



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. N. Samokhin, Boundary Layer Formation in a Pseudoelastic Medium Under Gradual Acceleration,
Differ. Uravn., 2004, Volume 40, Number 3, 406–416

<https://www.mathnet.ru/eng/de11047>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

April 30, 2025, 20:22:42



УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОБРАЗОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ
ПРИ ПОСТЕПЕННОМ РАЗГОНЕ

© 2004 г. В. Н. Самохин

Изучение процесса образования пограничного слоя вязкой среды вблизи поверхности обтекаемого тела является одной из основных задач теории нестационарного пограничного слоя. Задача о развитии пограничного слоя в случае, когда тело начинает движение, равномерно ускоряясь в неподвижной вязкой среде, рассматривалась впервые в работе [1]. В [2] обсуждается физическая сторона этого явления и приводится математическая постановка задачи. Математически строгое решение этой задачи получено в работе [3], там же указаны возможные обобщения задачи. Все эти вопросы в полной мере изложены в монографии [4].

В работе [4] имеется список нерешенных задач, которые, по мнению авторов, весьма актуальны для теории пограничного слоя. Среди них указана задача об образовании пограничного слоя в реологически сложной среде. Одна из таких задач рассмотрена в настоящей работе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную систему уравнений пограничного слоя псевдопластической жидкости (см. [4]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 < n < 1, \quad (1.1)$$

в области $D = \{0 < t < T, 0 < x < X, 0 < y < \infty\}$. В системе уравнений (1.1) функции $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ являются неизвестными компонентами скорости среды в пограничном слое и подлежат определению, скорость внешнего потока $U(t, x)$ задана. Параметр $\nu > 0$ зависит от консистенции и плотности среды.

Зададим начальное и граничные условия, соответствующие задаче об образовании симметрического пограничного слоя при постепенном приведении покоящейся среды в движение:

$$\begin{aligned} u(0, x, y) = 0, \quad u(t, 0, y) = 0, \quad u(t, x, 0) = 0, \\ v(t, x, 0) = v_0(t, x), \quad u(t, x, y) \rightarrow U(t, x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При этом предполагается, что $U(t, x) = txV(t, x)$, $V(t, x) > 0$; $v_0(t, x) = x^{(n-1)/(n+1)}v_1(t, x)$, функции $V(t, x)$ и $v_1(t, x)$ ограничены в D и имеют ограниченные производные первого порядка по t и x .

Определение 1. Решением задачи (1.1), (1.2) называются функции $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ такие, что $u(t, x, y)$ непрерывна и ограничена в \bar{D} , $v(t, x, y)$ непрерывна в \bar{D} по y и ограничена при ограниченных y , существуют ограниченные в G обобщенные производные u_t , u_x , u_y , u_{yy} , v_y , функции u и v удовлетворяют почти всюду в D уравнениям (1.1) и удовлетворяют условиям (1.2).

2. Переход к переменным типа Крокко. Проведем в задаче (1.1), (1.2) замену переменных, являющуюся модификацией известной замены переменных Крокко (см. [4]). Обозначим $\gamma(n) = (n+1)/n$, $\delta(n) = (n-1)/n$ и введем новые независимые переменные

$$\tau = t^{1/\gamma(n)}, \quad \xi = x, \quad \eta = u/U \quad (2.1)$$

и новую неизвестную функцию

$$w(\tau, \xi, \eta) = |u_y|^{n-1} u_y / (x^{2/\gamma(n)} V(t, x)). \quad (2.2)$$

Задача (1.1), (1.2) при этом сведется к уравнению вида

$$\nu n V^{-\delta(n)} |w|^{\gamma(n)} w_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n) \tau^{1+\gamma(n)} w_\tau - \eta \xi \tau^{3\gamma(n)} V w_\xi + A w_\eta + B w = 0 \quad (2.3)$$

в области $\Omega = \{0 < \tau < T^{1/\gamma(n)}, 0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$(\nu w |w|^{-\delta(n)} w_\eta - \tau \gamma(n) v_1 w |w|^{-\delta(n)} + C)|_{\eta=0} = 0, \quad w(1) = 0. \quad (2.4)$$

В соотношениях (2.3), (2.4) мы имеем

$$A = (\eta - 1) \tau^{\gamma(n)} + A_1, \quad B = \tau^{2\gamma(n)} B_2, \quad C = \tau^{\gamma(n)} V^{\delta(n)}(t, x) + C_1,$$

где

$$A_1 = \tau^{2\gamma(n)} (\tau^{\gamma(n)} (\eta^2 - 1) (V + \xi V_x) + V_t/V) \equiv \tau^{2\gamma(n)} A_2(\tau, \xi, \eta),$$

$$B_2(\tau, \xi, \eta) \equiv -\eta \tau^{\gamma(n)} ((2n/(n+1))V + \xi V_x) - V_t/V,$$

$$C_1 \equiv \tau^{2\gamma(n)} (\tau^{\gamma(n)} V^{\delta(n)} (V + \xi V_x) + V_t/V) \equiv \tau^{2\gamma(n)} C_2(\tau, \xi, \eta).$$

Предположим, что $V(t, x)$ и $v_0(t, x)$ таковы, что функции A_2, B_2, C_2 имеют ограниченные производные по τ, ξ, η .

Определение 2. Решением задачи (2.3), (2.4) называется непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция $w(\tau, \xi, \eta)$, имеющая ограниченные в Ω обобщенные производные первого порядка, обобщенную производную $w_{\eta\eta}$ такую, что $w^{1/n} w_{\eta\eta}$ ограничено, w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; $w(\tau, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям (2.4) и почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (2.3).

3. Решение задачи (2.3), (2.4) методом прямых. Если функция $f(\tau, \xi, \eta)$ задана в области Ω , то при $h = \text{const} > 0$ введем обозначения $f^{m,k}(\eta) \equiv f(mh, kh, \eta)$. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} |w^{m,k}|^{\gamma(n)} w_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{n}{n+1} (mh)^{1+\gamma(n)} \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} - \\ & - \eta ((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} \frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) w_\eta^{m,k} + B^{m-1,k} w^{m,k} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$w^{0,k}(\eta) = 0, m = 1, 2, \dots, k = \overline{0, K}, K = [X/h]$, с граничными условиями

$$\begin{aligned} & w^{m,k}(1) = 0, \quad (\nu w^{m,k} |w^{m,k}|^{-\delta(n)} w_\eta^{m,k} - \\ & - ((m-1)h)^{\gamma(n)} v_1^{m,k} w^{m,k} |w^{m,k}|^{-\delta(n)} + (mh)^{\gamma(n)} (V^{m-1,k})^{\delta(n)} + C_1^{m-1,k})|_{\eta=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Лемма 1. Решение задачи (3.1), (3.2), положительное при $\eta = 0$ и $m > 0$, неотрицательно при $0 \leq \eta \leq 1$ и $m > 0$.

