Ю. А. Михайлов, О граничных значениях в L_p, $p > 1$, решений линейного эллиптического уравнения второго порядка,
Дифференц. уравнения, 1983, том 19, номер 2, 318–337

$= P_{[k/6]}(\zeta, x_3) + \Omega_k(\zeta, x_3)$, где функции $P_r(\zeta, x_3)$ определяются аналогично функциям Q_r, а функции $\Omega_k(\zeta, x_3)$ удовлетворяют однородной системе (0.12), начальным условиям, получающимся из условий (0.13), и условию согласования

$$\Omega_k(\zeta, x_3) - \tilde{V}_k^{(1)}(\zeta, x_3) \xrightarrow[x_3 \to 0]{} 0 \tag{3.4}$$

равномерно относительно $\zeta \in \mathbf{R}^2$.

Под функциями $v_k^{(i)}(\zeta, x_3)$ при $i = 2, 3$ будем понимать решения однородной системы (0.12), экспоненциально стремящиеся к нулю при $x_3 \to 0$ для фиксированных ζ_1, ζ_2, таких, что $\zeta \notin \{\zeta_1=0, \zeta_2 \geqslant 0\} \cup \{\zeta_2=0, \zeta_1 \geqslant 0\}$, $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$ соответственно, и удовлетворяющие условиям согласования, аналогичным условию (3.4).

Доказательство существования решений u_k^i $(i = 2, 3)$, Ω_k проводится аналогично тому, как это было сделано в работе [5] (см. § 4, теорема 3).

Асимптотические разложения решения $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ построены в различных подобластях области D_δ. Рассмотрим частичные суммы этих а. разложений: $E_{n,0} = \hat{u}_n + \hat{\hat{u}}_n$, $E_{n,1} = \hat{v}_{1,12n}^{(1)} + \hat{v}_{1,12n}^{(2)}$, $E_{n,2} = \hat{v}_{2,12n}^{(1)} + \hat{v}_{2,12n}^{(2)}$, $E_{n,3} = \hat{v}_{12n}^{(1)} + \hat{v}_{12n}^{(2)} + \hat{v}_{12n}^{(3)}$, $E_{n,4} = \hat{w}_{1,3n}$, $E_{n,5} = \hat{w}_{2,3n}$, $E_{n,6} = \hat{Z}_n$. Фиксируем некоторое ν такое, что $0 < \nu < 1/4$, и определим области D_i следующим образом: $D_1 = D_\delta \cap \{x : x_2 > \varepsilon^{2\nu}, |x_1| < \varepsilon^{2\nu}, x_3 > \varepsilon^\nu\}$, $D_2 = D_\delta \cap \{x : x_1 > \varepsilon^{2\nu}, |x_2| < \varepsilon^{2\nu}, x_3 > \varepsilon^\nu\}$, $D_3 = D_\delta \cap \{x : |x_i| < \varepsilon^{2\nu}, i = 1, 2, x_3 > \varepsilon^\nu\}$, $D_4 = D_\delta \cap \{x : x_2 > \varepsilon^{2\nu}, |x_1| < \varepsilon^{2\nu}, |x_3| < \varepsilon^\nu\}$, $D_5 = D_\delta \cap \{x : x_1 > \varepsilon^{2\nu}, |x_2| < \varepsilon^{2\nu}, |x_3| < \varepsilon^\nu\}$, $D_0 = D_\delta \setminus (\bigcup_i D_i)$. Справедлива

Теорема 3. *В областях D_i имеют место оценки $|u_\varepsilon - E_{n,i}| \leqslant M\varepsilon^{n\lambda}$, где положительная постоянная λ зависит лишь от ν, а постоянная M не зависит от ε.*

Эта теорема может быть доказана так же, как теорема 5 в работе [3]

Литература

1. Леликова Е. Ф.— Сб. трудов БФ АН СССР, 1980, с. 82—95.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.— 310 с.
3. Леликова Е. Ф.— В сб.: Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Труды Института математики и механики УНЦ АН СССР, 1979, вып. 28, с. 40—58.
4. Ильин А. М., Леликова Е. Ф.— Мат. сб., 1975, т. 96, № 4, с. 568—583.
5. Ильин А. М., Горьков Ю. П., Леликова Е. Ф.— Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1975, вып. 1, с. 75—133.
6. Леликова Е. Ф.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 9, с. 1638—1648.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А.— УМН, 1957, т. 12, вып. 5 (77), с. 3—120.

Институт математики и механики УНЦ АН СССР

Поступила в редакцию 29 октября 1980 г.

УДК 517.956

Ю. А. МИХАЙЛОВ

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ В L_p, $p>1$, РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель настоящей работы — обобщение на решения эллиптических уравнений следующих хорошо известных результатов.

Согласно теореме Рисса [1], необходимым и достаточным условием существования у аналитической в круге $\{|z| < 1\}$ комплексной z-плоскости функции $F(z)$ предела в L_p, $p>1$, на границе $\{|z|=1\}$ является принадлежность функции $F(z)$ классу Харди H_p.

Теорема Литтлвуда — Пэли [2, 3] утверждает, что необходимым и достаточным условием существования у функции $F(z)$ предела в L_p, $p>1$, на границе $\{|z|=1\}$ является принадлежность функции Литтлвуда — Пэли $g(\theta)=\left(\int\limits_0^1(1-r)|F'(re^{i\theta})|^2dr\right)^{1/2}$ пространству $L_p(0,\ 2\pi)$.

Аналогичные результаты в различных случаях эллиптических уравнений были получены в [4—7].

Здесь результаты, аналогичные теоремам Рисса и Литтлвуда — Пэли, доказываются при более слабых (по сравнению с упомянутыми работами) ограничениях на коэффициенты уравнения.

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, граница которой ∂Q — $(n-1)$-мерная замкнутая поверхность без края класса C^2. Тогда существует столь малое число $\delta_0>0$, что для всех $\delta\in(0,\ 2\delta_0]$ множество $Q_\delta=Q\cap\{\min\limits_{y\in\partial Q}|x-y|>\delta\}$ является областью с границей ∂Q_δ класса C^2, при этом для любой точки $x_0\in\partial Q$ существует единственная точка x_δ поверхности ∂Q_δ, отстоящая от точки x_0 на расстоянии, равном δ, $|x_0-x_\delta|=\delta$:

$$x_\delta=x_\delta(x_0)=x_0-\delta\nu(x_0), \tag{1}$$

где $\nu(x_0)$ — вектор внешней по отношению к Q единичной нормали к ∂Q в точке x_0. Соответствие (1) есть взаимно-однозначное (с отличным от нуля якобианом) отображение класса C^1 ∂Q на ∂Q_δ.

Возьмем произвольное $\delta\in(0,\ 2\delta_0]$, произвольную точку $x_0\in\partial Q$ и обозначим через $\dfrac{dS_\delta}{dS}(x_0)$ предел при $\varepsilon\to+0$ отношения площади куска поверхности ∂Q_δ, состоящего из всех точек $x'_\delta=x'_0-\delta\nu(x'_0)$, для которых $x'_0\in\partial Q\cap\{|x-x_0|<\varepsilon\}$, к площади поверхности $\partial Q\cap\{|x-x_0|<\varepsilon\}$. Существует такая постоянная $\gamma_0>0$, что для всех $x_0\in\partial Q$ $\gamma_0^{-1}\leqslant\dfrac{dS_\delta}{dS}(x_0)\leqslant\gamma_0$ и $\dfrac{dS_\delta}{dS}(x_0)\to 1$ при $\delta\to+0$ равномерно по $x_0\in\partial Q$ (подробнее см. [6]).

Функция $r(x)=\min\limits_{y\in\partial Q}|x-y|$ принадлежит $C^2(\overline{Q}\diagdown Q_{2\delta_0})$, $\partial Q_{2\delta_0}\in C^2$, следовательно, в $Q_{2\delta_0}$ существует такая функция $r_1(x)$, что функция $\rho(x)=\begin{cases} r(x), & x\in\overline{Q}\diagdown Q_{2\delta_0},\\ r_1(x), & x\in Q_{2\delta_0},\end{cases}$ принадлежит $C^2(\overline{Q})$, при этом можно считать $\rho(x)\geqslant 3\delta_0/2$ при $x\in Q_{2\delta_0}$, поэтому существует такая постоянная $\gamma>0$, что

$$\gamma^{-1}r(x)\leqslant\rho(x)\leqslant\gamma r(x),\quad x\in\overline{Q}. \tag{2}$$

Очевидно, $\nabla\rho(x)=-\nu_\delta(x)=-\nu(x_0)$, $x\in Q\diagdown Q_{2\delta_0}$, где $\delta=r(x)$, $\nu_\delta(x)$ — единичный вектор внешней по отношению к Q_δ нормали к ∂Q_δ в точке x, а x_0 — та (единственная) точка ∂Q, для которой $|x-x_0|=\delta$.

Рассмотрим в области Q линейное эллиптическое уравнение

$$\mathcal{L}u\equiv-\operatorname{div}(A(x)\nabla u)+(B(x),\ \nabla u)+c(x)u=f(x) \tag{3}$$

с вещественнозначными коэффициентами, где $A(x)=(a_{ij}(x))$ — симметрическая $(n\times n)$-матрица, удовлетворяющая условию

$$0<\gamma_1|\xi|^2\leqslant(\xi,\ A\xi)\leqslant\gamma_2|\xi|^2 \tag{4}$$

для всех $x\in Q$ и всех $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)\in\mathbf{R}^n$, $|\xi|\neq 0$, $B(x)=(b_1(x),\ \ldots,\ b_n(x))$ — вектор.

Возьмем произвольное $p>1$ и будем предполагать, что коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям

$$a_{ij} \in C(Q),\ (a_{ij})_{x_j} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q),\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

$$\|\operatorname{div}(A(x)\,\nu_\delta(x)\|_{L_\infty(\partial Q_\delta)} \in L_1(0,\ \delta_0), \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2(x) \in L_{q_1\theta}(Q),\ c(x) \in L_{q_2\theta}(Q),$$

где $q_1 = \frac{n}{2}\max\left\{1, \frac{p}{n(p-1)}\right\}$, $q_2 = \frac{n}{2}\max\left\{1, \frac{2p}{np-n+p}, \frac{2p}{n+p}\right\}$, а θ — некоторое число, $\theta > 1$.

Предположим, что правая часть уравнения (3)

$$f(x) \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q) \cap \tilde{L}_p(Q), \tag{6}$$

где $\tilde{L}_p(Q)$ — банахово пространство, получающееся в результате пополнения множества $C^\infty(\overline{Q})$ по норме $\|f\|_{\tilde{L}_p(Q)} = \|f\|_{L_p(Q_{\delta_0})} + \int\limits_0^{\delta_0} \tau\,\|f\|_{L_p(\partial Q_\tau)} d\tau$.

