А. Х. Шамилов, О специальных краевых задачах для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 77–83

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.927

А. Х. ШАМИЛОВ

О СПЕЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H дифференциальное уравнение

$$\ddot{u}=Au+f(t), \quad t\in[0, T], \tag{1}$$

где A — положительно-определенный самосопряженный оператор в H; $f(t)$ — заданная абстрактная функция со значениями в H.

Требуется найти пару $(u(t), \tau)$ такую, что $\tau\in(0, T]$, $u\in C^{(2)}([0,\tau]; H)$ и удовлетворяет уравнению (1) при $t\in[0,\tau]$, краевым условиям

$$u(0)=a, \tag{2}$$

$$u(\tau)=b \tag{3}$$

и специальному условию вида

$$\|\dot{u}(0)\|=v, \tag{4}$$

где $v>0$ — заданное число, a, b — заданные элементы некоторого линейного многообразия H' из пространства H. В дальнейшем через H_A обозначаем энергетическое пространство оператора A.

Такие задачи возникают в баллистике [1], теории оптимального управления [2] и других областях, а также являются объектом исследований работ [3—6] и др.

В настоящей работе доказаны теоремы существования и несуществования решения задачи (1)—(4), которые представляют собой принципиально новые результаты.

В известных работах в основном используется либо принцип сжимающих отображений, либо принцип Шаудера для доказательства существования решения.

Принципиальная новизна результатов настоящей работы заключается в том, что они основываются на непосредственном исследовании характера поведения решения задачи Дирихле в зависимости от граничного значения аргумента t. Эти результаты свободны от тех ограничений, которые присущи упомянутым выше работам, результаты в которых получены с помощью методов о существовании неподвижных точек операторов.

Настоящие результаты могут служить фундаментом для новых исследований по специальным краевым задачам для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных эллиптичесого типа и других уравнений с главной линейной эллиптической частью.

Теорема 1. *Пусть*

1) A имеет дискретный спектр;

2) $a\neq b\neq 0$; $a,b\in H_A$, $f\in([0, T]; H_A)$;

3) для некоторого $\tilde{T}\in(0, T)$ выполняется неравенство

$$\|b-a\|_{H_A}\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_1}\tilde{T}+\|b\|_{H_A}+\sqrt{\tilde{T}}\Big(\int_0^{\tilde{T}}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}\leqslant v,$$

где λ_1 — наименьшее собственное число оператора A.

Тогда задача (1)—(4), в которой условия (2), (3) выполняются даже в смысле нормы пространства H_A, имеет по крайней мере одно решение $(u(t), \tau): u\in C^{(2)}([0,\tau]; H)$, $\tau\in(0, T]$. Если же вместо условия 3) выполняется неравенство

$$\|b-a\|_{H_A}-\|b\|_{H_A}-\sqrt{T}\Big(\int_0^T\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}>v, \tag{5$_0$}$$

то указанная задача не имеет решения $u\in C^{(2)}([0,\tau]; H)$, $\tau\in(0, T]$.

Доказательство. При выполнении условий 1), 2) настоящей теоремы решение $U(t;\tau)$ задачи (1)—(3) для каждого τ, $\tau\in(0, T]$ дается формулой

$$U(t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t;\tau)u_n, \tag{5}$$

где

$$c_n(t,\tau)=a_n\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-t)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}+b_n\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}t}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}-\int_0^{\tau}G_n(t,s;\tau)f_n(s)ds,$$

$$G_n(t,s,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}\begin{cases}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}t\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-s), & 0\leqslant t\leqslant s,\\ \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-t)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}s, & s\leqslant t\leqslant\tau,\end{cases}$$

a_n, b_n, $f_n(t)$ — соответствующие коэффициенты Фурье элементов a, b, $f(t)$ по системе собственных элементов $\{u_n\}$ оператора A (см. также [4, 6]). Из (5) имеем

$$\dot{U}(0;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{-a_n\sqrt{\lambda_n}\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau+b_n\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}-$$
$$-\int_0^{\tau}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-s)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}f_n(s)ds\Big\}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(b_n-a_n)\sqrt{\lambda_n}\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau+$$
$$+\sqrt{\lambda_n}\frac{(1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}b_n-\int_0^{\tau}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-s)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}f_n(s)ds\Big\}u_n.$$