Доказательство. Введем функции $\bar{w}^{m,k}$ такие, что $w^{m,k} = \bar{w}^{m,k} e^{\alpha mh}$, $\alpha = \text{const} > 0$. Из (3.1) для $\bar{w}^{m,k}$ выводим

$$\begin{aligned} & \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} e^{m h \alpha \gamma(n)} |\bar{w}^{m,k}|^{\gamma(n)} \bar{w}_{\eta\eta}^{m,k} - \gamma^{-1}(n) (mh)^{1+\gamma(n)} e^{-\alpha h} (\bar{w}^{m,k} - \bar{w}^{m-1,k})/h - \\ & - \eta ((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} (\bar{w}^{m,k} - \bar{w}^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) \bar{w}_\eta^{m,k} + \\ & + (B^{m-1,k} - \alpha e^{-\alpha h'} \gamma^{-1}(n) (mh)^{1+\gamma(n)}) \bar{w}^{m,k} = 0, \quad 0 < h' < h, \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\bar{w}^{m,k}(1) = 0$. Пусть $\bar{w}^{m,k}(0) > 0$ и h столь мало, что $e^{-\alpha h'} \geq 1/2$. Тогда при достаточно большом $\alpha > 0$ получим неравенство $B^{m-1,k} - \alpha e^{-\alpha h'} \gamma^{-1}(n) (mh)^{1+\gamma(n)} < 0$ при $mh \leq \tau_1$. Это означает, что коэффициент при $\bar{w}^{m,k}$ в (3.3) отрицателен и неравенство $\bar{w}^{m,k}(\eta) > 0$ при

$0 < \eta < 1$ следует по принципу максимума (см. [4, лемма 3.1.1]). Следовательно, $\bar{w}^{m,k}(\eta) \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$, если $\bar{w}^{m,k}(0) > 0$ при $m > 0$. Лемма доказана.

Поскольку из физических соображений нас интересуют решения задачи (3.1), (3.2), положительные при $\eta = 0$ и $m > 0$, то вместо задачи (3.1), (3.2) рассмотрим следующую:

$$L_{m,k}(w) \equiv \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}w_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{n}{n+1}(mh)^{1+\gamma(n)}\frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} - \\ - \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})w_{\eta}^{m,k} + \\ + B^{m-1,k}w^{m,k} = 0, \quad w^{0,k}(\eta) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.4)$$

$$w^{m,k}(1) = 0, \quad l_{m,k}(w) \equiv (\nu(w^{m,k})^{1/n}w_{\eta}^{m,k} - \\ - ((m-1)h)^{\gamma(n)}v_1^{m,k}(w_{m,k})^{1/n} + (mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)} + C_1^{m-1,k})|_{\eta=0} = 0. \quad (3.5)$$

Лемма 2. Задача (3.4), (3.5) имеет решение $w^{m,k}(\eta)$ такое, что

$$M_1mh(1-\eta) \leq w^{m,k}(\eta) \leq M_2mh(1-\eta)^{2/\gamma(n)}, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0;$$

$w^{m,k}(\eta)$ непрерывны при $0 \leq \eta \leq 1$ и непрерывно дифференцируемы при $0 < \eta < 1$.

Эта лемма доказывается аналогично тому, как доказана лемма 8.1.2 в [4].

Для дальнейших оценок функций $w^{m,k}(\eta)$ нам понадобится следующая

Лемма 3. Предположим, что $V(0, x) = a = \text{const} > 0$. Дифференциальное уравнение

$$\nu na^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} + (\eta-1)Y_{\eta} - \gamma^{-1}(n)Y = 0 \quad (3.6)$$

на отрезке $0 \leq \eta \leq 1$ с граничными условиями

$$(\nu Y^{1/n}Y_{\eta} + a^{\delta(n)})|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0 \quad (3.7)$$

имеет непрерывно дифференцируемое при $0 < \eta < 1$ решение такое, что

$$K_1(1-\eta)^{2/\gamma(n)} \leq Y(\eta) \leq K_2(1-\eta)^{2/\gamma(n)}, \quad K_2(1-\eta)^{2/\gamma(n)} - K_0(1-\eta) \leq Y(\eta), \quad \eta_0 \leq \eta < 1, \quad (3.8)$$

$$-K_4(1-\eta)^{(n-1)/(n+1)} \leq Y_{\eta}(\eta) \leq -K_3(1-\eta)^{(n-1)/(n+1)}, \quad (3.9)$$

$$|Y^{1/n}Y_{\eta\eta}| \leq K_5, \quad Y^{1/n}Y_{\eta\eta} \leq -K_6. \quad (3.10)$$

При этом $\nu na^{-\delta(n)}K_2^{\gamma(n)}(1-n)/(1+n) = 1/2$, $\nu na^{-\delta(n)}K_1^{\gamma(n)}/(1+n) = 1/(2(1+\delta_1))$, $\delta_1 = \text{const} > 0$, $((n+1+2\delta_1)/(2(1+\delta_1)))K_3 = (n/(n+1))K_1$, $K_3 \leq K_1$, $K_4 \geq (2n/(n+1))K_2$, $K_0 > 0$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 5.1.2 и 8.1.3 из [4].

Лемма 4. Решение задачи (3.4), (3.5), положительное при $\eta = 0$, $m \geq 1$, удовлетворяет неравенствам

$$mhY(\eta)e^{-\alpha mh} \leq w^{m,k} \leq mhY(\eta)e^{\alpha mh}, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (3.11)$$

где $Y(\eta)$ – решение задачи (3.6), (3.7), $mh \leq \tau_1$, τ_1 достаточно мало.

Доказательство. Для оценки $w^{m,k}$ снизу рассмотрим вспомогательную функцию $f(\tau, \eta) = \tau Y(\eta)e^{-\alpha\tau}$. Имеем

$$L_{m,k}(f) = \nu na^{-\delta(n)}(mh)^{1+\gamma(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta}(e^{-\alpha(1+\gamma(n))mh} - e^{-\alpha mh}) + \\ + \nu n[(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - a^{-\delta(n)}](mh)^{1+\gamma(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta}e^{-\alpha(1+\gamma(n))mh} + \\ + \gamma^{-1}(n)(mh)^{1+\gamma(n)}(m-1)hYe^{-\alpha mh}\alpha e^{\alpha h'} + A_1^{m-1,k}mhY_{\eta}e^{-\alpha mh} + B^{m-1,k}mhYe^{-\alpha mh}, \quad 0 < h' < h,$$

$$l_{m,k}(f) = [\nu(mh)^{\gamma(n)} Y^{1/n} Y_{\eta}(e^{-\alpha\gamma(n)mh} - 1) - ((m-1)h)^{1/n} v_1^{m,k} Y^{1/n} e^{-(\alpha/n)mh} + (mh)^{\gamma(n)} ((V^{m-1,k})^{\delta(n)} - a^{\delta(n)}) + C_1^{m-1,k}]|_{\eta=0}.$$

Учитывая неравенства (3.8)–(3.10), при $m > 1$ получаем $L_{m,k}(f) > 0$ при $0 < \eta < 1$, $mh \leq \tau_1$, достаточно малом τ_1 и достаточно большом α ; $l_{m,k}(f) > 0$ при соответствующем выборе τ_1 . Кроме того, $f^{m,k}(1) = 0$, $f^{0,k}(\eta) = 0$.

