Е. К. Беговатов, Р. А. Минлос, А. Н. Шерстнев, Сообщение о летней математической школе “Некоммутативная теория вероятностей. II”, *УМН*, 1979, том 34, выпуск 5, 242–246

*1979 г. сентябрь—октябрь* *т. 34, вып. 5(209)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

# СООБЩЕНИЕ О ЛЕТНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ «НЕКОММУТАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. II»

Е. К. Беговатов, Р. А. Минлос, А. Н. Шерстнёв

Летом 1978 г. с 28 июня по 7 июля под Казанью, в молодежном лагере «Волга» работала 2-я математическая школа по так называемой «некоммутативной теории вероятностей» (первая школа под таким же названием проходила в 1971 г., в том же месте). Тематика школы: математическая статистическая физика, квантовая теория поля, квантовая теория рассеяния, операторные алгебры и некоторые их приложения в математической физике, «случайные среды» и т. д. Из-за обилия материала, а также из-за различия в уровнях знаний участников читались параллельно два цикла лекций: общеобразовательный и продвинутый циклы. Общеобразовательный цикл включал лекции по основам статистической физики (Б. М. Гуревич, Ю. М. Сухов, Р. Л. Добрушин), введение в конструктивную теорию поля (Р. А. Минлос), начала теории калибровочных полей (А. С. Шварц), введение в динамику бесконечных систем частиц (Р. Л. Добрушин), лекции по логическим структурам, связанным с квантовой механикой (Е. А. Морозова, Н. Н. Ченцов), теория квантованных солитонов (В. Н. Сушко), интегрирование в операторных алгебрах (А. Н. Шерстнев). В продвинутом цикле были прочитаны лекции: по квантовой теории рассеяния в многочастичных системах (Д. Р. Яфаев, А. Ф. Вокуленко), по рассеянию в теории поля (В. Д. Кошманенко), об инстантонах в теории Янга — Миллса (А. С. Шварц), о структуре спектра трансфер-матриц гиббсовских полей (Р. А. Минлос), по кластерным разложениям для гиббсовских полей (В. А. Малышев), лекции об автомодельных распределениях (Р. Л. Добрушин), краткое изложение теории твисторов (С. Г. Гиндикин), точно решаемые модели классических полей (Л. А. Тахтаджян), о спектре случайных квантовых сред (С. А. Молчанов), об асимптотической коммутативности (В. Я. Голодец), об индексе случайных эллиптических операторов (Б. В. Федосов, М. А. Шубин). Кроме лекций, читавшихся в первой половине дня, ежедневно пополудни проходили семинары по различным темам, связанным с общим направлением школы. Для того чтобы дать более полное представление о характере и тематике школы, мы приводим здесь тезисы некоторых лекций.

В. Я. Голодец «Асимптотическая коммутативность в алгебрах фон Неймана и модулярные операторы». Пусть $M$ — алгебра фон Неймана, $\rho$-точечное нормальное (т. норм.) состояние на $M$. Через $C_M^U$ обозначим алгебру, элементами которой являются $U$ — центральные последовательности в $M$, т. е. $\bar{x} = (x_n) \in C_M^U$, если $s^*\text{-}\lim\limits_{n \in U} [x, x_n] = 0$ для любого $x \in M$, где $U$ — свободный ультрафильтр на $M$. Доказывается, что $C_M^U$ — алгебра фон Неймана с т. норм. состоянием $\rho_U(x) = \lim\limits_{n \in U} \rho(x_n)$, причем $\rho_U$ не зависит от выбора $\rho$ на $M$. Более того, модулярная группа $\sigma_t^U$ алгебры $C_M^U$ индуцируется модулярной группой $\sigma_t^\rho$ алгебры $M$. С помощью рассмотрения $C_M^U$ доказано, что факторы типа $\mathrm{III}_0$

и $\mathrm{II}_\infty$ не могут быть асимптотически абелевыми, а если $\theta \in \mathrm{Aut}\, M$ и $M$ являются асимптотически абелевой относительно $\theta$, то на $M$ существует т. норм. $\theta$ — инвариантное состояние (проблемы А. Конна и Е. Вудса). Использование $C_M^U$ позволяет также доказать, что все инъективные факторы типа $\mathrm{III}_1$, обладающие т. норм. почти периодическим весом, изоморфны фактору Араки — Вудса. Если $C_M^U$ — алгебра типа $\mathrm{III}_1$, то множество асимптотических отношений $A(M)$ фактора $M$ есть $(0, \infty)$, если типа $\mathrm{III}_\lambda$ $(0 < \lambda < 1)$, то $A(M) = (\lambda^n)$, $n \in \mathbb{Z}$, если же типа $\mathrm{II}_1$, то $A(M) = \{1\}$.

