$. Следовательно, окрестность $W = \{g: |g(y) - 1| < 2^{-1}\}$ точки f не содержит f_β при $\beta < \alpha$, что противоречит условию $f \in [\Phi]$.

Итак, $\alpha = \gamma + k$. Тогда окрестность $U = \{g: |g(x_{\gamma+k-1}) - 1| < 2^{-1}\}$ точки f не содержит f_β при $\beta < \alpha - 1$, так что ясно, что $f = f_{\alpha-1} \in \Phi$ и Φ замкнуто в $C_p(X)$.

Легко проверить, что Φ дискретно в себе.

Положим $K = \{f_\alpha: \alpha \text{ нечетно}\}$ и $L = \{f_\alpha: \alpha \text{ четно}\}$.

Пусть Y — произвольное счетное множество в X , $Y' = Y \setminus \cap \{Z(f_\beta): \beta < (\omega_1)\}$. Найдется $\alpha < \omega_1$ такое, что $Y' \subseteq CZ(f_\alpha)$. Пусть $V = \{g: |f_\alpha(y_i) - g(y_i)| < \varepsilon\}$ — окрестность f_α такая, что $y_i \in Y$. Для множества $Q = \{y_i: y_i \in Y'\}$ найдется n такое, что $Q \subseteq F_{\alpha n}$. По 4) найдется $\gamma > \alpha$ другой четности такое, что $f_\gamma \upharpoonright_{F_{\alpha n}} \equiv f_\alpha \upharpoonright_{F_{\alpha n}}$. Если $f_\alpha \in K$, то $f_\gamma \in L$ и $f_\alpha \in V$, $f_\gamma \in V$. Следовательно, $\pi_Y(f_\alpha) \in [\pi_Y(K)] \cap [\pi_Y(L)]$. В силу (A) $C_p(X)$ не может быть нормальным.

Теорема доказана.

Для $C_\omega(X)$ получены следующие оценки (X компактно):

$$1) |X| \leq X(C_\omega(X)) = w(C_\omega(X)) \leq \exp W(X),$$

$$2) \psi X(C_\omega(X)) = d(X), \text{ если } X \text{ — эберлейновский компакт,}$$

$$3) hd(C_\omega(X)) = nw(C_\omega(X)) = d(C_\omega(X)) = w(X), \text{ где } X \text{ — характер, } w \text{ — вес, } d \text{ — плотность, } \psi X \text{ — псевдохарактер, } nw \text{ — сетевой вес, } hf = \sup \{\varphi(Y): Y \subseteq X\} \text{ для любого кардинальнозначного инварианта } \varphi.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Bockstein. Une theoreme de separability pour les produits topologiques.—
Fund. Math., 1948, 35, p. 242—246.

Тюменский государственный
университет

Поступило в Правление общества
11 июля 1981 г.