Рассматривая неравенства

$$L_{m,k}(f) - L_{m,k}(w) > 0 \quad \text{и} \quad (f^{m,k}(0))^{-1/n} l_{m,k}(f) - (w^{m,k}(0))^{-1/n} l_{m,k}(w) > 0,$$

получаем на основе принципа максимума неравенство $w^{m,k}(\eta) \geq f^{m,k}(\eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $m \geq 0$. Оценка $w^{m,k}(\eta)$ сверху получается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $V_x(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Для решения $w^{m,k}(\eta)$ задачи (3.4), (3.5), положительного при $\eta = 0$ и $m \geq 1$, выполняются неравенства

$$mhY_{\eta}(\eta)e^{\beta mh} \leq w_{\eta}^{m,k}(\eta) \leq mhY_{\eta}(\eta)e^{-\beta mh}, \tag{3.12}$$

$$|(w^{m,k} - w^{m-1,k})/h| \leq (1 + \varepsilon)Y(\eta), \quad |(w^{m,k} - w^{m,k-1})/h| \leq mhY(\eta), \tag{3.13}$$

$$|(w^{m,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{m,k}| \leq K_7(mh)^{\gamma(n)}, \quad (w^{m,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{m,k} < -K_8(mh)^{\gamma(n)} \tag{3.14}$$

при $mh \leq \tau_1$, где τ_1 достаточно мало, $\beta, \varepsilon, K_7, K_8 = \text{const} > 0$ не зависят от h , $\varepsilon > 0$ – малое число.

Доказательство. Неравенства (3.12), (3.13) доказываются по индукции, а (3.14) является их следствием. Сначала докажем, что оценки (3.12), (3.13) верны при $m = 1$. Затем предположим, что они верны при $m \leq m' - 1$ и $m = m'$, $k \leq k' - 1$, где $m' \geq 2$, $k' \geq 0$, и покажем, что они выполняются при $m = m'$, $k = k'$, если подходящим образом выбраны $\beta, \varepsilon, \tau_1$.

Введем обозначения: $r^{m,k} = (w^{m,k} - w^{m,k-1})/h$, $\rho^{m,k} = (w^{m,k} - w^{m-1,k})/h$, $z^{m,k} = w_{\eta}^{m,k}$.

При $m = 1$ из (3.4) следует равенство

$$\nu n a^{-\delta(n)} (w^{1,k})^{\gamma(n)} w_{\eta\eta}^{1,k} - \gamma^{-1}(n) h^{\gamma(n)} w^{1,k} + (\eta - 1) h^{\gamma(n)} w_{\eta}^{1,k} = 0, \tag{3.15}$$

из (3.5) получаем

$$w^{1,k}(1) = 0, \quad (\nu (w^{1,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{1,k} + h^{\gamma(n)} a^{\delta(n)})|_{\eta=0} = 0. \tag{3.16}$$

Решением задачи (3.15), (3.16) являются функции $w^{1,k}(\eta) = hY(\eta)$. Для этих функций все утверждения леммы 5 верны. В самом деле, $w^{0,k} = 0$, $0 < \rho^{1,k} = Y < (1 + \varepsilon)Y$, $r^{1,k} = 0$, $(w^{1,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{1,k} = Y^{1/n} Y_{\eta\eta} h^{\gamma(n)} \leq -K_6 h^{\gamma(n)}$.

Рассмотрев равенство $(L_{m,k}(w) - L_{m-1,k}(w))/h = 0$, для $\rho^{m,k}$ получим уравнение

$$\begin{aligned} R_{m,k}(\rho) \equiv & \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (w^{m,k})^{\gamma(n)} \rho_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1))((m-1)h)^{1+\gamma(n)} (\rho^{m,k} - \rho^{m-1,k})/h - \\ & - \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} (\rho^{m,k} - \rho^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) \rho_{\eta}^{m,k} + \\ & + B^{m-1,k} \rho^{m,k} + \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} \theta^{m,k}(\eta) w_{\eta\eta}^{m-1,k} \rho^{m,k} - \\ & - (n/(n+1))m(mh)^{\gamma(n)} (1 - ((m-1)/m)^{1+\gamma(n)}) \rho^{m,k} = \\ = & -(\nu n/h)[(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - (V^{m-2,k})^{-\delta(n)}] (w^{m-1,k})^{\gamma(n)} w_{\eta\eta}^{m-1,k} - \\ & - (\eta-1)m(mh)^{1/n} (1 - ((m-1)/m)^{\gamma(n)}) z^{m-1,k} - \\ & - (1/h)[((m-1)h)^{2\gamma(n)} A_2^{m-1,k} - ((m-2)h)^{2\gamma(n)} A_2^{m-2,k}] z^{m-1,k} + \\ + & (\eta/h)[((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} - ((m-2)h)^{2\gamma(n)} U^{m-1,k}] r^{m-1,k} + (1/h)(B^{m-1,k} - B^{m-2,k}) w^{m-1,k}, \end{aligned}$$

где $\theta^{m,k}(\eta) = \gamma(n) \int_0^1 [\tau w^{m,k} + (1 - \tau)w^{m-1,k}]^{1/n} d\tau$.

Из (3.5) выводим граничные условия

$$\begin{aligned} \rho^{m,k}(1) = 0, \quad \Gamma_{m,k}(\rho) &\equiv \left[\nu \rho_{\eta}^{m,k}(\eta) - \frac{((mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)} C_1^{m-1,k}) \theta_1^{m,k}(\eta)}{(w^{m,k})^{1/n} (w^{m-1,k})^{1/n}} \rho^{m,k}(\eta) \right] \Big|_{\eta=0} = \\ &= -\frac{1}{(w^{m-1,k}(0))^{1/n}} \left[m(mh)^{1/n} \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\gamma(n)} \right) (V^{m-1,k})^{\delta(n)} + \right. \\ &+ ((m-1)h)^{\gamma(n)} \frac{(V^{m-1,k})^{\delta(n)} - (V^{m-2,k})^{\delta(n)}}{h} + \frac{C_1^{m-1,k} - C_1^{m-2,k}}{h} \Big] + \\ &+ (1/h) \left(((m-1)h)^{\gamma(n)} v_1^{m,k} - ((m-2)h)^{\gamma(n)} v_1^{m-1,k} \right), \\ \theta_1^{m,k}(\eta) &= \frac{1}{n} \int_0^1 [\tau w^{m,k} + (1 - \tau)w^{m-1,k}]^{-\delta(n)} d\tau. \end{aligned}$$