В. А. Малышев «Кластерные разложения в математической физике». Разложения по теории возмущения (и, в частности, диаграмные разложения) всегда служили в физике одним из основных приемов получения качественной и количественной информации о явлениях. Наведение «строгости», т. е. доказательства сходимости рядов теории возмущений в квантовой теории поля, а также в статистической физике, столкнулось с большими комбинаторными трудностями. Существуют, однако, модели в статистической физике и квантовой теории поля, для которых найдены и изучены разложения для средних от функционалов гиббсовского поля, соответствующего этим моделям. Например, разложения Минлоса — Синая в низкотемпературной области для моделей с дискретным спином, разложения Глимма — Джаффе — Спенсера в квантовой теории поля $P(\varphi_2)$ и разложения для решетчатых систем с непрерывным спином. Эти разложения, называемые вакуумными, позволяют получить информацию о нижней части спектра соответствующего гамильтониана модели и, в частности, выяснить вопрос о кратности нижней точки спектра и о наличии в нем массовой щели. Имеется далее общий метод получения из вакуумных разложений других разложений, дающих информацию (по-видимому, полную) о любой области спектра гамильтониана. Этот метод основан на новых комбинаторных методах оценки семиинвариантов.

Получены также кластерные разложения для гиббсовских полей со степенным убыванием корреляций (физически это соответствует частицам с нулевой массой). И для возмущений гауссовских полей со степенным убыванием корреляций на основе этих разложений удается построить поле с нарушенной непрерывной симметрией, а также учесть дебаевское экранирование в кулоновских системах.

Р. А. Минлос «Спектр трансфер-матрицы гиббсовского случайного поля». Для ряда физических систем полугруппа операторов $\mathfrak{I}_t = \exp\{-tH\}$ $t > 0$, $H$-гамильтониан системы, оказывается, может быть представлена как полугруппа операторов условного математического ожидания (трансфер-матрица) для некоторого стационарного марковского процесса $\{\xi_t, t \in R'\}$, со значениями в некотором пространстве $X$. В наиболее интересных случаях, когда $X = YZ^\nu$ и $Y$ — некоторое «простое» множество, а соответствующее марковское поле является гиббсовским, удается установить так называемую кластерность трансфер-матрицы, т. е. указать базис $\{V_I, I \in \mathfrak{M}(Z^\nu)\}$, где $\mathfrak{M}(Z^\nu)$ множество финитных целочисленных функций на $Z^\nu$, в котором матричные элементы $(\mathfrak{I}_t V_I, V_{I'}) = a_{I, I'}$, $I, I' \in \mathfrak{M}(Z^\nu)$ представляются в виде

$$a_{I, I'} = \sum_{\substack{(T_1, \ldots, T_k),\ T_i \cap T_j = \varnothing,\ T'_i \cap T'_j = \varnothing,\ i \neq j, \\ (T'_1, \ldots, T'_k) \cup T_i = \mathrm{supp}\, I,\ \cup T'_i = \mathrm{supp}\, I',}} \prod \omega(I_{T_i}, I'_{T'_i}) \tag{1}$$

где $I_T$ — сужéние функций $I$ на подмножество $T \subseteq \mathrm{supp}\, I$, а функция $\omega(I, I')$, $I, I' \in \mathfrak{M}(Z^\nu)$ удовлетворяет кластерной оцéнке

$$|\,\omega(I, I')\,| < C\varkappa^{|I|+|I'|}\beta^{d_{\mathrm{supp}\, I \,\cup\, \mathrm{supp}\, I'}}, \tag{2}$$

где $\varkappa \ll 1$, $\beta < 1$, и $d_B$ длина — минимального связного графа, построенного на точках $B \subset Z^\nu$. Разложение (1) вместе с оценкой (2) позволяет достаточно подробно исследовать спектр оператора $\mathfrak{I}_t$. В частности, в определенных случаях удается доказать существование одно-, двух- и т. д. $k$-частичных инвариантных подпространств у оператора $\mathfrak{I}_t$. По-видимому, для кластерных операторов верна гипотеза о многоканальной структуре рассеяния, подобно тому как описывается рассеяние многочастичного оператора Шрёдингера.