Пусть функция $u(x)$ является обобщенным из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решением уравнения (3), т. е. $u(x) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q (\nabla\eta,\ A\nabla u)\,dx + \int\limits_Q (B,\ \nabla u)\,\eta dx + \int\limits_Q cu\eta dx = \int\limits_Q f\eta dx \tag{7}$$

для всех финитных в Q функций $\eta(x) \in W^1_{p'}(Q)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет предел в L_p на границе ∂Q, если существует функция $\varphi(x) \in L_p(\partial Q)$, для которой

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial Q} |u(x_\delta(x)) - \varphi(x)|^p dS_x = 0. \tag{8}$$

Основной целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $u(x)$, являющаяся решением из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (3), коэффициенты и правая часть которого удовлетворяют условиям (4)—(6), имела предел в L_p на границе ∂Q, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:* 1) $\sup\limits_{0<\delta\leq\delta_0} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^p dS_\delta < \infty$, 2) $\int\limits_Q |\nabla u|^2\,|u|^{p-2} r(x)\,dx < \infty$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение, которое, по-видимому, является известным.

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (3), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4) и (5), а правая часть $f(x) \in L_{\tilde{p},\mathrm{loc}}(Q)$ с некоторым $\tilde{p} \geq p$. Тогда $u(x) \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(Q)$, где $q = \min\{\tilde{p},\ q_2\theta\}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если функция $v(x)$ является решением из $W^1_{s,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения

$$-\operatorname{div}(A(x)\,\nabla v) = g(x), \tag{9}$$

где $g(x) \in L_{r,\mathrm{loc}}(Q)$, $1 < s \leq r$, то $v(x) \in W^2_{r,\mathrm{loc}}(Q)$.

Пусть δ — любое число из интервала $(0,\ \delta_0)$. Возьмем последовательность $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in C^1(\overline{Q}_\delta)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, $\varphi_k \to v$ в $W^1_s(Q_\delta)$ при $k\to\infty$, и последовательность $\{g_k\}$, $g_k \in L_\infty(Q_\delta)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, $g_k \to g$ в $L_r(Q_\delta)$ при $k\to\infty$. Обозначим через $v_k(x)$ решение из $W^1_s(Q_\delta)$ задачи Дирихле $-\operatorname{div}(A(x)\,\nabla v_k) = g_k(x)$, $v_k|_{\partial Q_\delta} = \varphi_k|_{\partial Q_\delta}$. Хорошо известно (см., например,

[8]), что такое решение существует, единственно и удовлетворяет оценке $\|v_k\|_{W_s^1(Q_\delta)} \leqslant \text{const}\,[\|g_k\|_{L_s(Q_\delta)} + \|\varphi_k\|_{W_s^1(Q_\delta)}]$. Следовательно,

$$v_k \to v \text{ в } W_s^1(Q_\delta) \text{ при } k \to \infty. \tag{10}$$

Заметим, что $v_k \in W^2_{2,\mathrm{loc}}(Q_\delta)$ (см. [9]), и, следовательно, $v_k(x)$ почти всюду (п. в.) в Q_δ удовлетворяет уравнению $-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(v_k)_{x_ix_j} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x))_{x_j}(v_k)_{x_i} = g_k(x)$. Тогда (см. [10]) $v_k \in W_s^2(Q_{\delta_1})$ для любого $\delta_1 \in (\delta, \delta_0)$ и справедлива оценка

$$\|v_k\|_{W_s^2(Q_{\delta_1})} \leqslant C_1\left[\|g_k\|_{L_s(Q_\delta)} + \left\|\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij})_{x_j}(v_k)_{x_i}\right\|_{L_s(Q_\delta)}\right] + \\ + \frac{C_2}{(\delta_1-\delta)^\alpha}\sup_{Q_\delta^{n-1}}\|v_k\|_{L_1(Q_\delta^{n-1})}, \tag{11}$$

где C_1, C_2 и α — положительные постоянные, не зависящие от v_k и g_k, а точная верхняя грань берется по всем $(n-1)$-мерным плоским сечениям области Q_δ. Так как для любого сечения Q_δ^{n-1} $\|v_k\|_{L_1(Q_\delta^{n-1})} \leqslant \text{const} \times \times \|v_k\|_{W_s^1(Q_\delta)}$ и $\left\|\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij})_{x_j}(v_k)_{x_i}\right\|_{L_s(Q_\delta)} \leqslant \text{const}\,\|v_k\|_{W_s^1(Q_\delta)}$, то из (10) и (11) имеем $\|v_k - v_m\|_{W_s^2(Q_{\delta_1})} \to 0$ при $k, m \to \infty$. Таким образом, $v_k \in W^2_{s,\mathrm{loc}}(Q_\delta)$. В силу теоремы вложения получаем, что $v_k \in W^1_{l,\mathrm{loc}}(Q_\delta)$ с любым $l > 1$ при $s \geqslant n$ и $v \in W^1_{s+\varkappa,\mathrm{loc}}(Q_\delta)$ при $s < n$. Повторяя рассуждения, через конечное число шагов (число $\varkappa$ можно выбрать не зависящим от s) получим, что $v \in W^1_{r,\mathrm{loc}}(Q_\delta)$ и, следовательно, $v \in W^2_{r,\mathrm{loc}}(Q_\delta)$. Из произвольности $\delta \in (0, \delta_0)$ вытекает, что $v(x) \in W^2_{r,\mathrm{loc}}(Q)$.

Рассмотрим теперь функцию $u(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (3). Функция $u(x)$ является решением из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (9) с правой частью $g(x) = f(x) - (B(x), \nabla u) - c(x)u$. Заметим, что $g(x) \in L_{p_1,\mathrm{loc}}(Q)$, где $p_1 = \min\{\tilde{p}, s\}$, а

$$s = \begin{cases} \dfrac{p\theta}{p+\theta-1}, & 1 < p < \dfrac{n}{n-1}, \\[2ex] \dfrac{np\theta}{p+n\theta}, & \dfrac{n}{n-1} \leqslant p \leqslant n, \\[2ex] \min\left\{q_2\theta, \dfrac{np\theta}{p+n\theta}\right\}, & p > n. \end{cases}$$

Как показано выше, $u(x) \in W^2_{p_1,\mathrm{loc}}(Q)$. В силу теоремы вложения $u(x) \in \in W^1_{p+\varkappa_1,\mathrm{loc}}(Q)$, где число $\varkappa_1$ можно выбрать не зависящим от p. Так как при $l \geqslant \dfrac{nq_2\theta}{n-q_2}$ имеем $\dfrac{nl\theta}{l+n\theta} \geqslant q_2\theta$, то, повторяя рассуждения, через конечное число шагов получим, что $g(x) \in L_{q,\mathrm{loc}}(Q)$, где $q = \min\{\tilde{p}, q_2\theta\}$. Отсюда по доказанному $u(x) \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(Q)$.

Замечание. Если в условиях леммы 1 коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2(x) \in L_{q_1\theta_1}(Q)$, $c(x) \in L_{q_2\theta_2}(Q)$, где $\theta_1 > 1$ и

$\theta_2 > 1$, то нетрудно показать, что $u(x) \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(Q)$, где $q = \min\{\tilde{p}, \quad 2\tilde{q}_1\theta_1 \; q_2\theta_2\}$.

Следствие. *Пусть $u(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (3), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4) и (5), а правая часть $f(x) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q)$. Тогда $u(x) \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(Q)$,* где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Если $p \geqslant 2$, то утверждение очевидно. Пусть $1 < p < 2$. Тогда из леммы 1 вытекает, что $u(x) \in W^2_{q_2\theta,\mathrm{loc}}(Q)$. Если $1 < p < \frac{n}{n-1}$, то $q_2 = \frac{np}{np - n + p}$. Отсюда получаем, что $u(x) \in W^1_{s,\mathrm{loc}}(Q)$, где $s = \frac{n\theta \cdot q_2\theta}{n\theta - q_2\theta} = \frac{p\theta}{p-1} = p'\theta > p'$. Наконец, если $\frac{n}{n-1} \leqslant p < 2$, то $q_2 = \frac{n}{2}$ и $u(x) \in W^1_{s,\mathrm{loc}}(\theta)$, где $s = \frac{n\theta \cdot q_2}{n - q_2} = n\theta > n \geqslant p'$.

Наряду с уравнением (3) рассмотрим в области Q уравнение

$$\mathcal{L}u + \lambda u \equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (B(x), \nabla u) + c(x)u + \lambda u = f(x), \qquad (3')$$

где λ — некоторое положительное число.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (3′), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4) и (5), а правая часть $f(x) \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$, и пусть $\lambda \geqslant \lambda'$ (λ' — некоторое неотрицательное число). Тогда для любого числа δ из интервала* $(0, \delta_0)$ *справедливо равенство*

$$(p-1)\int_{Q_\delta} (\nabla u, A\nabla u)|u|^{p-2}(\rho-\delta)\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta, A\nu_\delta)|u|^p dS_\delta -$$
$$-\frac{1}{p}\int_{Q_\delta} \operatorname{div}(A\nabla\rho)|u|^p dx + \int_{Q_\delta} (B, \nabla|u|)|u|^{p-1}(\rho-\delta)\,dx +$$
$$+\int_{Q_\delta} (c+\lambda)|u|^p(\rho-\delta)\,dx = \int_{Q_\delta} f|u|^{p-1}\operatorname{sign} u(\rho-\delta)\,dx. \qquad (12)$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$. Пусть сначала $p \geqslant 2$. Подставим в интегральное тождество (7) функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} (u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta), & x \in Q_\delta, \\ 0, & x \in Q \setminus Q_\delta, \end{cases} \quad \text{где } u^+ = \begin{cases} u, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0, \end{cases}$$

а ε — произвольное фиксированное положительное число. Легко видеть, что $\eta(x)$ финитна в Q и принадлежит $W^1_{p'}(Q)$. Получим равенство

$$(p-1)\int_{Q_\delta} (\nabla u^+, A\nabla u)(u^+ + \varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)\,dx +$$
$$+\int_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u)(u^+ + \varepsilon)^{p-1}dx + \int_{Q_\delta} (B, \nabla u)(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx +$$
$$+\int_{Q_\delta} (c+\lambda)u(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx = \int_{Q_\delta} f(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx. \qquad (13)$$

Обозначим $Q_\delta^+ = \{x \in Q_\delta : u(x) > 0\}$ и $Q_\delta^- = \{x \in Q_\delta : u(x) < 0\}$. Имеем

$$\int_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u)(u^+ + \varepsilon)^{p-1}dx = \frac{1}{p}\int_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla(u^+ + \varepsilon)^p)dx +$$

$$+\varepsilon^{p-1}\int\limits_{Q_\delta^-}(\nabla\rho,\ A\nabla u)\,dx=-\frac{1}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,(u^++\varepsilon)^p dS_\delta-$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,(u^++\varepsilon)^p dx+\varepsilon^{p-1}\int\limits_{Q_\delta^-}(\nabla\rho,\ A\nabla u)\,dx.$$