Поэтому

$$\|\dot{U}(0;\tau)\|=\|u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}\|, \tag{6}$$

где

$$u^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\sqrt{\lambda_n}\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau\cdot u_n, \tag{6$_1$}$$

$$u^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}b_n\frac{1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}u_n, \tag{6$_2$}$$

$$u^{(3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{-\int_0^{\tau}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-s)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}f_n(s)ds\Big\}u_n. \tag{6$_3$}$$

Дальнейшие рассуждения показывают, что приведенные преобразования при получении соотношения (6) законные, поскольку ряд, определяющий $\dot{U}(0;\tau)$, является абсолютно сходящимся в норме H.

Итак, из (6$_1$) следует

$$\|u^{(1)}\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)^2\lambda_n\operatorname{cth}^2\sqrt{\lambda_n}\tau\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(b_n-a_n)^2\Big)\operatorname{cth}^2\sqrt{\lambda_1}\tau,$$

так как $\operatorname{cth}\xi$ является убывающей функцией, следовательно,

$$\|u^{(1)}\| \leqslant \|b-a\|_{HA} \operatorname{cth}\sqrt{\lambda_1}\tau. \tag{7}$$

Из (6_1) также имеем

$$\|u^{(1)}\| \geqslant \|b-a\|_{HA}, \tag{8}$$

так как по известному свойству функции $\operatorname{cth}\xi$ имеет место неравенство $\operatorname{cth}\xi \geqslant 1$, $\xi \in (0, \infty)$.

Из (6_2) следует:

$$\|u^{(2)}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n^2 \left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau - 1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tau - 1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n^2$$

или

$$\|u^{(2)}\| \geqslant \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tau - 1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau} \|b\|_{HA}, \tag{9}$$

так как $(\operatorname{ch}\xi - 1)/\operatorname{sh}\xi$ является монотонно возрастающей функцией от ξ, для которой выполняются неравенства $0 < (\operatorname{ch}\xi - 1)/\operatorname{sh}\xi < 1$ при $\xi \in (0, \infty)$. Из того же (6_2) имеем

$$\|u^{(2)}\| \leqslant \|b\|_{HA}. \tag{10}$$

Из (6_3) следует:

$$\|u^{(3)}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau - s)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau} f_n(s)\,ds \right\}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\tau} |f_n(s)|\,ds\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} 1^2 ds \int_0^{\tau} |f_n(s)|^2 ds = \sum_{n=1}^{\infty} \tau \int_0^{\tau} |f_n(s)|^2 ds \leqslant \tau \int_0^{\tau} \|f(s)\|^2 ds.$$

Поэтому

$$\|u^{(3)}\| \leqslant \sqrt{\tau} \left(\int_0^{\tau} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Следует отметить, что сходимость всех приведенных выше рядов доказана в [4, теорема 20.3] (см. также [6]).

Теперь введем в рассмотрение функцию $g(\tau) = \|\dot{U}(0;\tau)\|$. В силу (7), (10), (11) из (6) следует

$$g(\tau) \leqslant \|u^{(1)}\| + \|u^{(2)}\| + \|u^{(3)}\| \leqslant \|b-a\|_{HA} \operatorname{cth}\sqrt{\lambda_1}\tau +$$

$$+ \|b\|_{HA} + \sqrt{\tau} \left(\int_0^{\tau} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$g(\tilde{T}) \leqslant \|b-a\|_{HA} \operatorname{cth}\sqrt{\lambda_1}\tilde{T} + \|b\|_{HA} + \sqrt{\tilde{T}} \left(\int_0^{\tilde{T}} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2},$$