С. А. Молчанов «Спектральные свойства неупорядоченных структур». При изучении квантовых свойств электронов в твердом теле уже давно пользуются так называемым одноэлектронным приближением. При этом взаимодействие одного свободного электрона с прочими электронами и потенциальным полем среды заменяют некоторым суммарным потенциальным полем $q(x)$ и сводят дело к одночастичному гамильтониану. Эта процедура напоминает то, что происходит в классической теории Кюри—Вейсса. В итоге мы приходим к задаче об изучении спектра и волновых функций оператора Шрёдингера $H=-\Delta+q(x)$, $x\in R^{\nu}$. Требование пространственной однородности приводит к тому, что в случае идеальных кристаллов потенциал $q(x)$ — периодическая функция в $R^{\nu}$. Если же среда является неупорядоченной, то $q(x)=q(x, \omega)$ — это реализация стационарного случайного поля. В последнем случае физический смысл имеют спектральные свойства не какой-то конкретной реализации $H(\omega_0)=-\Delta+q(x, \omega_0)$, а свойства, выполненные с вероятностью 1 (в смысле меры $P(d\omega)$ на ансамбле реализаций $q$).

В многомерном случае ($\nu\geqslant 2$) о спектре операторов $H(\omega)$ известно немного, зато при $\nu=1$ к настоящему времени картина строения спектра в основном ясна. Удобно считать, что в случае $x\in R$ потенциал $q(x,\omega)$ — стационарный марковский процесс (или функция от такого процесса). Приведем ряд недавних результатов о качественной природе таких «марковских» случайных операторов Шрёдингера.

Теорема 1 (Гольдштейн, Молчанов, Пастур). *С вероятностью 1 спектр «марковского» оператора* $H(\omega)=-\dfrac{d^2}{dx^2}+q(x, \omega)$ *заполняет полупрямую* $S=(\inf\limits_{x\in R} q(x, \omega), +\infty)$. *Спектральная мера оператора $H$ — чисто точечная. Ее атомы всюду плотны в $S$. Другими словами, оператор $H$ имеет с вероятностью 1 полную ортонормированную систему собственных функций из $\mathscr{L}^2(R)$.*

Подчеркнем, что в случае идеальных кристаллов ($q(x)$ — периодична) картина прямо противоположная: спектральная мера абсолютно непрерывна, присоединенные собственные функции (блоховские функции) квазипериодичны.

Теорема 2 (Молчанов). *Собственные функции оператора $H$ не просто принадлежат $\mathscr{L}^2(R)$, а экспоненциально убывают на бесконечности (экспоненциально локализованы).*

Результаты теорем 1, 2 показывают, что электроны в одномерной неупорядоченной среде не могут обладать большой подвижностью. В связи с этим естественным представляется следующий результат:

Теорема 3 (Бычков, Молчанов). *Если $\sigma(\omega)$ — проводимость на частоте $\omega$, то $\sigma(o)=\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega)=0$. Более того, $\sigma(\omega)=O(\omega^2\ln(1/\omega))$.*

Получены результаты и о некоторых других физически интересных объектах, связанных с оператором $H$: точке Ферми, плотности состояний, радиусе локализации и т. д.

Е. А. Морозова, Н. Н. Ченцов «Некоммутативные распределения вероятностей» и «Некоммутативные логики». Класс решеток $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ идемпотентов-ортопроекторов, принадлежащих унитарной йордановой алгебре $\mathfrak{A}$ эрмитовых операторов, охарактеризован как класс квантовых логик. Указаны возникающие в них проективно-евклидовы конфигурации. Система ортодополнительных решёточных операций Биркгофа — фон Неймана в логиках расширена до полной, для чего решетчатая операция пересечения подпространств заменена более широкой некоммутативной операцией и добавлена неклассическая операция суперпозиции изоклинных подпространств (точнее, семейство операций, зависящее от параметра, включающего сдвиг фаз).

Изучена характеризация распределений вероятностей на такой логике $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$, отвечающих нормированным неотрицательным линейным функционалам на соответствующей алгебре $\mathfrak{A}$. Кроме аддитивности распределения на ортогональных подпространствах, для его значений на любом пучке изоклинных подпространств выполнено известное (для частично поляризованного света) соотношение Миллюса. Последнее существенно для факторных логик спинорного типа, имеющих формальную размерность два (над гиперкомплексными клиффордовыми числами).