Далее

$$\int\limits_{Q_\delta}(B,\ \nabla u)\,(u^++\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx=\int\limits_{Q_\delta^+}(B,\ \nabla u^+)\,(u^++\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)dx+$$

$$+\varepsilon^{p-1}\int\limits_{Q_\delta^-}(B,\ \nabla u)\,(\rho-\delta)\,dx,$$

$$\int\limits_{Q_\delta}(c+\lambda)\,u\,(u^++\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx=\int\limits_{Q_\delta^+}(c+\lambda)\,u^+\,(u^++\varepsilon)^{p-1}\,(\rho-$$

$$-\delta)\,dx+\varepsilon^{p-1}\int\limits_{Q_\delta^-}(c+\lambda)\,u\,(\rho-\delta)\,dx,$$

$$\int\limits_{Q_\delta}f\,(u^++\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx=\int\limits_{Q_\delta^+}f\,(u^++\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx+$$

$$+\varepsilon^{p-1}\int\limits_{Q_\delta^-}f\,(\rho-\delta)\,dx.$$

Подставляя полученное в (13) и учитывая, что $u^+=|u|$ при $x\in Q_\delta^+$, имеем равенство

$$(p-1)\int\limits_{Q_\delta^+}(\nabla u,\ A\nabla u)\,(|u|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)\,dx+\int\limits_{Q_\delta^+}(B,\ \nabla|u|)\,(|u|+$$

$$+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx+\int\limits_{Q_\delta^+}(c+\lambda)\,|u|\,(|u|+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx-$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,(u^++\varepsilon)^p dS_\delta-\frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta^+}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,(|u|+\varepsilon)^p dx+$$

$$+\varepsilon^{p-1}\Bigg[\int\limits_{Q_\delta^-}(\nabla\rho,\ A\nabla u)\,dx-\frac{\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_\delta^-}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\delta^-}(B,\ \nabla u)\,(\rho-\delta)\,dx+\int\limits_{Q_\delta^-}(c+\lambda)\,u\,(\rho-\delta)\,dx-$$

$$-\int\limits_{Q_\delta^-}f\,(\rho-\delta)\,dx\Bigg]=\int\limits_{Q_\delta^+}f\,(|u|+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx. \qquad (14^+)$$

Так как функция $-u(x)$ является решением из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $\mathscr{L}v+\lambda v=-f$, то аналогично получаем равенство

$$(p-1)\int\limits_{Q_\delta^-}(\nabla u,\ A\nabla u)\,(|u|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)\,dx+\int\limits_{Q_\delta^-}(B,\ \nabla|u|)\,(|u|+$$

$$+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx+\int\limits_{Q_\delta^-}(c+\lambda)\,|u|\,(|u|+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx-$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta, A\nu_\delta)((-u)^+ +\varepsilon)^p dS_\delta-\frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta^-}\operatorname{div}(A\nabla\rho)(|u|+\varepsilon)^p dx+$$

$$+\varepsilon^{p-1}\Big[\int\limits_{Q_\delta^+}(\nabla\rho,\ A\nabla u)\,dx-\frac{\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_\delta^+}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,dx+\int\limits_{Q_\delta^+}(B,\nabla u)\,(\rho-\delta)\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\delta^+}(c+\lambda)\,u\,(\rho-\delta)\,dx-\int\limits_{Q_\delta^+}f\,(\rho-\delta)\,dx\Big]=$$

$$=-\int\limits_{Q_\delta^-}f\,(|u|+\varepsilon)^{p-1}\,(\rho-\delta)\,dx. \qquad (14^-)$$

Поскольку $(u^+ +\varepsilon)^p+((-u)^+ +\varepsilon)^p=(|u|+\varepsilon)^p+\varepsilon^p$, то, складывая (14^+) и (14^-), получим равенство

$$(p-1)\int\limits_{Q_\delta}(\nabla u,\ A\nabla u)\,(|u|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)\,dx=-\int\limits_{Q_\delta}(B,\nabla|u|)\,(|u|+$$

$$+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx-\int\limits_{Q_\delta}(c+\lambda)\,|u|\,(|u|+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx+$$

$$+\frac{1}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,(|u|+\varepsilon)^p dS_\delta+\frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,(|u|+\varepsilon)^p dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\delta}f\,(|u|+\varepsilon)^{p-1}\operatorname{sign}u\,(\rho-\delta)\,dx-\varepsilon^{p-1}\Big[\int\limits_{Q_\delta}(\nabla\rho,\ A\nabla u)\,dx-$$

$$-\frac{\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,dx-\frac{\varepsilon}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,dS_\delta+\int\limits_{Q_\delta}(B,\ \nabla u)\,(\rho-\delta)\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\delta}(c+\lambda)\,u\,(\rho-\delta)\,dx-\int\limits_{Q_\delta}f\,(\rho-\delta)\,dx\Big]. \qquad (14)$$

Так как при $\varepsilon<1$ $(|u|+\varepsilon)^p<(|u|+1)^p$, $(|u|+\varepsilon)^{p-1}<(|u|+1)^{p-1}$, $|u|\times\times(|u|+\varepsilon)^{p-1}<(|u|+1)^p$, а функция $(\nabla u,\ A\nabla u)(|u|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)$, монотонно убывая, стремится п. в. в Q_δ к функции $(\nabla u,\ A\nabla u)\,|u|^{p-2}(\rho-\delta)$ при $\varepsilon\to+0$, то в равенстве (14) можно перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$ и получить равенство (12).

Пусть теперь $1<p<2$. Возьмем некоторое число $\delta'\in(0,\ \delta)$, последовательность $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k\in C^1(\bar Q_{\delta'})$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, $\varphi_k\to u$ в $W_p^1(Q_{\delta'})$, и последовательность $\{f_k\}$: $f_k(x)=\begin{cases} f\ , & |f|<k,\\ k\ , & f\geqslant k,\\ -k\ , & f\leqslant -k.\end{cases}$

Пусть $u_k(x)$ — решение из $W_p^1(Q_{\delta'})$ задачи Дирихле $\mathscr{L}u_k+\lambda u_k=f_k$, $u_k|_{\partial Q_{\delta'}}=\varphi_k|_{\partial Q_{\delta'}}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ (при $\lambda\geqslant\lambda'>0$, где λ' — достаточно большое число, такое решение существует). Возьмем произвольное $\varepsilon>0$, произвольное натуральное число k и рассмотрим функции

$$\eta_1(x)=\begin{cases}(u_k^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta), & x\in Q_\delta,\\ 0\ , & x\in Q\setminus Q_\delta,\end{cases}$$

$$\text{и}\ \ \eta_2(x)=\begin{cases}((-u_k)^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta), & x\in Q_\delta,\\ 0\ , & x\in Q\setminus Q_\delta.\end{cases}$$

Из следствия из леммы 1 вытекает, что $\eta_i(x) \in W^1_{p'}(Q)$, $i = 1, 2$, $1/p + 1/p' = 1$. Подставляя функции $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ в интегральное тождество (7) для функций u_k и $-u_k$ соответственно, после преобразований, аналогичных проведенным выше (в случае $p \geqslant 2$), получим равенство для функций $u_k(x)$

$$(p-1)\int\limits_{Q_\delta}(\nabla u_k,\ A\nabla u_k)(|u_k|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)\,dx =$$
$$= -\int\limits_{Q_\delta}(B,\ \nabla|u_k|)(|u_k|+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx - \int\limits_{Q_\delta}(c+\lambda)|u_k|(|u_k|+\varepsilon)^{p-1}(\rho -$$
$$-\delta)\,dx + \frac{1}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta,\ A\nu_\delta)(|u_k|+\varepsilon)^p dS_\delta + \frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla\rho)(|u_k| +$$
$$+\varepsilon)^p dx + \int\limits_{Q_\delta} f_k(|u_k|+\varepsilon)^{p-1}\operatorname{sign} u_k(\rho-\delta)\,dx - \varepsilon^{p-1}\times$$
$$\times\Big[\int\limits_{Q_\delta}(\nabla\rho,\ A\nabla u_k)\,dx - \frac{\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla\rho)\,dx - \frac{\varepsilon}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta}(\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,dS_\delta +$$
$$+\int\limits_{Q_\delta}(B,\ \nabla u_k)(\rho-\delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta}(c+\lambda)\,u_k(\rho-\delta)\,dx - \int\limits_{Q_\delta} f_k(\rho-\delta)\,dx\Big]. \tag{15}$$

Из доказательства леммы 1 вытекает, что $u_k \to u$ в $W^2_p(Q_\delta)$ при $k\to\infty$. Следовательно, правая часть равенства (15) имеет предел при $k\to\infty$. Так как $u_k \to u$ для п. в. $x \in Q_\delta$ при $k\to\infty$ и $(u_k)_{x_i} \to u_{x_i}$ для п. в. $x\in Q_\delta$ при $k\to\infty$, $i = 1, \ldots, n$, то из леммы Фату получаем, что $\int\limits_{Q_\delta}(\nabla u,\ A\nabla u)\times$ $\times(|u|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)\,dx \leqslant \mathrm{const}$, не зависящей от ε. Поскольку функция $(\nabla u,\ A\nabla u)(|u|+\varepsilon)^{p-2}(\rho-\delta)$, монотонно возрастая, стремится п. в. в Q_δ к функции $(\nabla u,\ A\nabla u)\,|u|^{p-2}(\rho-\delta)$ при $\varepsilon\to+0$, то

$$\int\limits_{Q_\delta}(\nabla u,\ A\nabla u)\,|u|^{p-2}(\rho-\delta)\,dx \leqslant \mathrm{const}. \tag{16}$$

Так как функция $u(x)$ принадлежит $W^2_p(Q_\delta)$, то $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3′) п. в. в Q_δ. Умножим обе части уравнения (3′) на функцию $(u^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)$ и проинтегрируем по Q_δ (ε — произвольное положительное число), получим

$$-\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla u)(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta}(B,\ \nabla u)(u^+ +$$
$$+\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta}(c+\lambda)\,u\,(u^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx =$$
$$= \int\limits_{Q_\delta} f\,(u^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx. \tag{17}$$