Для оценки $\rho^{m,k}(\eta)$ введем функцию $f_1(\eta) = (1 + \varepsilon)Y(\eta)$, $m > 1$. Имеем

$$\begin{aligned} R_{m,k}(f_1) \pm R_{m,k}(\rho) &\leq (1 + \varepsilon) \left\{ \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (w^{m,k})^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta} + \right. \\ &+ ((\eta - 1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) Y_{\eta} + B^{m-1,k} Y + \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} \theta^{m,k}(\eta) w_{\eta}^{m-1,k} Y - \\ &\left. - \frac{n}{n+1} m (mh)^{\gamma(n)} \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{1+\gamma(n)} \right) Y \right\} \pm \\ &\pm \left\{ -(\eta - 1) m (mh)^{1/n} \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\gamma(n)} \right) z^{m-1,k} + M_3 (mh)^{1+\gamma(n)} Y + M_4 (mh)^{2\gamma(n)} Y \right\} \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon) \left\{ \nu n a^{-\delta(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta} (mh)^{\gamma(n)} + (mh)^{\gamma(n)} (\eta - 1) Y_{\eta} - \frac{n}{n+1} m (mh)^{\gamma(n)} \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{1+\gamma(n)} \right) Y + \right. \\ &+ \frac{(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} \theta^{m,k}(\eta)}{(V^{m-2,k})^{-\delta(n)} (w^{m-1,k})^{\gamma(n)}} \left(\frac{n}{n+1} ((m-1)h)^{1+\gamma(n)} (1 + \varepsilon) Y - (\eta - 1) ((m-1)h)^{1+\gamma(n)} Y_{\eta} \right) Y \Big\} - \\ &- (\eta - 1) m (mh)^{1/n} \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\gamma(n)} \right) (m-1) h Y_{\eta} + M_3 (mh)^{1+\gamma(n)} Y + M_4 (mh)^{2\gamma(n)} Y, \\ M_i &= \text{const} > 0, \quad i = \overline{3, 6}. \end{aligned}$$

Учитывая предположения индукции, неравенства (3.11) и оценку

$$\theta^{m,k}(\eta) \leq \gamma(n) (mh)^{1/n} Y^{1/n} e^{\alpha mh/n},$$

приходим к неравенству

$$\begin{aligned} R_{m,k}(f_1) \pm R_{m,k}(\rho) &\leq (1 + \varepsilon) (mh)^{\gamma(n)} \left[\nu n a^{-\delta(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta} + (\eta - 1) Y_{\eta} - \right. \\ &- \frac{n}{n+1} m \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{1+\gamma(n)} \right) Y + (m-1) \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\gamma(n)} \right) \left(\frac{n}{n+1} (1 + \varepsilon) Y - \right. \\ &\left. \left. - (\eta - 1) Y_{\eta} \right) \right] - (mh)^{(1+n)/n} (1 - \eta) (m-1) \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\gamma(n)} \right) Y_{\eta} + \end{aligned}$$

$$+ M_7(mh)^{1+\gamma(n)}Y + M_8(mh)^{2\gamma(n)}Y, \quad M_7, M_8 = \text{const} > 0,$$

не зависящие от h и τ_1 .

Заметим, что выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части этого неравенства, равно

$$(1 - m) \left(1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\gamma(n)} \right) \left\{ \left[\frac{n}{n+1}Y - \left(\frac{n}{n+1}(1 + \varepsilon)Y - (\eta - 1)Y_\eta \right) \right] (1 + \varepsilon) + (1 - \eta)Y_\eta \right\}$$

и, кроме того, $-1 < (1 - m)(1 - ((m - 1)/m)^{\gamma(n)}) < -1/2$ при $m > 1$.

Принимая во внимание (3.6) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n}{n+1}Y - \left(\frac{n}{n+1}(1 + \varepsilon)Y - (\eta - 1)Y_\eta \right) \right] (1 + \varepsilon) + (1 - \eta)Y_\eta \geq \\ & \geq \varepsilon n Y \left(\frac{\varepsilon n}{n+1} - \varepsilon - \nu a^{-\delta(n)} Y^{1/n} Y_{\eta\eta} \right) \geq \frac{\varepsilon^2 n^2}{n+1} Y \end{aligned}$$

при $\varepsilon \leq \nu K_6 a^{-\delta(n)}$; возьмем $\varepsilon = K_6 a^{-\delta(n)}/2$.

Значит, при $mh \leq \tau_1$ и достаточно малом τ_1 получим $R_{m,k}(f_1) \pm R_{m,k}(\rho) < 0$ независимо от h .

При $\eta = 0$ рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} \Gamma_{m,k}(f_1) \pm \Gamma_{m,k}(\rho) & \leq \left[\nu(1 + \varepsilon)Y_\eta - \frac{(mh)^{1/n} a^{\delta(n)} m (1 - ((m - 1)/m)^{1/n})}{((m - 1)h)^{1/n} Y^{1/n}} (1 + \varepsilon) + \right. \\ & \left. + \frac{a^{\delta(n)} (mh)^{1/n}}{((m - 1)h)^{1/n} Y^{1/n}} \right] \Big|_{\eta=0} + M_9 mh, \quad M_9 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Из (3.7) находим $\nu Y_\eta(0) = -a^{\delta(n)}/Y^{1/n}(0)$ и поэтому

$$\Gamma_{m,k}(f_1) \pm \Gamma_{m,k}(\rho) \leq \frac{a^{\delta(n)}}{Y^{1/n}(0)} \left(-\varepsilon - \varepsilon m \left(\left(\frac{m}{m-1} \right)^{1/n} - 1 \right) \right) + M_{10} mh < 0$$

при $mh < \tau_1$, где τ_1 достаточно мало. Кроме того, $\rho^{m,k}(1) = 0$.

Из полученных соотношений с помощью принципа максимума выводим неравенство $f_1^{m,k} \pm \rho^{m,k} \geq 0$ при $mh \leq \tau_1$, откуда следует первое неравенство (3.13).