и в силу условия 3) выполняется неравенство $g(\tilde{T}) < v$. В силу (10), (11) из (6) имеем

$$g(\tau) = \|u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}\| \geqslant \|u^{(1)}\| - \|u^{(2)}\| - \|u^{(3)}\| \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)^2 \lambda_n \operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau\right)^{1/2} - \|b\|_{HA} - \sqrt{T} \left(\int_0^{T} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что если $b - a \neq 0$, то существует такое n, что $b_n - a_n \neq 0$ и произведение $|b_n - a_n| \sqrt{\lambda_n} \operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau$ при $\tau \to 0$ становится сколь угодно большим. Поэтому $g(\tau) \to +\infty$ при $\tau \to 0$. Итак, $g(0) = +\infty$, $g(\tilde{T}) < v$. В силу непрерывности функции $g(\tau)$ уравнение $g(\tau) = v$ имеет по крайней мере одно решение τ, $\tau\in(0,\tilde{T}]\subset(0,T]$. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Справедливость второго утверждения следует из того, что

$$g(\tau)=\|\dot{U}(0;\tau)\|\geqslant\|b-a\|_{HA}-\|b\|_{HA}-\sqrt{T}\,(\int_0^T\|f(s)\|^2ds)^{1/2},$$

а в силу условия (5_0) теоремы выполняется неравенство $g(\tau)>v$ при всех $\tau\in(0,T]$. Следовательно, $g(\tau)=v$ не может иметь решения. Теорема 1 доказана.

В следующей теореме будем пользоваться обозначениями

$$K_0=[v+\|b\|_{HA}+\sqrt{\tilde{T}}\,(\int_0^{\tilde{T}}\|f(s)\|^2ds)^{1/2}]/|b_n-a_n|\sqrt{\lambda_n},\quad \tilde{T}\in(0,T],$$

$$(12_0)$$

$$K=[v-\|b\|_{HA}-\sqrt{\tilde{T}}(\int_0^{\tilde{T}}\|f(s)\|^2ds)^{1/2}]/\|b-a\|_{HA},$$

где λ_n — собственное число оператора A, соответствующее первому номеру n, для которого $b_n-a_n\neq0$. Если выполняется условие 3) теоремы 1, то выполняется неравенство $K>1$, которое влечет за собой и неравенства $K_0>K>1$.

Действительно, неравенство, данное в условии 3), эквивалентно неравенству $\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_1}\,\tilde{T}\leqslant K$, которое имеет место в том и только в том случае, когда $K>1$, так как $\operatorname{cth}\xi>1$ при $\xi\in(0,\infty)$.

Поскольку $|b_n-a_n|\sqrt{\lambda_n}\leqslant\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)^2\lambda_n\}^{1/2}=\|b-a\|_{HA}$, то $K_0\geqslant\geqslant K>1$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1)—3) теоремы 1. Тогда задача (1)—(4), в которой условия (2), (3) выполняются даже в смысле нормы энергетического пространства H_A, имеет по крайней мере одно решение* $(u(t),\tau):u\in C^{(2)}([0,\tau];H)$, $\tau\in[t_0,T_0]$, *где* $t_0=(2\sqrt{\lambda_n})^{-1}\times\times\ln[(K_0+1)/(K_0-1)]$, $T_0=(2\sqrt{\lambda_1})^{-1}\ln[(K+1)/(K-1)]$, $T_0\leqslant T$, K_0, K_1 *определяются формулами* (12_0).

Доказательство. Утверждение о существовании решения задачи (1)—(4) доказано выше. Цель настоящей теоремы — определение конкретного отрезка, содержащего решения уравнения $g(\tau)=v$, где $g(\tau)=\|\dot{U}(0;\tau)\|=\|u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}\|$. Заметим, что неравенство $\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_1}\,\tilde{T}\leqslant K$ эквивалентно неравенству $\tilde{T}\geqslant(2\sqrt{\lambda_1})^{-1}\ln[(K+1)/(K-\\-1)]=T_0$. Остается доказать выполнение неравенства $\tau\geqslant t_0$. Так как

$$g(\tau)=\|\dot{U}(0;\tau)\|\geqslant\|u^{(1)}\|-\|u^{(2)}\|-\|u^{(3)}\|\geqslant|b_n-a_n|\sqrt{\lambda_n}\times$$

$$\times\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau-\|b\|_{HA}-\sqrt{T}\,(\int_0^T\|f(s)\|^2ds)^{1/2},$$