Из (16) получаем, что $\Big[\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}(u^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\Big]_{x_j} \in L_1(Q_\delta)$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Так как из формулы Остроградского вытекает: $\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla u\,(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx = 0$, то $\int\limits_{Q_\delta}\operatorname{div}(A\nabla u)(u^+ +\varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)\,dx = -\int\limits_{Q_\delta}(\nabla[(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta)],\ A\nabla u)dx$. Подставляя это в равенство (17), получаем для $u(x)$ интегральное тождество, в которое в качестве пробной функции подставлена функция $\eta(x)=\begin{cases}(u^+ + \varepsilon)^{p-1}(\rho-\delta), & x\in Q_\delta,\\ 0, & x\in Q\setminus Q_\delta.\end{cases}$ Повторяя проведенные выше выкладки (в случае $p\geqslant 2$), получим равенство (12) для любого $p>1$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим для любого $\delta\in(0,\delta_0]$ функционал $J_\delta(u)=\int\limits_{Q_\delta}|\nabla u|^2|u|^{p-2}\times$ $\times(\rho-\delta)\,dx$, будем обозначать $J_0(u)=J(u)$. Введем обозначение $M(\delta)=$ $=\max\limits_{\delta\leqslant\delta'\leqslant\delta_0}\|u\|^p_{L_p(\partial Q_{\delta'})}$.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3′), коэффициенты и правая часть которого удовлетворяют условиям (4)—(6), а $\lambda\geqslant\lambda'$. Тогда существует такое число $\delta_1\in(0,\delta_0]$, что для любого $\delta\in(0,\delta_1]$ справедливы оценки*

$$M(\delta)\leqslant C_1[\|f\|^p_{L_p(Q)}+\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+J_\delta(u)+\lambda\int\limits_{Q_\delta}|u|^p(\rho-\delta)\,dx],\tag{18}$$

$$J_\delta(u)+\frac{\lambda}{\gamma\,(p-1)}\int\limits_{Q_\delta}|u|^p(\rho-\delta)\,dx\leqslant C_2[\|f\|^p_{L_p(Q)}+$$
$$+\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+\|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)}],\tag{19}$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят только от p, n и коэффициентов уравнения (3′).

Доказательство. Оценим отдельные слагаемые в равенстве (12):

$$\Big|\int\limits_{Q_\delta}f\,|u|^{p-1}\operatorname{sign}u\,(\rho-\delta)\,dx\Big|\leqslant\int\limits_{Q_\delta}|f|\,|u|^{p-1}(\rho-\delta)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{Q_{\delta_0}}|f|\,|u|^{p-1}(\rho-\delta)\,dx+\int\limits_{\delta}^{\delta_0}\tau\,\|u\|^{p-1}_{L_p(\partial Q_\tau)}\|f\|_{L_p(\partial Q_\tau)}\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant(\|u\|^{p-1}_{L_p(Q_{\delta_0})}+M^{\frac{p-1}{p}}(\delta))\|f\|_{L_p(Q)}.$$

Далее, из неравенства Юнга вытекает

$$\Big|\int\limits_{Q_\delta}(B,\nabla|u|)\,|u|^{p-1}(\rho-\delta)\,dx\Big|\leqslant\varepsilon_1J_\delta(u)+C_{\varepsilon_1}\int\limits_{Q_\delta}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)|u|^p(\rho-\delta)\,dx.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\int\limits_{Q_\delta}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)|u|^p(\rho-\delta)\,dx\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^n b_i^2\Big\|_{L_{q_1\theta}(Q)}\times$$
$$\times\Big\||u|^{\frac{p}{2}}(\rho-\delta)^{\frac{1+\mu}{2}}\Big\|^2_{L_{\frac{2q}{q-2}}(Q_\delta)}\Bigg(\int\limits_{Q_\delta}\frac{dx}{(\rho-\delta)^{\frac{\mu q q_1\theta}{2(n\theta_1-q)}}}\Bigg)^{\frac{2q_1\theta-q}{qq_1\theta}}.$$

Воспользуемся неравенством $\|v\|^2_{L_{\frac{2q}{q-2}}(Q_\delta)}\leqslant\varepsilon_2\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_\delta)}+C_{\varepsilon_2}\|v\|^2_{L_2(Q_\delta)}$ (см. [9, с. 74]), тогда

$$\Big\||u|^{\frac{p}{2}}(\rho-\delta)^{\frac{1+\mu}{2}}\Big\|^2_{L_{\frac{2q}{q-2}}(Q_\delta)}\leqslant\varepsilon_2J_\delta(u)+\varepsilon_2\Big(\frac{1+\mu}{2}\Big)^2\times$$
$$\times\int\limits_{Q_\delta}|u|^p\frac{|\nabla\rho|^2}{(\rho-\delta)^{1-\mu}}\,dx+C_{\varepsilon_2}\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}.$$

Возьмем произвольное число q, удовлетворяющее условию $n<q<2q_1\theta$, а число $\mu>0$ выберем так, чтобы $\mu=\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2q_1\theta-q}{2qq_1\theta}\right\}$. Тогда, очевидно, $\int\limits_{Q_\delta} \frac{dx}{(\rho-\delta)^{\frac{\mu q q_1\theta}{2q_1\theta-q}}} \leqslant C_1'$ и $\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 \int\limits_{Q_\delta} |u|^p \frac{|\nabla\rho|^2}{(\rho-\delta)^{1-\mu}}\, dx \leqslant$ $\leqslant C_2'M(\delta)+C_3'\|u\|^p_{L_p(Q_{\delta_0})}$. Таким образом, $\left|\int\limits_{Q_\delta} (B, \nabla|u|)\,|u|^{p-1}(\rho-\delta)\,dx\right| \leqslant$ $\leqslant [\varepsilon_1+\varepsilon_2 C_{\varepsilon_1}R]\,J_\delta(u)+\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}RM(\delta)+C'_{\varepsilon_2}\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}$, где $R=\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right\|_{L_{q_1\theta}(Q)}$. Аналогично $\left|\int\limits_{Q_\delta} c\,|u|^p(\rho-\delta)\,dx\right| \leqslant \varepsilon_3 K J_\delta(u)+\varepsilon_3 C_4' K M(\delta)+C'_{\varepsilon_3}\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}$, где $K=\|c\|_{L_{q_2\theta}(Q)}$. Наконец, $\left|\int\limits_{Q_\delta} \operatorname{div}(A\nabla\rho)\,|u|^p\,dx\right| \leqslant C_5'\|u\|^p_{L_p(Q'_{\delta_0})}+M(\delta)\times$ $\times\int\limits_0^{\delta_0'} \|\operatorname{div}(A\nu_\tau)\|_{L_\infty(\partial Q_\tau\varepsilon)}d\tau \leqslant C_5'\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+\varepsilon_4(\delta_0')M(\delta)$. Из равенства (12) и полученных выше оценок вытекает

$$\frac{\gamma_1}{p}\|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)} \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta, A\nu_\delta)\,|u|^p dS_\delta \leqslant [\varepsilon_1+\varepsilon_2 C_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 K+$$
$$+\gamma_2]\,J_\delta(u)+[\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 C_4' K+\varepsilon_4(\delta_0')]\,M(\delta)+C_6'\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+$$
$$+\lambda\int\limits_{Q_\delta} |u|^p(\rho-\delta)\,dx+[M^{\frac{p-1}{p}}(\delta)+\|u\|^{p-1}_{L_p(Q_{\delta_0})}]\,\|f\|_{\tilde{L}_p(Q)}. \tag{20}$$

С помощью неравенства Юнга получим

$$[M^{\frac{p-1}{p}}(\delta)+\|u\|^{p-1}_{L_p(Q_{\delta_0})}]\,\|f\|_{\tilde{L}_p(Q)} \leqslant \varepsilon_5 M(\delta)+C'_{\varepsilon_5}\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)}+C_7'\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}.$$

Из равенства (12) легко видеть, что в левой части неравенства (20) можно вместо $\|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)}$ поставить $M(\delta)$, т. е.

$$\frac{\gamma_1}{p}M(\delta) \leqslant [\varepsilon_1+\varepsilon_2 C_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 K+\gamma_2]\,J_\delta(u)+[\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 C_4' K+$$
$$+\varepsilon_4(\delta_0')+\varepsilon_5]\,M(\delta)+\lambda\int\limits_{Q_\delta} |u|^p(\rho-\delta)\,dx+C'_{\varepsilon_5}\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)}+C_8'\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}.$$

Вводя обозначение $\varepsilon'=\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 C_4' K+\varepsilon_4(\delta_0')+\varepsilon_5$, получим

$$\left(\frac{\gamma_1}{p}-\varepsilon'\right)M(\delta) \leqslant [\varepsilon_1+\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 K+\gamma_2]\,J_\delta(u)+$$
$$+\lambda\int\limits_{Q_\delta} |u|^p(\rho-\delta)\,dx+C'_{\varepsilon_5}\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)}+C_8'\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}. \tag{21}$$

Далее из (12) и (21) имеем

$$\gamma_1(p-1)\,J_\delta(u)+\lambda\int\limits_{Q_\delta} |u|^p(\rho-\delta)\,dx \leqslant [\varepsilon_1+\varepsilon_2 C_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 K]\,J_\delta(u)+$$
$$+\varepsilon' M(\delta)+C_1''\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+C_2''\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)}+\frac{\gamma_2}{p}\|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)} \leqslant$$
$$\leqslant\left[\varepsilon_1+\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 K+\varepsilon'(\varepsilon_1+\varepsilon_2 C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3 K+\gamma_2)\left(\frac{\gamma_1}{p}-\varepsilon'\right)^{-1}\right]J_\delta(u)+$$

$$+\frac{\varepsilon'}{\frac{\gamma_1}{p}-\varepsilon'}\lambda\int_{\overset{\circ}{Q}_\delta}|u|^p(\rho-\delta)\,dx+\frac{\gamma_2}{p}\|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)}+$$

$$+C''_3\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+C''_4\|f\|^p_{L_p(Q)}.$$

Выберем число δ'_0 настолько малым, чтобы $\varepsilon_4(\delta'_0)\leqslant\min\left\{\frac{\gamma_1}{12p},\right.$ $\left.\frac{\gamma_1^2(p-1)}{4p[8\gamma_2+\gamma_1(p-1)]}\right\}$, затем положим $\varepsilon_1=\min\left\{\frac{\gamma_1(p-1)}{12},\frac{\gamma_2}{3}\right\}$, $\varepsilon_2=$ $=\min\left\{\frac{\gamma_1(p-1)}{12C'_{\varepsilon_1}R},\frac{\gamma_2}{3C'_{\varepsilon_1}R},\frac{\gamma_1}{12pC'_{\varepsilon_1}R},\frac{\gamma_1^2(p-1)}{4pC'_{\varepsilon_1}R[8\gamma_2+\gamma_1(p-1)]}\right\}$, $\varepsilon_3=\min\left\{\frac{\gamma_1(p-1)}{12K},\frac{\gamma_2}{3K},\frac{\gamma_1}{12pK},\frac{\gamma_1^2(p-1)}{4pK[8\gamma_2+\gamma_1(p-1)]}\right\}$, $\varepsilon_5=$ $=\min\left\{\frac{\gamma_1}{12p},\frac{\gamma_1^2(p-1)}{4p[8\gamma_2+\gamma_1(p-1)]}\right\}$. Тогда $\varepsilon_1+\varepsilon_2C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3K+$ $+\varepsilon'(\varepsilon_1+\varepsilon_2C'_{\varepsilon_1}R+\varepsilon_3K+\gamma_2)\left(\frac{\gamma_1}{p}-\varepsilon'\right)^{-1}\leqslant\frac{\gamma_1(p-1)}{2}$ и $\frac{\varepsilon'}{\frac{\gamma_1}{p}-\varepsilon'}\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2}$, откуда немедленно получаются оценки (18) и (19).