Для $r^{m,k}(\eta)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} Q_{m,k}(r) & \equiv \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (w^{m,k})^{\gamma(n)} r_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1))(mh)^{1+\gamma(n)} (r^{m,k} - r^{m-1,k})/h - \\ & - \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} (r^{m,k} - r^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) r_\eta^{m,k} + \\ & + B^{m-1,k} r^{m,k} + \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} \theta_2^{m,k}(\eta) w_{\eta\eta}^{m,k-1} r^{m,k} = \\ & = \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} \frac{U^{m,k} - U^{m,k-1}}{h} r^{m,k-1} - \frac{1}{h} (A_1^{m-1,k} - A_1^{m-1,k-1}) z^{m,k-1} - \\ & - (\nu n/h) [(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{-\delta(n)}] (w^{m,k-1})^{\gamma(n)} w_{\eta\eta}^{m,k-1} - (1/h) (B^{m-1,k} - B^{m-1,k-1}) w^{m,k-1}, \end{aligned}$$

$m > 1, k \geq 1$, а также граничные условия $r^{m,k}(1) = 0$,

$$q_{m,k}(r) \equiv \left[\nu r_\eta^{m,k}(\eta) - \frac{((mh)^{\gamma(n)} (V^{m-1,k})^{\delta(n)} C_1^{m-1,k}) \theta_3^{m,k}(\eta)}{(w^{m,k})^{1/n} (w^{m,k-1})^{1/n}} r^{m,k} \right] \Big|_{\eta=0} =$$

$$= ((m-1)h)^{\gamma(n)}(v_1^{m,k} - v_1^{m,k-1})/h - \\ - (w^{m,k-1}(0))^{-1/n}[(mh)^{\gamma(n)}((V^{m-1,k})^{\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{\delta(n)})/h + (C_1^{m-1,k} - C_1^{m-1,k-1})/h].$$

Здесь

$$\theta_2^{m,k}(\eta) = \frac{n+1}{n} \int_0^1 [\tau w^{m,k} + (1-\tau)w^{m,k-1}]^{1/n} d\tau, \quad \theta_3^{m,k}(\eta) = \frac{1}{n} \int_0^1 [\tau w^{m,k} + (1-\tau)w^{m,k-1}]^{-\delta(n)} d\tau.$$

Положим $f_2(\eta) = \tau Y(\eta)$. Имеем

$$Q_{m,k}(f_2) \pm Q_{m,k}(r) = mh[\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n)(mh)^{\gamma(n)}Y + \\ + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})Y_{\eta} + B^{m-1,k}Y + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta_2^{m,k}(\eta)w_{\eta\eta}^{m,k-1}Y] \pm \\ \pm \left[\eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} \frac{U^{m,k} - U^{m,k-1}}{h} r^{m,k-1} - \frac{1}{h}(A_1^{m-1,k} - A_1^{m-1,k-1})z^{m,k-1} - \right. \\ \left. - \frac{\nu n}{h}((V^{m-1,k})^{-\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{-\delta(n)})(w^{m,k-1})^{\gamma(n)}w_{\eta\eta}^{m,k-1} - \frac{B^{m-1,k} - B^{m-1,k-1}}{h}w^{m,k-1} \right].$$

Учитывая предположения индукции, результаты лемм 3 и 4 и выражая $w_{\eta\eta}^{m,k-1}$ из (3.4), выведем неравенство $\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}\theta_2^{m,k}(\eta)w_{\eta\eta}^{m,k-1}Y \leq -M_{11}(mh)^{\gamma(n)}Y$, $M_{11} = \text{const} > 0$. А так как $\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w_{\eta\eta}^{m,k})^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} \leq \nu na^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta}(mh)^{\gamma(n)} + M_{12}(mh)^{1+\gamma(n)}Y$, то

$$Q_{m,k}(f_2) \pm Q_{m,k}(r) \leq mh[M_{12}(mh)^{1+\gamma(n)}Y + M_{13}((m-1)h)^{2\gamma(n)}Y - \\ - (1-\eta)M_{14}((m-1)h)^{1+\gamma(n)}Y_{\eta} - M_{11}(mh)^{\gamma(n)}Y] + M_{15}((m-1)h)^{2\gamma(n)}Y - M_{16}((m-1)h)^{2\gamma(n)}(1-\eta)Y_{\eta},$$

где положительные постоянные M_{11}, \dots, M_{15} не зависят от h и β , а M_{16} зависит от β . Значит, при $mh \leq \tau_1$ и достаточно малом τ_1 получаем неравенство $Q_{m,k}(f_2) \pm Q_{m,k}(r) < 0$ независимо от h .

Далее найдем

$$q_{m,k}(f_2) \pm q_{m,k}(r) = \left[\nu Y_{\eta} - \frac{((mh)^{\gamma(n)}(V^{m-1,k})^{\delta(n)}C_1^{m-1,k})\theta_3^{m,k}(\eta)}{(w^{m,k})^{1/n}(w^{m,k-1})^{1/n}} Y \right] \Big|_{\eta=0} \pm \\ \pm \left[((m-1)h)^{\gamma(n)} \frac{v_1^{m,k} - v_1^{m,k-1}}{h} - \frac{1}{(w^{m,k-1}(0))^{1/n}} \left(\frac{C_1^{m-1,k} - C_1^{m-1,k-1}}{h} + \right. \right. \\ \left. \left. + (mh)^{\gamma(n)} \frac{(V^{m-1,k})^{\delta(n)} - (V^{m-1,k-1})^{\delta(n)}}{h} \right) \right] \leq mh\nu Y_{\eta}(0) + o(mh) < 0,$$

если $mh \leq \tau_1$ и τ_1 достаточно мало. Из этих неравенств следует второе неравенство (3.13).

Дифференцируя уравнения (3.4) по η , для $z^{m,k}(\eta)$ получаем уравнение

$$P_{m,k}(z) \equiv \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}(w^{m,k})^{\gamma(n)}z_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1))(mh)^{1+\gamma(n)}(z^{m,k} - z^{m-1,k})/h - \\ - \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}(z^{m,k} - z^{m,k-1})/h + ((\eta-1)(mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k})z_{\eta}^{m,k} + \\ + B^{m-1,k}z^{m,k} + \nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)}((n+1)/n)(w^{m,k})^{1/n}z^{m,k}z_{\eta}^{m,k} + \\ + ((mh)^{\gamma(n)} + A_{1\eta}^{m-1,k})z^{m,k} - ((m-1)h)^{2\gamma(n)}U^{m,k}r^{m,k} + B_{\eta}^{m-1,k}w^{m,k} = 0,$$

$m = 2, 3, \dots; k = \overline{0, K}$. Из граничного условия (3.5) при $\eta = 0$ находим $\nu z^{m,k}(0) = ((m-1)h)^{\gamma(n)} v_1^{m,k} - [(mh)^{\gamma(n)} (V^{m-1,k})^{\delta(n)} + C_1^{m-1,k}] (w^{m,k})^{-1/n}$. Кроме того, из оценок (3.11) следует, что существует последовательность $\eta_n^{m,k} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что

$$z^{m,k}(\eta_n^{m,k}) \geq mh Y_\eta(\eta_n^{m,k}) e^{\alpha mh}, \tag{3.17}$$

а также последовательность $\bar{\eta}_n^{m,k} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что

$$z^{m,k}(\bar{\eta}_n^{m,k}) \leq mh Y_\eta(\bar{\eta}_n^{m,k}) e^{-\alpha mh}. \tag{3.18}$$