следовательно, можно подобрать τ так, чтобы правая часть последнего неравенства была больше, чем v, т. е. выполнялось неравенство $\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_n}\tau>\\>K_0$, из которого следует $0<\tau\leqslant t_0=(2\sqrt{\lambda_n})^{-1}\ln[(K_0+1)/(K_0-1)]$, а также $g(t_0)>v$. Учитывая, что $(K_0+1)/(K_0-1)<(K+1)/(K-1)$, имеем окончательно $\tau\in[t_0,T_0]$, $g(t_0)>v$, $g(T_0)\leqslant v$, т. е. $g(\tau)=v$ имеет по крайней мере одно решение τ, $\tau\in[t_0,T_0]$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В случае, когда A конечномерен, t_0 можно определить и так: $t_0=(2\sqrt{\lambda_N})^{-1}\ln[(K_0+1)/(K_0-1)]$, где λ_N — наибольшее собственное число матрицы A, $K_0=[v+\|b\|_{HA}+\sqrt{\tilde{T}}\int_0^{\tilde{T}}\|f(s)\|^2ds)^{1/2}]/\|b-\\-a\|_{HA}$.

В случае $a=b\neq 0$ справедлива

Теорема 3. *Пусть*

1) A имеет дискретный спектр;

2) $a=b\neq 0$; a, $b\in H_A$, $f\in C([0,T);H_A)$;

3) для некоторого $\tilde{T}\in(0,T]$ выполняется неравенство

$$\|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tilde{T}-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tilde{T}}-\sqrt{\tilde{T}}\Big(\int_0^{\tilde{T}}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}\geqslant v,$$

где λ_1 — наименьшее собственное число оператора A. Тогда задача (1)—(4), в которой условия (2), (3) выполняются даже в смысле нормы пространства H_A, имеет по крайней мере одно решение $u\in C^{(2)}([0;\tau];H)$, $\tau\in\in(0,T]$. Если же вместо условия 3) выполняется неравенство

$$\|b\|_{HA}+\sqrt{T}\Big(\int_0^{T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}<v, \tag{12}$$

то указанная задача не имеет решения $u\in C^{(2)}([0,\tau];H)$, $\tau\in(0,T]$.

Доказательство. В случае $a=b\neq 0$ формула (6) приобретает вид

$$\|\dot{U}(0;\tau)\|=\|u^{(2)}+u^{(3)}\|, \tag{13}$$

где $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ определяются формулами (6_1), (6_2) соответственно.

Из (6_2) имеем

$$\|u^{(2)}\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b_n^2\Big(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}\Big)^2\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b^2\Big(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tau-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau}\Big)^2=$$

$$=\|b\|^2_{HA}\Big(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tau-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau}\Big)^2,$$

так как $(\operatorname{sh}\xi-1)/\operatorname{sh}\xi$ является монотонно возрастающей функцией. Таким образом,

$$\|u^{(2)}\|\geqslant\|b\|_{HA}(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tau-1)/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau. \tag{14}$$

Из (13) с помощью неравенств (14), (11) следует

$$g(\tau)=\|\dot{U}(0;\tau)\|\geqslant\|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\xi-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau}-\sqrt{\tau}\Big(\int_0^{\tau}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}, \tag{15}$$

$$g(\tau)\leqslant\|b\|_{HA}+\sqrt{\tau}\Big(\int_0^{\tau}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}. \tag{16}$$

Так как

$$g(\tau)=\|\dot{U}(0;\tau)\|=\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sqrt{\lambda_n}\frac{1-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}b_n-$$

$$-\int_0^{\tau}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(\tau-s)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}f_n(s)ds\Big)^2\Big\}^{1/2}$$

и последний ряд сходится равномерно на $[\varepsilon,T]$, $\varepsilon>0$, то $g(\tau)$ является непрерывной функцией. Кроме того, $g(0+)=0$.

Если покажем, что $g(\tilde{T})\geqslant v$, то тем самым докажем существование решения уравнения $g(\tau)=v$.

В силу (15)

$$g(\tau)\geqslant\|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tau-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tau}-\sqrt{\tilde{T}}\Big(\int_0^{\tilde{T}}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2},\quad\tau\in(0,\tilde{T}].$$

Поэтому

$$g(\tilde T)\geqslant \|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tilde T-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tilde T}-\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}\geqslant v,$$

т. е. $g(\tilde T)\geqslant v$. Первое утверждение теоремы 3 доказано.