Следствие. *Пусть $u(x)$ — обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3′) и пусть функция $|\nabla u|^2|u|^{p-2}\rho(x)\in L_1(Q)$, тогда $u\in L_p(Q)$ и $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon,n,p,A,B,c)$:*

$$\|u\|^p_{L_p(Q\setminus Q_\delta)}\leqslant\varepsilon\left[\|f\|^p_{L_p(Q)}+\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}+J(u)+\lambda\int_Q|u|^p\rho\,dx\right].\qquad(22)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\sup_{0<\delta\leqslant\delta_0}\|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)}\leqslant\mathrm{const}\,[J(u)+\|f\|^p_{L_p(Q)}+\|u\|^p_{L_p(Q_{\delta_1})}],\qquad(23)$$

где δ_1 — некоторое фиксированное число из интервала $(0,\delta_0)$.

Это утверждение доказано с помощью (18) и (19) в работе [7].

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу A_p, если $\sup\limits_{0<\delta\leqslant\delta_0}\|u\|_{L_p(\partial Q_\delta)}<\infty$.

Теорема 2. *Для того чтобы обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3′), коэффициенты и правая часть которого удовлетворяют условиям (4)—(6), принадлежало классу A_p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\int_Q|\nabla u|^2|u|^{p-2}r(x)\,dx<\infty$.*

Доказательство. Если $u\in A_p$, то $u\in L_p(Q)$. Поэтому в силу (19) $J_\delta(u)\leqslant\mathrm{const}$, а так как по теореме Леви $J(u)<\infty$. то из (2) получаем, что $\int_Q|\nabla u|^2|u|^{p-2}r(x)\,dx<\infty$. Доказательство достаточности вытекает из (2) и (23).

Следуя [7, 11], будем говорить, что функция $u(x)$ является обобщенным из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решением задачи Дирихле для уравнения (3), если $u(x)$ есть обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3) и удовлетворяет граничному условию

$$u|_{\partial Q}=\varphi\qquad(24)$$

в смысле L_p, т. е. выполнено (8) с функцией $\varphi(x)$.

Теорема 3. *Существует такая постоянная* $\lambda_0 > 0$, *что для любой* $\varphi(x) \in L_p(\partial Q)$ *и любой* $f(x) \in L_{p,\text{loc}}(Q) \cap \tilde{L}_p(Q)$ *задача* $\mathcal{L}u + \lambda u = f$, $u|_{\partial Q} = \varphi$, *при любом* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *имеет решение из* $W^1_{p,\text{loc}}(Q)$, *это решение единственно, и для него справедлива оценка*

$$J(u) + \|u\|^p_{L_p(Q)} + \max_{0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0} \|u\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)} \leqslant C[\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q)}], \tag{25}$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от* p, n *и коэффициентов уравнения.*

Доказательство. Докажем сначала справедливость при достаточно большом λ оценки (25), а следовательно, и единственность решения. В силу (8) $u \in A_p$. Поэтому по теореме 2 $J(u) < \infty$ и на основании теоремы Лебега $J_\delta(u) \to J(u)$ при $\delta \to +0$. Так как $\|u\|_{L_p(Q_\delta)} \to \|u\|_{L_p(Q)}$ и $\int\limits_{Q_\delta} |u|^p(\rho - \delta)\,dx \to \int\limits_{Q_\delta} |u|^p \rho\,dx$ при $\delta \to +0$, то в неравенстве (19) можно перейти к пределу при $\delta \to +0$. В результате получим неравенство

$$J(u) + \frac{\lambda}{\gamma_1(p-1)} \int\limits_Q |u|^p \rho\,dx \leqslant C_2[\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)} + \|u\|^p_{L_p(Q)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q)}].$$

Подставим сюда оценку (22) с достаточно малым $\varepsilon > 0$, тогда

$$J(u) + \frac{\lambda}{\gamma_1(p-1)} \int\limits_Q |u|^p \rho\,dx \leqslant C_2[(1+\varepsilon)\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)} + (1+\varepsilon)\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q)} + \varepsilon J(u) + \varepsilon\lambda \int\limits_Q |u|^p \rho\,dx.$$

Возьмем $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{1}{2C_2}, \dfrac{1}{2C_2\gamma_1(p-1)}\right\}$, тогда получим $J(u) + \lambda \int\limits_Q |u|^p \rho\,dx \leqslant \tilde{C}_2[\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q)} + \|u\|^p_{L_p(Q_\delta)}]$. Так как $\int\limits_Q |u|^p \rho\,dx \geqslant \int\limits_{Q_\delta} |u|^p \rho\,dx \geqslant \delta \int\limits_{Q_\delta} |u|^p\,dx$, то при условии $\lambda_0 \geqslant \max\{\lambda', 2\tilde{C}_2/\delta\}$ получаем неравенство

$$J(u) + \int\limits_Q |u|^p \rho\,dx \leqslant \tilde{C}[\|f\|^p_{\tilde{L}_p(Q)} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q)}],$$

из которого с помощью неравенства (23) вытекает оценка (25).

Докажем существование решения. Возьмем произвольные функции $f(x) \in L_{p,\text{loc}}(Q) \cap \tilde{L}_p(Q)$ и $\varphi(x) \in L_p(\partial Q)$. Выберем последовательность $\{\varphi_m\}$, $\varphi_m \in C^1(\partial Q)$, $m = 1, 2, \ldots$, $\varphi_m(x) \to \varphi(x)$ в $L_p(\partial Q)$, и последовательность $\{f_m\}$,

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q_{1/m}, \\ 0, & x \in Q \setminus Q_{1/m}. \end{cases}$$

Выберем также произвольное число $\lambda \geqslant \lambda_0$ и произвольную финитную в Q функцию $\eta(x) \in W^1_{p'}(Q)$, $1/p + 1/p' = 1$. Обозначим через $u_m(x)$ решение из $W^1_p(Q)$ задачи Дирихле $\mathcal{L}u_m + \lambda u_m = f_m$, $u_m|_{\partial Q} = \varphi_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Из оценки (25) получаем, что существует функция $u(x)$, для которой $\|u_m - u\|_{L_p(Q)} \to 0$ при $m \to \infty$. Так как

$$\|u(x_\delta(x)) - \varphi(x)\|_{L_p(\partial Q)} \leqslant \|u(x_\delta(x)) - u_m(x_\delta(x))\|_{L_p(\partial Q)} + \|u_m(x_\delta(x)) - \varphi_m(x)\|_{L_p(\partial Q)} + \|\varphi_m - \varphi\|_{L_p(\partial Q)},$$

то функция $u(x)$ удовлетворяет граничному условию (в смысле (8)) с функцией $\varphi(x)$. Докажем, что $u(x)$ — обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3′). Пусть сначала $p \geqslant 2$. Тогда из оценки (25) вытекает, что последовательность $\{u_m(x)\}$ фундаментальна в $W^1_2(Q_\delta)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0)$. По лемме 1 для $u(x)$ — решения из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения (3′) — имеем $u(x) \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(Q)$, где $q = \min\{p, q_2\theta\}$. Как нетрудно видеть, по теореме вложения $u(x) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $1 < p < 2$. Возьмем произвольное число δ из интервала $(0, \delta_0)$ и произвольное число q, большее n. Найдется такой номер $N = N(\delta)$, что $f_m(x) - f_l(x) = 0$ для всех $m, l \geqslant N$ почти всюду в $Q_{\delta/4}$. Выберем натуральное число k так, чтобы $k \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln \frac{q-1}{q-2}}$.

Положим $\delta_i = \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{i}{k}\right)$, $i = 1, \ldots, k$. Из (25) имеем $\| |u_m - u_l|^{p/2} \|_{W^1_2(Q_{\delta/2})} \to 0$ при $m, l \to \infty$. Следовательно, по теореме вложения $\| |u_m - u_l|^{p/2} \|_{L_{\frac{2(q-1)}{q-2}}(\partial Q_{\delta'})} \to 0$ при $m, l \to \infty$ для любого $\delta' \in \left(\dfrac{\delta}{2}, \delta_0\right)$, т. е. $\|u_m - u_l\|_{L_{p_1}(\partial Q_{\delta'})} \to 0$, $m, l \to \infty$, где $p_1 = p\dfrac{q-1}{q-2}$. Аналогично из (25) вытекает, что $\| |u_m - u_l|^{p_1/2} \|_{W^1_2(Q_{\delta_1})} \to 0$ при $m, l \to \infty$. Повторяя рассуждения, получим, что $\| |u_m - u_l|^{p_i/2} \|_{W^1_2(Q_{\delta_i})} \to 0$ при $m, l \to \infty$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $\|u_m - u_l\|_{W^1_2(Q_\delta)} \to 0$ при $m, l \to \infty$, т. е., переходя в интегральном тождестве $\int\limits_Q (\nabla\eta, A\nabla u_m)\,dx + \int\limits_Q (B, \nabla u_m)\eta\,dx + \int\limits_Q (c + \lambda) u_m \eta\,dx = \int\limits_Q f_m \eta\,dx$ к пределу при $m \to \infty$, получим, что $u(x)$ — обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3′).

Теорема 4. *Если обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3), коэффициенты и правая часть которого удовлетворяют условиям (4)—(6), принадлежит классу A_p, то оно имеет предел в L_p на границе ∂Q.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ — обобщенное из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решение уравнения (3), принадлежащее классу A_p. Обозначим через $u_0(x)$ решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ задачи Дирихле $\mathcal{L}u_0 + \lambda u_0 = f(x) + \lambda u$, $u_0|_{\partial Q} = 0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$, оно существует и единственно в силу теоремы 3 ($\lambda u \in L_p(Q) \cap \tilde{L}_p(Q)$). Тогда разность $u(x) - u_0(x)$ является решением из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения

$$\mathcal{L}v + \lambda v = 0, \qquad (3_0')$$

принадлежащим классу A_p. Таким образом, достаточно доказать утверждение теоремы для решения уравнения $(3_0')$.

1. Докажем сначала теорему 4 в случае $p = 2$ (для уравнения с гладкими коэффициентами это сделано в работе [6]).