Для оценки $z^{m,k}$ сверху рассмотрим функцию $f_3(\eta) = \tau Y_\eta(\eta) e^{-\beta \tau}$ и вычислим

$$\begin{aligned} P_{m,k}(f_3) &= m h e^{-\beta mh} [\nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (w^{m,k})^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta\eta} - \gamma^{-1}(n) (mh)^{\gamma(n)} Y_\eta + \\ &+ \gamma^{-1}(n) (mh)^{\gamma(n)} (m-1) h Y_\eta \beta e^{\beta h'} + ((\eta-1) (mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) Y_\eta + \\ &+ (B^{m-1,k} + (mh)^{\gamma(n)} + A_{1n}^{m-1,k}) Y_\eta + \nu(n+1) (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} m h e^{-\beta mh} (w^{m,k})^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta}] - \\ &- ((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} r^{m,k} + B_\eta^{m-1,k} w^{m,k}, \quad 0 < h' < h. \end{aligned}$$

Продифференцируем уравнение (3.6) по η и получим

$$\nu n a^{-\delta(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta\eta} + (n+1)^{-1} Y_\eta + (\eta-1) Y_{\eta\eta} + \nu(n+1) a^{-\delta(n)} Y^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta} = 0.$$

Из этого равенства и оценок (3.8)–(3.10) выводим неравенства $|Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta\eta}| \leq M_{17} |Y_\eta|$, $|Y^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta}| \leq M_{18} |Y_\eta|$, $Y^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta} > 0$, $|A_1^{m-1,k} Y_{\eta\eta}| \leq M_{19} ((m-1)h)^{2\gamma(n)} |Y_\eta|$.

Вследствие этого

$$\begin{aligned} P_{m,k}(f_3) &\leq m h e^{-\beta mh} [(mh)^{\gamma(n)} (\nu n a^{-\delta(n)} Y^{\gamma(n)} Y_{\eta\eta\eta} - (n+1)^{-1} Y_\eta + (\eta-1) Y_{\eta\eta} + \\ &+ \nu(n+1) a^{-\delta(n)} Y^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta}) + (n/(n+1)) (mh)^{\gamma(n)} (m-1) h Y_\eta \beta e^{\beta h'} + \\ &+ \nu(n+1) a^{-\delta(n)} (mh)^{\gamma(n)} Y^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta} (e^{-\beta mh} - 1) + A_1^{m-1,k} Y_{\eta\eta} + \\ &+ (B^{m-1,k} + A_{1n}^{m-1,k}) Y_\eta + M_{20} (mh)^{1+\gamma(n)} Y^{1/n} Y_\eta Y_{\eta\eta}] + M_{21} ((m-1)h)^{2\gamma(n)} Y \leq \\ &\leq m h e^{-\beta mh} [(n/(n+1)) (mh)^{\gamma(n)} (m-1) h Y_\eta \beta e^{\beta h'} + M_{22} (mh)^{1+\gamma(n)} |Y_\eta|] + M_{21} ((m-1)h)^{2\gamma(n)} Y < 0, \end{aligned}$$

если $mh \leq \tau_1$, τ_1 достаточно мало и достаточно велико $\beta > 0$; постоянные β и M_{17}, \dots, M_{21} не зависят от h .

Для разности $S^{m,k} = f_3^{m,k} - z^{m,k}$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} &\nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (w^{m,k})^{\gamma(n)} S_{\eta\eta}^{m,k} - (n/(n+1)) (mh)^{1+\gamma(n)} (S^{m,k} - S^{m-1,k})/h - \\ &- \eta ((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} (S^{m,k} - S^{m,k-1})/h + ((\eta-1) (mh)^{\gamma(n)} + A_1^{m-1,k}) S_\eta^{m,k} + B^{m-1,k} S^{m,k} + \\ &+ \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (1 + 1/n) (w^{m,k})^{1/n} z^{m,k} S_\eta^{m,k} + ((mh)^{\gamma(n)} + A_{1n}^{m-1,k}) S^{m,k} + \\ &+ \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} (1 + 1/n) (w^{m,k})^{1/n} f_{3\eta}^{m,k} S^{m,k} < 0. \end{aligned}$$

В этих неравенствах коэффициент при $S^{m,k}$, равный

$$\begin{aligned} &-\gamma^{-1}(n) (mh)^{1+\gamma(n)} h^{-1} - (\eta/h) ((m-1)h) \cdot 2\gamma(n) U^{m,k} + B^{m-1,k} + (mh)^{\gamma(n)} + \\ &+ A_{1n}^{m-1,k} + \nu n (V^{m-1,k})^{-\delta(n)} \gamma(n) (w^{m,k})^{1/n} f_{3\eta}^{m,k}, \end{aligned}$$

отрицателен при $m > 1$, достаточно малом τ_1 и $mh \leq \tau_1$. Кроме того, имеют место неравенства $S^{m,k}(\bar{\eta}_n^{m,k}) \geq 0$, $S^{m,k}(0) > 0$, если β достаточно велико, $mh \leq \tau_1$, а $S^{m-1,k} \geq 0$, $S^{m,k-1} \geq 0$ по предположению индукции. Поэтому $S^{m,k}$ не может принимать наименьшее отрицательное значение при $0 \leq \eta < 1$. Значит, $z^{m,k} \leq f_3^{m,k}$ при $0 \leq \eta < 1$. Аналогично доказывается оценка $z^{m,k}$ снизу.

Из полученных неравенств и уравнений (3.4) следует равномерная по h ограниченность произведения $(w^{m,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{m,k}$. Докажем второе из неравенств (3.14). Из (3.4) находим

$$\begin{aligned} (w^{m,k})^{1/n} w_{\eta\eta}^{m,k} &\leq \frac{1}{\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} mh Y e^{\alpha mh}} \left(\frac{n}{n+1} (mh)^{1+\gamma(n)} (1+\varepsilon) Y + \right. \\ &+ \left. \eta((m-1)h)^{2\gamma(n)} U^{m,k} mh Y - (\eta-1)(mh)^{1+\gamma(n)} Y_{\eta} e^{-\beta mh} - A_1^{m-1,k} z^{m,k} - B^{m-1,k} w^{m,k} \right) \leq \\ &\leq \frac{(mh)^{\gamma(n)}}{\nu n(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} Y e^{\alpha mh}} \left(\frac{n}{n+1} (1+\varepsilon) Y - (\eta-1) Y_{\eta} + M_{23} mh Y \right) \leq \\ &\leq \frac{(mh)^{\gamma(n)}}{\nu(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} e^{\alpha mh}} \left(\frac{\varepsilon n}{n+1} + \nu a^{-\delta(n)} Y^{1/n} Y_{\eta\eta} + M_{23} mh \right) \leq \\ &\leq \frac{(mh)^{\gamma(n)}}{\nu(V^{m-1,k})^{-\delta(n)} e^{\alpha mh}} \left(-\frac{\varepsilon n}{n+1} + \varepsilon - \nu K_6 a^{-\delta(n)} + M_{24} mh \right) \leq -K_8 (mh)^{\gamma(n)}, \end{aligned}$$