А. С. Шварц «Инстантоны». Калибровочное поле (поле Янга — Миллса) — это векторное поле $A_\alpha$, принимающее значения в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ компактной группы $G$ (калибровочной группы). Напряженность калибровочного поля определяется формулой

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta].$$

Два поля $A_\alpha$ и $A'_\alpha$ калибровочно эквивалент если

$$A'_\alpha(x) = g(x)A_\alpha(x)g^{-1}(x) - (\partial_\alpha g)g^{-1}(x),$$

где $g(x)$ — функция со значениями в группе $G$. Действие, отвечающее полю $A_\alpha$, определяется формулой

$$S(A) = \frac{1}{2e^2} \int \langle F_{\alpha\beta}, F^{\alpha\beta}\rangle\, d^4x, \tag{3}$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в алгебре $\mathfrak{G}$, $F_{\alpha\beta} = q_{\alpha\rho}q_{\beta\sigma}F^{\rho\sigma}$, $q_{\alpha\beta}$ — метрика пространства Минковского. Заменив в формуле (3) метрику Минковского на метрику Евклида, получаем определение евклидова действия калибровочного поля.

Будем считать калибровочную группу $G$ простой компактной неабелевой группой. В этом случае каждому полю с конечным евклидовым действием можно сопоставить число

$$q = \frac{1}{32\pi^2}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \int \langle F_{\alpha\beta}, F^{\gamma\delta}\rangle\, d^4x$$

— топологическое число этого поля. При соответствующей нормировке скалярного произведения в $\mathfrak{G}$ число $q$ является целым. Пространство полей с конечным евклидовым действием распадается, таким образом, на компоненты, состоящие из полей с фиксированным топологическим число. Можно показать, что евклидово действие $S(A)$ поля $A_\alpha$ оценивается снизу числом $8\pi^2e^{-2}\,|\,q\,|$ и что $S(A) = 8\pi^2e^{-2}\,|\,q\,|$ в том и только в том случае, если

$$F_{\alpha\beta} = *F_{\alpha\beta} \quad \text{при} \quad q \geqslant 0, \tag{4}$$

или

$$F_{\alpha\beta} = -*F_{\alpha\beta} \quad \text{при} \quad q \leqslant 0. \tag{5}$$

Символ $*F_{\alpha\beta}$ обозначает двойственный тензор (в евклидовом пространстве $*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}$). Решения уравнений (4) и (5) являются, таким образом, экстремалями евклидова действия. Решения уравнения (4) — уравнения дуальности — называются инстантонами, решения уравнения (5) носят названия анти-инстантонов.

Можно рассматривать действие (3) также на произвольном четырехмерном римановом многообразии. В этом случае следует заменить элемент $d^4x$ на элемент объема в этом многообразии, а в определение дуального тензора включить множитель $(\det q_{\alpha\beta})^{1/2}$. Сформулированные выше утверждения переносятся и на этот случай. Уравнения дуальности конформно инвариантно, поэтому решение этого уравнения в евклидовом пространстве можно заменить решением уравнения дуальности на четырехмерной сфере.

Для исследования уравнения дуальности были использованы тонкие методы топологии в алгебраической геометрии (Атья и Уорд, Дринфельд и Манин, Шварц). В частности, с помощью теории индекса эллиптических операторов была вычислена размерность многообразия инстантонов. Например, в случае $G = SU(2)$ инстантоны на сфере $S^4$ образуют $(8\,|\,q\,| - 3)$-мерное многообразие (Шварц) (калибровочно эквивалентные инстантоны отождествляются).

Инстантоны оказываются существенными при изучении квантовой теории калибровочных полей. Они возникают при исследовании континуальных интегралов для евклидовой функции Грина (функции Швингера) методом наискорейшего спуска. При этом исследовании необходимо вычислять детерминанты некоторых эллиптических операторов. Возникающие при этом выражения сходны с аналитическим кручением Рея — Зингера.

Для их изучения можно применять методы,применяющиеся при доказательстве независимости кручения Рея — Зингера от выбора римановой метрики. Обратно, отмеченная выше аналогия позволяет вскрыть физический смысл кручения Рея — Зингера и построить новые инварианты типа инвариантов Рея — Зингера.

А. Н. Шерстнёв «К общей теории интегрирования в алгебрах операторов». В лекции изложена теория пространств $L_1$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом в алгебре Неймана. Дается содержательное описание указанного пространства: это сделано с помощью специально разработанного аппарата билинейных форм. Показано, что развитая теория является обобщением сигаловской теории некоммутативного интегрирования относительно следа для случая интегрирования с весом. Построенная теория развивается в следующих направлениях: изучена связь интегрируемых билинейных форм с операторами, построена теория условного математического ожидания в пространстве интегрируемых билинейных форм и установлена связь этого понятия с традиционным понятием условного ожидания в алгебрах Неймана.