Лемма 4. *Если решение из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $(3_0')$ принадлежит классу A_2, то существует такая функция $\varphi(x) \in L_2(\partial Q)$, что для функции $G(\delta) = \int\limits_{\partial Q} (\nu, A\nu)\, u(x_\delta(x))\, g(x)\, dS$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, где $g(x)$ — произвольная функция из $L_2(\partial Q)$, $\exists \lim\limits_{\delta \to +0} G(\delta) = \int\limits_{\partial Q} (\nu, A\nu)\, \varphi(x)\, g(x)\, dS$.*

Доказательство. Так как $u \in A_2$, то множество $\{u(x_\delta(x)),\ 0 < \delta \leqslant \delta_0\}$ ограничено в $L_2(\partial Q)$. Следовательно, оно слабо компактно в $L_2(\partial Q)$, т. е. существуют функция $\varphi(x) \in L_2(\partial Q)$ и последовательность $\{\delta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$, такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\partial Q} (u(x_{\delta_k}(x)) - \varphi(x)) g(x) dS = 0$ при любой $g(x) \in L_2(\partial Q)$. Достаточно доказать утверждение леммы для множества функций $g_1(x)$, заданных на ∂Q, для которых существует продолжение в область Q функцией из $W_2^1(Q)$, $g|_{\partial Q} = g_1$, $g \in W_2^1(Q)$. Это множество всюду плотно в $L_2(\partial Q)$. Возьмем такую функцию $g_1(x)$, произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$ и подставим в интегральное тождество функцию $\eta(x) = \begin{cases} g(\rho - \delta), & x \in Q_\delta, \\ 0, & x \in Q \setminus Q_\delta, \end{cases}$ получим равенство $\int\limits_{Q_\delta} (\nabla g, A\nabla u)(\rho - \delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u)\,g dx + \int\limits_{Q_\delta} (B, \nabla u)\,g(\rho - \delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (c + \lambda)\,ug(\rho - \delta)\,dx = 0.$ Так как $\int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u)\,g dx = -\int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta, A\nu_\delta)\,ug dS_\delta - \int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla g)\,u dx - \int\limits_{Q_\delta} \operatorname{div}(A\nabla\rho)\,ug dx$, то получаем $\int\limits_{Q_\delta} (\nabla g, A\nabla u)(\rho - \delta)\,dx - \int\limits_{Q_\delta} \operatorname{div}(A\nabla\rho) \times ug dx - \int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla g)\,u dx + \int\limits_{Q_\delta} (B, \nabla u)\,g(\rho - \delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (c + \lambda)\,ug(\rho - \delta)\,dx = \int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta, A\nu_\delta)\,ug dS_\delta$. Поскольку $|(\nabla g, A\nabla u)(\rho - \delta)| \leqslant \frac{n\gamma_2}{2} |\nabla u|^2 (\rho - \delta) + \frac{n\gamma_2}{2} |\nabla g|^2 (\rho - \delta)$, $|(\nabla\rho, A\nabla g)\,u| \leqslant \frac{n\gamma_2}{2} |u|^2 + \frac{n\gamma_2}{2} |\nabla g|^2$, $|(B, \nabla u) \times g(\rho - \delta)| \leqslant C_1 |\nabla u|^2 (\rho - \delta) + C_2 |g|^{2q/(q-2)} + C_3 \left| \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \right|^{q/2}$, $q > n$, $|cug(\rho - \delta)| \leqslant C_4 |c|^{q/2} + C_5 |g|^{2q/(q-2)} + C_6 |u(\rho - \delta)|^{2q/(q-2)} \leqslant C_4 |c|^{q/2} + C_5 |g|^{2q/(q-2)} + C_6' |\nabla u|^2 (\rho - \delta) + C_6'' |u|^2$, $q > n$, где постоянные не зависят от δ, то по теореме Лебега левая часть последнего равенства имеет предел при $\delta \to +0$, следовательно, $\lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta, A\nu_\delta)\,ug dS_\delta = \lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial Q} (\nu, A\nu)\,u(x_\delta(x)) \times g_1(x) \frac{dS_\delta}{dS} dS = \int\limits_{\partial Q} (\nu, A\nu)\,\varphi g_1 dS.$

Лемма 5. *Если Q — звездная область, а $u(x)$ — решение из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $(3_0')$, принадлежащее классу A_2, то* $\exists \lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_{\partial Q} (\nu, A\nu) u^2(x_\delta(x)) dS = \int\limits_{\partial Q} (\nu, A\nu)\,\varphi^2(x)\,dS.$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\alpha \in (1 - \delta_0, 1)$ и подставим в интегральное тождество функцию $\eta(x) = \begin{cases} u(\alpha x)(\rho - \delta), & x \in Q_\delta, \\ 0, & x \in Q \setminus Q_\delta, \end{cases}$ получим

$$\int\limits_{Q_\delta} (\nabla u(\alpha x), A\nabla u(x))(\rho - \delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u(x))\,u(\alpha x)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (B, \nabla u(x))\,u(\alpha x)(\rho - \delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (c + \lambda)\,u(x)\,u(\alpha x)(\rho - \delta)\,dx = 0. \tag{26}$$

Поскольку $\int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u(x))\,u(\alpha x)\,dx = -\int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta, A\nu_\delta)\,u(x)\,u(\alpha x)\,dS_\delta - \int\limits_{Q_\delta} \operatorname{div}(A\nabla\rho)\,u(x)\,u(\alpha x)\,dx - \int\limits_{Q_\delta} (\nabla\rho, A\nabla u(\alpha x))\,u(x)\,dx$, то, подставляя в равенство (26) и переходя в нем к пределу при $\delta \to +0$, получим

$$\int_Q (\nabla u(\alpha x),\ A\nabla u(x))\rho dx - \int_Q \operatorname{div}(A\nabla\rho)\, u(x)\, u(\alpha x)\, dx -$$

$$-\int_Q (\nabla\rho,\ A\nabla u(\alpha x))\, u(x)\, dx + \int_Q (B,\ \nabla u(x))\, u(\alpha x)\rho dx +$$

$$+\int_Q (c+\lambda)\, u(x)\, u(\alpha x)\rho dx = \int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\,\varphi(x)\, u(\alpha x)\, dS. \qquad (27)$$

Так как

$$\int_Q (\nabla\rho,\ A\nabla u(\alpha x))\, u(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_Q (\nabla\rho,\ A\nabla u^2(\alpha x))\, dx +$$

$$+\int_Q (\nabla\rho,\ A\nabla u(\alpha x))\,(u(x)-u(\alpha x))\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\, u^2(\alpha x)\, dS -$$

$$-\frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div}(A\nabla\rho)\, u^2(\alpha x)\, dx + \int_Q (\nabla\rho,\ A\nabla u(\alpha x))\,(u(x)-u(\alpha x))\, dx$$

и, как доказано в работе [6], $\int_Q |\nabla u(\alpha x)|\, |u(x)-u(\alpha x)|\, dx \to 0$ при $\alpha\to 1-0$, то, переходя в (27) к пределу при $\alpha\to 1-0$, получим равенство

$$\int_Q (\nabla u,\ A\nabla u)\rho dx - \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div}(A\nabla\rho)\, u^2 dx +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 1-0}\int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\, u^2(\alpha x)\, dS + \int_Q (B,\ \nabla u)\, u\rho dx +$$

$$+\int_Q (c+\lambda)\, u^2\rho dx = \int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\,\varphi^2 dS. \qquad (28)$$

При подстановке в интегральное тождество функции $\eta(x)=\begin{cases} u(\rho-\delta), & x\in Q_\delta,\\ 0\ , & x\in Q\setminus Q_\delta\end{cases}$ аналогично получим равенство

$$\int_Q (\nabla u,\ A\nabla u)\rho dx - \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div}(A\nabla\rho)\, u^2 dx -$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{\delta\to +0}\int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\, u^2(x_\delta(x))\, dS + \int_Q (B,\ \nabla u)\, u\rho dx +$$

$$+\int_Q (c+\lambda)\, u^2\rho dx = 0. \qquad (29)$$

Вычитая (29) из (28), получим, что

$$\frac{1}{2}\lim_{\delta\to +0}\int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\, u^2(x_\delta(x))\, dS +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 1-0}\int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\, u^2(\alpha x)\, dS = \int_{\partial Q} (\nu,\ A\nu)\,\varphi^2 dS,$$

откуда и вытекает справедливость утверждения леммы.

Из лемм 4 и 5, учитывая (4), получаем утверждение теоремы 4 в случае звездной области. Используя рассуждения работы [6] (см. доказательство теорем 1 и 2, [6]), получим утверждение теоремы 4 в случае $p=2$.

2. Пусть $p>2$. Как показано в п. 1, существует функция $\varphi(x)\in L_2(\partial Q)$, для которой $\lim\limits_{\delta\to+0}\|u(x_\delta(x))-\varphi(x)\|_{L_2(\partial Q)}=0$. Так как из ограни-

ченности множества $\{u(x_\delta(x)),\ 0<\delta\leqslant\delta_0\}$ следует его слабая компактность, а из слабой сходимости в $L_p(\partial Q)$ вытекает слабая сходимость в $L_2(\partial Q)$, то $\varphi(x)\in L_p(\partial Q)$. Далее, для любого числа q из интервала $(2,\ p)$

$$\|u(x_\delta(x))-\varphi(x)\|^q_{L_q(\partial Q)}\leqslant\|u(x_\delta(x))-$$

$$-\varphi(x)\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}}_{L_2(\partial Q)}\|u(x_\delta(x))-\varphi(x)\|^{\frac{p(q-2)}{p-2}}_{L_p(\partial Q)}.$$

Поэтому для любого $q\in(1,\ p)$ $\|u(x_\delta(x))-\varphi(x)\|_{L_q(\partial Q)}\to 0$ при $\delta\to+0$.

Лемма 6. *Пусть функция $u(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $(3_0')$ — принадлежит классу A_p и существует такая функция $\varphi(x)\in L_p(\partial Q)$, что для любого $q\in(1,\ p)$ $\|u(x_\delta(x))-\varphi(x)\|_{L_q(\partial Q)}\to 0$ при $\delta\to+0$. Тогда $\|u(x_\delta(x))-\varphi(x)\|_{L_p(\partial Q)}\to 0$ при $\delta\to+0$.*

Лемма 6 легко доказывается по схеме доказательства леммы 5 работы [7]. Таким образом, получаем утверждение теоремы 4 в случае $p>2$.

3. Пусть теперь $p\in(1,\ 2)$. Рассмотрим функцию $u^+(x)=\max\{u(x),\ 0\}$. Обозначим через $v_\delta(x)$, $x\in Q_\delta$, $\delta\in(0,\ \delta_0]$, решение из $W^1_2(Q_\delta)$ задачи Дирихле для уравнения $(3_0')$ с граничным условием $v_\delta|_{\partial Q_\delta}=u^+|_{\partial Q_\delta}$.