Второе утверждение теоремы следует из того, что для любого τ, $\tau\in\in(0, T)$, из (16) следует неравенство

$$g(\tau)\leqslant\|b\|_{H_A}+\sqrt{T}\Big(\int_0^T\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2},$$

правая часть которого в силу (12) строго меньше, чем v. Следовательно, $g(\tau)$ не может достичь значения v. Теорема 3 доказано.

Замечание 2. В случае, когда $H=E_n$ — конечномерен, т. е. A является положительно-определенной матрицей, условия (5_0) и (12) можно заменить соответствующими менее ограничительными условиями:

$$\|b-a\|_{HA}\operatorname{cth}\sqrt{\lambda_N}\tilde T-\|b\|_{HA}-\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}\geqslant v, \tag{$5_0'$}$$

$$\|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_N}\tilde T-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_N}T}+\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}<v, \tag{12'}$$

где λ_N — наибольшее собственное число матрицы A.

Введем обозначения

$$l_0=\frac{v-\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}}{\|b\|_{HA}};\quad l=\frac{v+\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}}{\|b\|_{HA}}, \tag{17}$$

где $0<\tilde T\leqslant T$.

Теорема 4. *Пусть A конечномерен; $l_0>0$ и выполняются условия 2), 3) теоремы 3. Тогда задача (1)—(4) имеет по крайней мере одно решение $(u(t),\tau):u\in C^{(2)}([0,\tau];E_n)$, $\tau\in[t_0', T_0']$, где $t_0'=(\lambda_1)^{-1/2}\ln[(1+l_0)/(1-l_0)]$, $T_0'=(\lambda_1)^{-1/2}\ln[(1+l)/(1-l)]$, l_0, l_1 определяются формулами (17), причем неравенство $l<1$ следует из условия 3) теоремы 3.*

Доказательство. Неравенство, данное в условии 3) теоремы 3, эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}\tilde T/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}\tilde T\geqslant l, \tag{18}$$

которое имеет место в том и только в том случае, когда выполняются неравенства $0<l<1$, так как $0<(\operatorname{ch}\xi-1)/\operatorname{sh}\xi<1$ при $\xi\in(0,\infty)$.

Решая неравенство (18), получим

$$\tilde T\geqslant(\lambda_1)^{-1/2}\ln[(1+l)/(1-l)]=T_0'. \tag{18_1}$$

С другой стороны,

$$g(\tau)\leqslant\|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_N}\tau-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_N}\tau}+\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}.$$

Теперь, учитывая, что по условиям теоремы $l_0>0$, а также выполняется неравенство $l_0<l$, имеем $l_0<1$. Поэтому решение неравенства

$$\|b\|_{HA}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_N}\tau-1}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_N}\tau}+\sqrt{\tilde T}\Big(\int_0^{\tilde T}\|f(s)\|^2ds\Big)^{1/2}<v$$

дает $(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_N}\tau-1)/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_N}\tau<l_0$ или $0<\tau<(\lambda_N)^{-1/2}\ln[(1+l_0)/(1-l_0)]=t_0'$. Окончательно имеем, что $g(t_0')<v$; $g(T_0')\geqslant v$ и между t_0' и T_0' имеется по крайней мере одно решение уравнения $g(\tau)=v$. Теорема 4 доказана.

Литература

1. W l a d i s l a w N i k l i b o r c. // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl. 1930. S. 227—242.

2. G o e b e l M.// Math. Operation for sch Statist. Ser. Optimization. 1981. Vol. 12, N 4. P. 525—533.

3. П е р о в А. Н., М а х м у д о в А. П. // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 366—370.

4. Ш а м и л о в А. Х. Специальные вопросы теории функционально-дифференциальных уравнений. Баку, 1990.

5. Ш а м и л о в А. Х. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 1. С. 54—57.

6. Ш а м и л о в А. Х.// Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2154—2163.

Бакинский государственный университет
им. М. Расулзаде

Поступила в редакцию
24 ноября 1992 г.