если $mh \leq \tau_1$ и τ_1 достаточно мало, постоянные M_{23} , M_{24} не зависят от h . Лемма 5 доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены указанные выше предположения относительно функций U и v_0 . Тогда в области Ω , где $\tau_1 = T^{1/\gamma(n)}$ зависит от U и v_0 , существует решение $w(\tau, \xi, \eta)$ задачи (2.3), (2.4), обладающее следующими свойствами: $\tau Y(\eta) e^{-\alpha \tau} \leq w(\tau, \xi, \eta) \leq \tau Y(\eta) e^{\alpha \tau}$, $\tau Y_{\eta}(\eta) e^{\beta \tau} \leq w_{\eta}(\tau, \xi, \eta) \leq \tau Y_{\eta}(\eta) e^{-\beta \tau}$, $|w_{\tau}| \leq (1+\varepsilon) Y$, $|w_{\xi}| \leq \tau Y$, $-K_7 \tau^{\gamma(n)} \leq \leq w^{1/n} w_{\eta\eta} \leq -K_8 \tau^{\gamma(n)}$. Если $n \geq 1 - (2^{n+1}(1+\delta_1))^{-1}$, то решение, обладающее такими свойствами, единственно.

Доказательство. Существование решения задачи (2.3), (2.4) доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1 работы [3] и в теореме 3.1.5 из [4].

Докажем единственность решения задачи (2.3), (2.4), обладающего указанными в теореме 1 свойствами, при условии $2^{n+1}(1-n)(1+\delta_1) \leq 1$, $\delta_1 = \text{const} > 0$. Предположим, что w_1, w_2 — два решения рассматриваемой задачи. Для разности $w_1 - w_2 = W$ получаем уравнение

$$\nu n V^{-\delta(n)} w_1^{\gamma(n)} W_{\eta\eta} - \gamma^{-1}(n) \tau^{1+\gamma(n)} V W_{\xi} + A W_{\eta} + \nu n V^{-\delta(n)} \theta(\eta) w_{2\eta\eta} W + B W = 0 \quad (3.19)$$

с условиями

$$(\nu W_{\eta} - C W \theta_1(\eta) / (w_1 w_2))|_{\eta=0} = 0, \quad W|_{\eta=1} = 0, \quad W|_{\tau=0} = 0, \quad (3.20)$$

где $\theta(\eta) = \gamma(n) \int_0^1 (\tau w_1 + (1-\tau)w_2)^{1/n} d\tau$, $\theta_1(\eta) = \gamma(n) \int_0^1 (\tau w_1 + (1-\tau)w_2)^{-\delta(n)} d\tau$. Умножим равенство (3.19) на $W e^{-\gamma \tau} / (\tau^{1+\gamma(n)} w_1)$ и проинтегрируем по Ω . Преобразуя некоторые интегралы интегрированием по частям, приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{W^2 e^{-\gamma \tau}}{2 \tau^{1+\gamma(n)} w_1} \left(\nu V^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} w_1^{-\delta(n)} (w_{1\eta})^2 + \nu V^{-\delta(n)} w_1^{1/n} w_{1\eta\eta} - \frac{n}{n+1} \frac{w_{1\tau}}{w_1} \tau^{1+\gamma(n)} - \right. \\ &- \left. \gamma \frac{n}{n+1} \tau^{1+\gamma(n)} + \eta(V + \xi V_x) \tau^{3\gamma(n)} \frac{w_{1\xi}}{w_1} + A \frac{w_{1\eta}}{w_1} - A_{\eta} + 2 \nu n V^{-\delta(n)} \theta(\eta) w_{2\eta\eta} + 2B \right) d\tau d\xi d\eta + \\ &+ \int_{\tau=\tau_1} -\frac{n}{n+1} \frac{W^2 e^{-\gamma \tau}}{2 w_1} d\xi d\eta + \int_{\xi=X} -\eta \xi V \tau^{1+2/n} \frac{W^2 e^{-\gamma \tau}}{2 w_1} d\tau d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\eta=0} \left(-nV^{-\delta(n)}w_1^{1/n} \frac{CW^2\theta_1(\eta)}{w_1w_2} \frac{e^{-\gamma\tau}}{\tau^{1+\gamma(n)}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\nu}{2}V^{-\delta(n)}w_1^{-\delta(n)}w_{1\eta}W^2 \frac{e^{-\gamma\tau}}{\tau^{1+\gamma(n)}} - \frac{1}{\tau^{1+\gamma(n)}} \frac{AW^2}{2w_1} e^{-\gamma\tau} \right) d\tau d\xi = 0. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Интеграл по границе $\eta = 0$ из этого равенства не превосходит величины

$$\int_{\eta=0} \frac{W^2e^{-\gamma\tau}}{\tau^{1+\gamma(n)}} \left[-\frac{nV^{-\delta(n)}w_1^{-\delta(n)}C\theta_1(\eta)}{w_2} + \left(\frac{\nu}{2}a^{-\delta(n)}Y^{-\delta(n)}Y_\eta\tau^{1/n} + \frac{\tau^{1/n}}{2Y} \right) + M_{25}\tau^{\gamma(n)} \right] d\tau d\xi \leq 0,$$

$M_{25} = \text{const} > 0$, если $\tau \leq \tau_1$ и τ_1 достаточно мало, так как в силу равенства $\nu Y^{1/n}(0)Y_\eta(0) = -a^{\delta(n)}$ выражение в квадратных скобках равно нулю.