Лемма 7. *Существует такое число $\lambda_1>0$, что если функция $w(x)$ является решением из $W^1_2(Q_\delta)$ уравнения $(3_0')$ с $\lambda=\lambda_1$ и $w(x)|_{\partial Q_\delta}\leqslant A$, $A\geqslant 0$, то $w(x)\leqslant A$ для п. в. $x\in Q_\delta$.*

Доказательство. Пусть от противного, $\operatorname{vrai}\sup\limits_{x\in Q_\delta} w(x)=M>A$. Так как $w(x)\in W^1_2(Q_\delta)$ и $\partial Q_\delta\in C^2$, то существует функция $U(x)\in W^1_2(K_r)$, где K_r — некоторый шар радиуса r, $\overline{Q_\delta}\subset\subset K_r$, для которой $U(x)=w(x)$ при $x\in Q_\delta$. Построим функцию $u(x)$:

$$u(x)=\begin{cases}U(x),\ x\in Q_\delta,\\[4pt] U(x),\ x\in K_r\setminus Q_\delta,\ U(x)<A+\dfrac{M-A}{3},\\[8pt] A+\dfrac{M-A}{3},\ x\in K_r\setminus Q_\delta,\ U(x)\geqslant A+\dfrac{M-A}{3}.\end{cases}$$

Очевидно, что $u(x)\in W^1_2(K_r)$, $u(x)=w(x)$ при $x\in Q_\delta$. Обозначим $Q_{\delta,k}=\{x\in Q_\delta: u(x)>k\}$. Тогда для любого $k\in\left(A+\dfrac{M-A}{2},\ M\right)$ имеем

$$\int\limits_{Q_{\delta,k}}(u-k)^2dx\leqslant C_1\frac{r^{2n}}{\operatorname{mes}^2(K_r\setminus Q_\delta)}\operatorname{mes}^{\frac{2}{n}}Q_{\delta,k}\int\limits_{Q_{\delta,k}}|\nabla u|^2dx \tag{30}$$

(см. [9, с. 87]). Подставляя в интегральное тождество для u (в области Q_δ) функцию $\eta(x)=\max\{u-k,\ 0\}$, $k\in\left(A+\dfrac{M-A}{2},\ M\right)$, получим

$$\int\limits_{Q_{\delta,k}}(\nabla(u-k),\ A\nabla u)\,dx+\int\limits_{Q_{\delta,k}}(B,\ \nabla u)(u-k)\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_{\delta,k}}(c+\lambda)\,u(u-k)\,dx=0.$$

Введем обозначения $Q^+_{\delta,k}=\{x\in Q_{\delta,k}: c(x)+\lambda\geqslant 0\}$, $Q^-_{\delta,k}=Q_{\delta,k}\setminus Q^+_{\delta,k}$. Тогда

$$\gamma_1\int\limits_{Q_{\delta,k}}|\nabla u|^2dx+\int\limits_{Q^+_{\delta,k}}(c+\lambda)\,u(u-k)\,dx-$$

$$-\int_{Q^-_{\delta,k}} (c+\lambda)\, ukdx + \lambda \int_{Q^-_{\delta,k}} u^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int_{Q_{\delta,k}} |\nabla u|^2dx + C_{\varepsilon_1}\int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2dx + \int_{Q^-_{\delta,k}} |c|\, u^2dx \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int_{Q_{\delta,k}} |\nabla u|^2dx + C_{\varepsilon_1}\int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2dx + C_{\varepsilon_2}\int_{Q^-_{\delta,k}} u^2dx.$$

Выберем $\varepsilon_1=\gamma_1/4$, $\varepsilon_2=\gamma_1/4$ и $\lambda_0=C_{\varepsilon_2}$. Тогда для любого $\lambda\geqslant\lambda_0$ $\int_{Q_{\delta,k}} |\nabla u|^2dx\leqslant C_2 \int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2\,dx$. Учитывая (30), получаем

$$\int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2dx \leqslant \frac{C_1C_2r^{2n}}{\operatorname{mes}^2(K_r\setminus Q_\delta)} \operatorname{mes}^{\frac{2}{n}} Q_{\delta,k} \int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2dx.$$

Выберем $\lambda_1\geqslant\lambda_0$ так, чтобы $\operatorname{mes}\{x\in Q: c(x)+\lambda_1=0\}=0$. Тогда, как нетрудно показать, $\operatorname{mes}\{x\in Q_\delta: u(x)=M\}=0$ и $\operatorname{mes} Q_{\delta,k}\to 0$ при $k\to M$. Следовательно, существует такое число $k\in\left(A+\frac{M-A}{2},\ M\right)$, что $\operatorname{mes} Q_{\delta,k}>0$ и $\operatorname{mes}^{\frac{2}{n}} Q_{\delta,k}\leqslant \frac{\operatorname{mes}^2(K_r\setminus Q_\delta)}{2C_1C_2r^{2n}}$, откуда $\int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{Q_{\delta,k}} (u-k)^2dx$, где $u-k>0$ при $x\in Q_{\delta,k}$ и $\operatorname{mes} Q_{\delta,k}>0$, т. е. получили противоречие. Тем самым лемма 7 доказана.

Из леммы 7 вытекает, что $v_\delta(x)\geqslant u^+(x)$ при $x\in Q_\delta$ и для п. в. $x\in Q$ функция $v_\delta(x)$ (переменного $\delta\in(0,|x|)$) монотонно не убывает при $\delta\to+0$. Из теоремы 3 имеем оценку

$$J_\delta(v_\delta) + \|v_\delta\|^p_{L_p(Q_\delta)} + \max_{\delta\leqslant\rho\leqslant\delta_0} \|v_\delta\|^p_{L_p(\partial Q_\rho)} \leqslant C_1\|v_\delta\|^p_{L_p(\partial Q_\delta)}\leqslant C_2$$

(так как $\|v_\delta\|_{L_p(\partial Q_\delta)}=\|u^+\|_{L_p(\partial Q_\delta)}\leqslant\text{const}$). В силу теоремы Леви функция, равная $v_\delta(x)$ при $x\in Q_\delta$ и нулю при $x\in Q\setminus Q_\delta$, имеет предел при $\delta\to+0$ п. в. в Q и в $L_p(Q)$. Обозначим его через $v(x)$, $\|v_\delta-v\|_{L_p(Q_\delta)}\to 0$ при $\delta\to+0$.

Возьмем произвольное число $\delta'\in(0,\ \delta_0]$ и будем рассматривать $\delta\in\left(0,\ \frac{\delta'}{2}\right)$. Пусть k — некоторое натуральное число. Выберем $\delta_i=\delta'/2+i\delta'/2k$, $i=1,\ \ldots,\ k$ $(\delta_k=\delta')$. Пусть q — некоторое фиксированное число, $q>n$. Выберем $k\geqslant\frac{\ln 2}{\ln\frac{q-1}{q-2}}$. Поскольку $\max_{\delta\leqslant\rho\leqslant\delta_0}\|v_\delta\|^p_{L_p(\partial Q_\rho)}\leqslant C_2$, то для любого $\delta\in(0,\ \delta'/2)$

$$J_{\frac{\delta'}{2}}(v_\delta) + \max_{\frac{\delta'}{2}\leqslant\tau\leqslant\delta_0}\|v_\delta\|^p_{L_p(\partial Q_\tau)} + \|v_\delta\|^p_{L_p(Q_\delta)} \leqslant C_1\|v_\delta\|^p_{L_p(\partial Q_{\frac{\delta'}{2}})}\leqslant C_1C_2.$$

Следовательно, $\|v_\delta^{p/2}\|_{W^1_2(Q_{\delta_1'})}\leqslant\text{const}$, где $\delta_1'=\frac{\delta'}{2}+\frac{1}{3k}\,\frac{\delta'}{2}$. Отсюда по теореме вложения $\|v_\delta^{p/2}\|_{L_{\frac{2(q-1)}{q-2}}(\partial Q_{\delta_1''})}\leqslant\text{const}$, $\delta_1''=\frac{\delta'}{2}+\frac{1}{2k}\,\frac{\delta'}{2}$, т. е. $\| v_\delta \|_{L_{p_1}(\partial Q_{\delta_1''})} \leqslant \mathrm{const}$, $p_1 = p\dfrac{q-1}{q-2}$. Аналогично получаем $\|v_\delta^{p_1/2}\|_{W_2^1(Q_{\delta_1})} \leqslant \mathrm{const}$. Повторяя рассуждения, получим, что $\|v_\delta^{p_i/2}\|_{W_2^1(Q_{\delta_i})} \leqslant \leqslant \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $\|v_\delta\|_{W_2^1(Q_{\delta'})} \leqslant \mathrm{const}$. Тем самым показали, что $v(x) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$. Легко видеть, что $v(x)$ является обобщенным из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ решением уравнения $(3_0')$.

Покажем, что для любого $q \in (1, p)$ $\|u^+ - v\|_{L_q(\partial Q_\delta)} \to 0$ при $\delta \to +0$. По определению $v_\delta(x)$

$$\int\limits_{Q_\delta} (\nabla\eta,\ A\nabla v_\delta)\,dx + \int\limits_{Q_\delta} (B,\ \nabla v_\delta)\,\eta dx + \int\limits_{Q_\delta} (c+\lambda)\,v_\delta \eta dx = 0.$$

Подставим в это равенство функцию $\eta(x) = \begin{cases} \rho(x) - \delta, & x \in Q_\delta, \\ 0, & x \in Q \setminus Q_\delta. \end{cases}$ Так как $v_\delta|_{\partial Q_\delta} = u^+|_{\partial Q_\delta}$, то

$$\int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,u^+ dS_\delta = \int\limits_{Q_\delta} \mathrm{div}\,(A\nu_\delta)\,v_\delta dx +$$
$$+ \int\limits_{Q} [(B,\ \nabla v_\delta) + (c+\lambda)\,v_\delta]\,(\rho - \delta)\,dx.$$

Аналогично для $v(x)$ имеем

$$\int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,v dS_\delta = \int\limits_{Q_\delta} \mathrm{div}\,(A\nu_\delta)\,v dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_\delta} [(B,\ \nabla v) + (c+\lambda)\,v]\,(\rho - \delta)\,dx.$$

Следовательно, в силу неравенств $v \geqslant v_\delta \geqslant u^+$

$$\|v - u^+\|_{L_1(\partial Q_\delta)} \leqslant \frac{1}{\gamma_1} \int\limits_{\partial Q_\delta} (\nu_\delta,\ A\nu_\delta)\,(v - u^+)\,dS_\delta =$$
$$= \frac{1}{\gamma_1} \int\limits_{Q_\delta} \mathrm{div}\,(A\nu_\delta)\,(v - v_\delta)\,dx +$$
$$+ \frac{1}{\gamma_1} \int\limits_{Q_\delta} (B,\ \nabla(v - v_\delta))\,(\rho - \delta)\,dx + \frac{1}{\gamma_1} \int\limits_{Q_\delta} (c+\lambda)\,(v - v_\delta)(\rho - \delta)\,dx.$$

Так как $\int\limits_{Q_\delta} \mathrm{div}\,(A\nu_\delta)\,(v - v_\delta)\,dx \leqslant \|v - v_\delta\|_{L_p(Q_\delta)} \|\mathrm{div}\,(A\nu_\delta)\|_{L_{p'}(Q_\delta)}$, $\int\limits_{Q_\delta} (B,\ \nabla(v - v_\delta))\,(\rho - \delta)\,dx \leqslant C_1' \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{L_{\frac{q}{2}}(Q)} J_\delta^{\frac{1}{2}}(v - v_\delta) \|(v - v_\delta)^{\frac{p}{2}} (\rho - \delta)^{\frac{p}{2}}\|_{L_{\frac{2q}{q-2}}(Q_\delta)}^{\frac{2}{p}\left(1 - \frac{p}{2}\right)} \leqslant C_2' J_\delta(v - v_\delta)\,[J_\delta(v - v_\delta) + M_{v - v_\delta}(\delta)]^{\frac{n}{q}\left(\frac{2}{p} - 1\right)} \|v - v_\delta\|_{L_p(Q_\delta)}^{\left(1 - \frac{n}{q}\right)\left(1 - \frac{p}{2}\right)}$, $\int\limits_{Q_\delta} (|c| + \lambda)\,(v - v_\delta)\,(\rho - \delta)\,dx \leqslant C_3' \|(v - v_\delta)^{\frac{p}{2}} (\rho - \delta)^{\frac{p}{2}}\|_{L_{\frac{2q}{q-2}}(Q_\delta)}^{\frac{2}{p}}$, то получим $\|v - u^+\|_{L_1(\partial Q_\delta)} \leqslant C_4' \|v - v_\delta\|_{L_p(Q_\delta)}^{\alpha} \to 0$ при $\delta \to +0$ с некоторым $\alpha = \alpha(n, p, q)$. Поэтому для любого $q \in (1, p)$ $\|v -$

$- u^+\|^q_{L_q(\partial Q_\delta)} \leqslant \|v - u^+\|^{\frac{p-q}{p-1}}_{L_1(\partial Q_\delta)} \|v - u^+\|^{\frac{p(q-1)}{p-1}}_{L_p(\partial Q_\delta)}$, т. е. $\|v - u^+\|_{L_q(\partial Q_\delta)} \to 0$ при $\delta \to +0$, $q \in (1, p)$. Отсюда вытекает, что утверждение теоремы 4 достаточно доказать для неотрицательных решений уравнения $(3_0')$.

Итак, пусть $u(x) \geqslant 0$ в Q. Возьмем произвольное число $N > 0$ и рассмотрим функцию $u_N(x) = \begin{cases} u(x), & u < N, \\ N, & u \geqslant N. \end{cases}$ Обозначим через $w_\delta(x)$ решение из $W_2^1(Q_\delta)$ задачи Дирихле для уравнения $(3_0')$ с граничным условием $w_\delta|_{\partial Q_\delta} = u_N|_{\partial Q_\delta}$. Из леммы 7 вытекает, что $w_\delta(x) \leqslant u_N(x)$ п. в. в Q_δ и функция $w_\delta(x)$ (переменного $\delta \in (0, |x|)$) монотонно не возрастает при $\delta \to +0$. Аналогично изложенному получаем, что $w_\delta(x) \to w(x)$ при $\delta \to +0$ п. в. в Q и в $L_p(Q)$, причем $w(x)$ является решением из $W^1_{p, \mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $(3_0')$. Так как $w(x) \leqslant N$ п. в. в Q, то существует функция $\varphi^N(x) \in L_p(\partial Q)$, для которой $\|w(x_\delta(x)) - \varphi^N(x)\|_{L_p(\partial Q)} \to 0$ при $\delta \to +0$ и для любого $q \in (1, p)$ $\|u_N(x_\delta(x)) - \varphi^N(x)\|_{L_q(\partial Q)} \to 0$ при $\delta \to +0$.

Пусть $N_1 < N_2$. Тогда существует такая последовательность $\{\delta_k\}$, $\delta_k \to +0$ при $k \to \infty$, что $u_{N_1}(x_{\delta_k}(x)) \to \varphi^{N_1}(x)$ при $k \to \infty$ для п. в. $x \in \partial Q$ и $u_{N_2}(x_{\delta_k}(x)) \to \varphi^{N_2}(x)$ при $k \to \infty$ для п. в. $x \in \partial Q$. Следовательно, для п. в. точек $x \in \partial Q$, для которых $\varphi^{N_2} < N_1$, имеем $\varphi^{N_1}(x) = \varphi^{N_2}(x)$, т. е. существует функция $\varphi(x) \geqslant 0$, $x \in \partial Q$, такая, что для любого $N > 0$ $\varphi^N(x) = \varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi < N, \\ N, & \varphi \geqslant N. \end{cases}$ Так как для любого $N > 0$

$$\|\varphi_N\|_{L_p(\partial Q)} \leqslant \sup_{0 < \delta \leqslant \delta_0} \|u_N(x_\delta(x))\|_{L_p(\partial Q)} \leqslant \sup_{0 < \delta \leqslant \delta_0} \|u(x_\delta(x))\|_{L_q(\partial Q)} \leqslant \mathrm{const},$$

то $\varphi(x) \in L_p(\partial Q)$. Итак, для любого $q \in (1, p)$ и любого $N > 0$

$$\|u_N(x_\delta(x)) - \varphi_N(x)\|_{L_q(\partial Q)} \to 0 \text{ при } \delta \to +0. \tag{31}$$

Для произвольного фиксированного $q \in (1, p)$ имеем

$$\|u(x_\delta(x)) - \varphi(x)\|^q_{L_q(\partial Q)} \leqslant \int_{\Gamma_N} |u(x_\delta(x)) - \varphi(x)|^q dS +$$

$$+ \int_{\partial Q \setminus \Gamma_N} |u_N(x_\delta(x)) - \varphi_N(x)|^q dS + \int_{\Gamma_N^\delta} |u(x_\delta(x)) - \varphi_N(x)|^q dS,$$

где $\Gamma_N = \{x \in \partial Q : \varphi > N\}$, $\Gamma_N^\delta = \{x \in \partial Q : u(x_\delta(x)) > N\}$. Так как

$$\int_{\Gamma_N} |u(x_\delta(x)) - \varphi(x)|^q dS \leqslant \|u(x_\delta(x)) - \varphi(x)\|^{\frac{q}{p}}_{L_p(\partial Q)} (\mathrm{mes}\, \Gamma_N)^{\frac{p}{p-q}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, (\mathrm{mes}\, \Gamma_N)^{\frac{p}{p-q}} \to 0 \text{ при } N \to \infty$$

и

$$\int_{\Gamma_N^\delta} |u(x_\delta(x)) - \varphi_N(x)|^q dS \leqslant \int_{\Gamma_N^\delta} u^q(x_\delta(x))\, dS \leqslant \frac{1}{N^{p-q}} \int_{\Gamma_N^\delta} u^p(x_\delta(x))\, dS \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \frac{1}{N^{p-q}} \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_0 \geqslant 0$, что для всех $N > N_0$ и всех $\delta \in (0, \delta_0]$ $\int_{\Gamma_N} |u(x_\delta(x)) - \varphi(x)|^q dS + \int_{\Gamma_N^\delta} |u(x_\delta(x)) - \varphi_N(x)|^q dS < \varepsilon/2$.

Зафиксируем некоторое $N > N_0$ и (в силу (31)) выберем $\delta' \in (0, \delta_0)$ так, что для всех $\delta \in (0, \delta')$ $\int\limits_{\partial Q} |u_N(x_\delta(x)) - \varphi_N(x)|^q dS < \varepsilon/2$. Тогда для всех $\delta \in (0, \delta')$ имеем $\|u(x_\delta(x)) - \varphi(x)\|^q_{L_q(\partial Q)} < \varepsilon$, т. е. $\|u(x_\delta(x)) - \varphi(x)\|_{L_q(\partial Q)} \to 0$ при $\delta \to +0$.

Утверждение теоремы 4 в случае $p \in (1, 2)$ вытекает теперь из леммы 6.

Замечание. Утверждение теоремы 4 остается справедливым, если коэффициент уравнения (3) $c(x)$ удовлетворяет условиям: $c(x) \in L_{q,\mathrm{loc}}(Q)$, где q — некоторое число, $q > n$, и $\int\limits_0^{\delta_0} \tau \|c(x)\|_{L_\infty(\partial Q_\tau)} d\tau < \infty$.

Действительно, пусть $u(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $(3_0')$. Тогда $u(x) = v(x) + w(x)$, где $w(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ уравнения $-\mathrm{div}(A\nabla w) + (B, \nabla w) + \lambda w = 0$, а $v(x)$ — решение из $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ задачи Дирихле $-\mathrm{div}(A\nabla v) + (B, \nabla v) + \lambda v = -cu$, $v|_{\partial Q} = 0$, где $c(x)u \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q) \cap \cap \tilde{L}_p(Q)$.

Автор благодарен научному руководителю А. К. Гущину за помощь в работе.

Литература

1. Riesz F.— Math. Z., 1923, Bd 18, S. 87—95.
2. Littlewood J., Paley R.— J. London Math. Soc., 1931, 6, p. 230—233.
3. Littlewood J., Paley R.— Proc. London Math. Soc., 1936, vol. 42, p. 52—89.
4. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.
5. Мазья В. Г.— Мат. сб., 1972, т. 87, № 3, с. 417—454.
6. Михайлов В. П.— Мат. сб., 1976, т. 101 (143), № 2, с. 163—188.
7. Гущин А. К., Михайлов В. П.— Мат. сб., 1979, т. 108 (150), № 1, с. 3—21.
8. Meyers.— Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1963, vol. 17, N 3, p. 189—206.
9. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1964.
10. Кошелев А. И.— УМН, 1958, т. 13, № 4, с. 29—88.
11. Михайлов В. П.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 10, с. 1877—1891.

Институт математики с ВЦ АН МССР

Поступила в редакцию 22 марта 1982 г.

УДК 517.958

И. В. СУВЕЙКА

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЯЗКИХ СРЕДАХ

Введение. Многие процессы, происходящие в вязких средах, описываются нестационарными уравнениями, содержащими малую вязкость. Так, крутильные колебания металлического кругового цилиндра с внутренним трением, распространение возмущений в упруго-вязком стержне, одномерное движение изотропной вязкой сжимаемой жидкости (линеаризованный случай на стационарном решении), распространение звука в вязком газе, заключенном в трубе, и другие процессы такой же природы описываются модельным уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{0.1}$$

Здесь $\eta = \mathrm{const} > 0$ — параметр, а $\eta \dfrac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$ — малая вязкость.