Итак, при соответствующем выборе τ_1 все граничные интегралы в равенстве (3.21) неположительны. Опуская их и учитывая неравенство $2\nu nV^{-\delta(n)}\theta(\eta)w_{2\eta\eta} \leq 0$ и уравнение (2.3) для w_1 , получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{W^2e^{-\gamma\tau}}{2\tau^{1+\gamma(n)}w_1} \left(\nu V^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} w_1^{-\delta(n)} (w_{1\eta})^2 + \nu(1-\eta)V^{-\delta(n)}w_1^{1/n}w_{1\eta\eta} - \gamma \frac{n}{n+1} \tau^{1+\gamma(n)} + \right. \\
 \left. + \eta(V + \xi V_x)\tau^{3\gamma(n)} - A_\eta + B \right) d\tau d\xi d\eta \geq 0,
 \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{W^2e^{-\gamma\tau}}{2\tau^{1+\gamma(n)}w_1} \left(\left(\nu a^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} Y^{-\delta(n)}Y_\eta^2 + \nu(1-\eta)a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_{\eta\eta} - 1 \right) \tau^{\gamma(n)} - \right. \\
 \left. - \gamma \frac{n}{n+1} \tau^{1+\gamma(n)} + \eta(V + \xi V_x)\tau^{3\gamma(n)} + B + M_{26}\tau^{1+\gamma(n)} \right) d\tau d\xi d\eta \geq 0, \quad M_{26} = \text{const} > 0. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Из уравнения (3.6) находим $\nu na^{-\delta(n)}Y^{\gamma(n)}Y_{\eta\eta} = \gamma^{-1}(n)Y + (1-\eta)Y_\eta$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \nu a^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} Y^{-\delta(n)}Y_\eta^2 + \nu(1-\eta)a^{-\delta(n)}Y^{1/n}Y_{\eta\eta} - 1 &= \nu a^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} Y^{-\delta(n)}Y_\eta^2 + \frac{1}{n}(1-\eta) \frac{Y_\eta}{Y} - \frac{2n}{n+1} \leq \\
 \leq \nu a^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} K_2^{-\delta(n)} K_4^2 + \frac{1}{n}(1-\eta) \frac{Y_\eta}{Y} - \frac{2n}{n+1} &\leq \nu a^{-\delta(n)} \frac{1-n}{n} K_2^{\gamma(n)} \frac{4n^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}(1-\eta) \frac{Y_\eta}{Y} - \frac{2n}{n+1} = \\
 = \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n}(1-\eta) \frac{Y_\eta}{Y} - \frac{2n}{n+1} &\leq -\frac{1}{n} \frac{K_3}{K_2} + 2 \left(\frac{1-n}{1+n} \right) = \frac{2(1-n)}{n+1} \left[1 - \frac{1}{n+1+2\delta_1} \frac{(1+\delta_1)^{1/(n+1)}}{(1-n)^{1/(n+1)}} \right] < \\
 < \frac{2(1-n)}{n+1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\delta_1)^{1/\gamma(n)}(1-n)^{1/(n+1)}} \right] &< \frac{2(1-n)}{n+1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{((1+\delta_1)(1-n))^{1/(n+1)}} \right] \leq 0,
 \end{aligned}$$

если $2^{n+1}(1-n)(1+\delta_1) \leq 1$. При этом условии, достаточно большом $\gamma > 0$, $\tau \leq \tau_1$ и достаточно малом τ_1 коэффициент при $W^2(\tau, \xi, \eta)$ в неравенстве (3.22) отрицателен. Значит, $W \equiv 0$ в Ω и $w_1 \equiv w_2$. Теорема 1 доказана.

4. Основной результат. Теорему о разрешимости задачи (1.1), (1.2) можно вывести из теоремы 1, обращая преобразование (2.1), (2.2) по формуле

$$y = \frac{t^{1/n}}{x^{(n-1)/(n(n+1))}U^{-\delta(n)}} \int_0^{u/U} \frac{ds}{w^{1/n}(t^{1/\gamma(n)}, x, s)}$$

аналогично тому, как это сделано в [3].

Теорема 2. Пусть $U(t, x) = txV(t, x)$, $v_0(t, x) = x^{(n-1)/(n+1)}v_1(t, x)$, $V(t, x) > 0$, функции $V(t, x)$, $V_x(t, x)$, V_t/V , $v_1(t, x)$ имеют ограниченные производные первого порядка по t и x , $V(0, x) = a = \text{const} > 0$, $V_x(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Тогда в области D при $T = \tau_1^{\gamma(n)}$ существует решение задачи (1.1), (1.2), обладающее следующими свойствами: u/U и $u_y^n/x^{2/\gamma(n)}V(t, x)$ непрерывны и ограничены в D , $u > 0$ при $tx > 0$, $u_y^n/x^{2/\gamma(n)}V(t, x) > 0$ при $t > 0$, $u_y \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$; u_x , u_y , u_{yy} , u_t , v_y ограничены и непрерывны по y ; $tu_y^{n-2}u_{yy}/x^{(n-1)/(n+1)}V(t, x)$, v непрерывны в D по y и ограничены при ограниченных y . Имеют место неравенства

$$t^{1/\gamma(n)}Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-\alpha t^{1/\gamma(n)}} \leq \frac{u_y^n}{x^{2/\gamma(n)}V(t, x)} \leq t^{1/\gamma(n)}Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{\alpha t^{1/\gamma(n)}},$$

$$t^{1/\gamma(n)}Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{\beta t^{1/\gamma(n)}} \leq \frac{tnu_y^{n-2}u_{yy}}{x^{(n-1)/(n+1)}V(t, x)} \leq t^{1/\gamma(n)}Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-\beta t^{1/\gamma(n)}},$$

$$-K_7 \leq \frac{nt}{V^{1/n}}((n-2)u_y^{n-3}u_{yy}^2 + u_y^{n-2}u_{yyy}) \leq -K_8,$$

$$\left(1 + K_2^{1/n} \frac{1-n}{1+n} x^{(n-1)/(n(n+1))} t^{-1/(n(n+1))} U^{-\delta(n)} \exp\{(\alpha/n)t^{1/\gamma(n)}\} y\right)^{(n+1)/(n-1)} \leq 1 - \frac{u}{U} \leq$$

$$\leq \left(1 + K_1^{1/n} \frac{1-n}{1+n} x^{(n-1)/(n(n+1))} t^{-1/(n(n+1))} U^{-\delta(n)} \exp\{-(\alpha/n)t^{1/\gamma(n)}\} y\right)^{(n+1)/(n-1)}.$$

Для достаточно больших y справедливо асимптотическое равенство

$$1 - \frac{u}{U} = \Phi^{(n+1)/(n-1)}(t, x, y) + O\left(\frac{\ln \Phi(t, x, y)}{\Phi(t, x, y)}\right),$$

где

$$\Phi(t, x, y) = 1 + \frac{1-n}{1+n} \left(\frac{(n+1)a^{\delta(n)}}{2(1-n)\nu n}\right)^{1/(n+1)} x^{(n-1)/(n(n+1))} t^{-1/(n(n+1))} U^{-\delta(n)} (1 + O(t^{n/(n+1)})) y.$$

При $2^{n+1}(1-n)(1+\delta_1) \leq 1$, где δ_1 – некоторая постоянная, $0 < \delta_1 < 1$, решение задачи (1.1), (1.2), обладающее указанными свойствами, единственно.

Условию, при котором доказана единственность решения, удовлетворяют показатели $n \geq 0.7$. Мы полагаем, что утверждение верно и при всех $n > 0.5$, но это ограничение уже существенно и не может быть ослаблено без дополнительных предположений относительно свойств функций U и v_0 .

Результаты данной работы обобщаются на случаи $V(0, x) = a(x) \neq \text{const}$ и $U(t, x) = t^N U_1(1, x)$, $N > 1$, $U_1(t, x) > 0$ при $tx > 0$ лишь с некоторыми усложнениями технического характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blasius H. // ZAMP. 1908. V. 56. № 1. P. 1–37.
2. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М., 1962.
3. Олейник О.А. // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. № 5. С. 1199–1220.
4. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М., 1997.

Московский государственный
университет печати

Поступила в редакцию
10.10.2002 г.