



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. I. Pugach, On the homological dimension of Banach algebras of smooth functions, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 175–176

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

January 22, 2025, 23:50:21



**О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР
ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ**

Л. И. П у г а ч

В настоящей заметке вычисляется малая глобальная размерность (введенная А. Я. Хелемским в работе [1]) указанных в заглавии алгебр. Эта характеристика, тесно связанная с группами когомологий банаховых алгебр (а следовательно, и со свойствами их расширений, дифференцирований и возмущений), вычислена или оценена для многих традиционных классов коммутативных банаховых алгебр (к. б. а.): так, она равна единице для алгебры всех непрерывных функций на метризуемом бикомпакте и конечна для некоторых алгебр аналитических функций (см. [1], [2]). Однако не было известно, какова она для занимающих промежуточное по составу элементов положение банаховых алгебр непрерывно дифференцируемых функций.

Ниже приводится неравенство для норм некоторых элементов идеалов конечной гомологической размерности в коммутативных банаховых алгебрах, с помощью которого оценивается снизу (и оказывается бесконечной) малая глобальная размерность алгебр непрерывно дифференцируемых функций и алгебр последовательностей с весами. Таким образом, банаховы алгебры гладких функций «гомологически плохо устроены», в отличие от алгебр Фреше бесконечно дифференцируемых функций [3].

Напомним, что пространство максимальных идеалов M_A к. б. а. A естественно вкладывается в сопряженное пространство A^* . Поэтому для $t \in M_A$ и замкнутого подпространства $I \subset A$ определена норма $\|t\|_I$ сужения функционала t на подпространство I .

Т е о р е м а 1. Пусть A — к. б. а. с единицей, I — замкнутый идеал в A , обладающий аппроксимативной единицей, M — содержащий его максимальный идеал. Если гомологическая размерность A -модуля I равна n , то существует $C > 0$ такое, что для любых $a_i \in I$, $s_i \in M_A$ ($0 \leq i \leq n$)

$$(*) \quad |\det(a_i(s_j))| \leq C \|a_0\| \dots \|a_n\| \|s_0\|_I \|s_1\|_M \dots \|s_{n-1}\|_M \|s_n\|_I (\|s_0\|_M + \dots + \|s_n\|_M).$$

Ограничимся наброском доказательства: из условия следует, что стандартная проективная резольвента (см. [1]) A -модуля I расщепима в n -м члене. Норма расщепляющего морфизма оценивается на элементах стандартного вида (альтернированных суммах элементарных тензоров), при этом используется мультипликативность функционалов s_i — так получается искомое неравенство. Покажем, какие результаты дает оно в применении к упомянутым алгебрам (отметим, что содержательные утверждения могут возникнуть лишь для идеалов с неограниченными аппроксимативными единицами). Малую глобальную размерность алгебры A обозначаем $ds A$.

1. Пусть $A = C^1[0, 1]$ — алгебра непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ комплекснозначных функций с нормой $\|f\| = \max |f(t)| + \max |f'(t)|$ (максимум по $\in [0, 1]$). Обозначим через M максимальный идеал в A , соответствующий точке 0, через $I = M^2$ — его топологический квадрат. Как известно (см. [4], с. 230), M обладает аппроксимативной единицей и имеет коразмерность 2 в A . Нам потребуется

П р е д л о ж е н и е 1. Для $x \in [0, 1]$ $x/2 \leq \|x\|_I \leq \|x\|_M \leq x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a \in M$, то $|a(x)| = |xa'(\eta)| \leq x \|a\|$, откуда следует правое неравенство. Для $\delta > 0$ рассмотрим функцию $a(t) = t^{1+\delta}$. Очевидно, $a \in I$ и $\|a\| = 2 + \delta$. Следовательно, $\|x\|_I \geq |a(x)| \|a\|^{-1} = x^{1+\delta} (2 + \delta)^{-1}$. Ввиду произвольности δ левое неравенство доказано. Среднее неравенство очевидно.

С л е д с т в и е. Для $0 \leq x < y \leq 1$ существует функция $R_{x,y} \in I$, равная нулю на отрезке $[0, x]$ и единице в точке y , причем $\|R_{x,y}\| \leq 3(y-x)^{-1}$.

Действительно, из предложения 1 следует существование функции $b \in I$ такой, что $\|b\| = 1$, $|b(y-x)| > (y-x)/2 - \varepsilon > (y-x)/3$. Положим $R_{x,y}(t) = 0$ на отрезке $[0, x]$ и $R_{x,y}(t) = b(t-x)/b(y-x)$ для $t \in [x, 1]$.

Т е о р е м а 2. $ds C^1[0, 1] = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае для некоторого $n \in \mathbb{N}$ гомологическая размерность конечномерного A -модуля A/I равна n , а тогда сам I имеет гомологи-

ческую размерность $n - 1$ ([1], лемма 2.4). Зафиксируем $\sigma \in (0, 1/n)$ и положим для $1 \leq k \leq n$ $x_k = k\sigma$, $a_k = R^{(k-1)\sigma, k\sigma}$. Применим неравенство (*) к точкам $x_k \in [0, 1]$ и функциям $a_k \in I$. Заметим, что матрица $(a_i(s_j))$ треугольная с единицами на диагонали. Ввиду предложения 1 и следствия из него неравенство примет вид $1 \leq C(3/\sigma)^n n! \sigma^n (\sigma + 2\sigma + \dots + n\sigma)$, откуда $1 \leq D\sigma$ для некоторой константы D . Но это противоречит произвольности σ .

З а м е ч а н и я. А) В применении к алгебре $C^k[0, 1]$ ($k > 1$) наш метод дает лишь оценку $ds C^k[0, 1] > \sqrt{2k}$ ввиду отсутствия аналога предложения 1 и следствия. Б) Результаты сохраняются для алгебр $C^k(U)$, где U — замкнутая область в \mathbb{R}^n .

2. Пусть дана последовательность чисел $\alpha_n \geq 1$. Рассмотрим банахову алгебру $B = \{c = (c_n), c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, \alpha_n c_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\}$ с нормой $\|c\| = \sup\{\alpha_n |c_n|, n \in \mathbb{N}\}$. Через A обозначим результат присоединения единицы к B .

Предложение 2. Если $\sup\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\} = \infty$, то $ds A = \infty$.

Доказательство. В противном случае A -модуль B имеет гомологическую размерность $m - 1$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда для $I = M = B$ выполнены все предположения теоремы 1. Применим неравенство (*) к точкам $t_i \in M_B$ и их индикаторам $e_i \in B$ ($1 \leq i \leq m$). Получим

$$1 \leq C \|e_1\| \dots \|e_m\| \|t_1\| \dots \|t_m\| (\|t_1\| + \dots + \|t_m\|).$$

Но, как легко видеть, в алгебре B $\|e_t\| \|t\| = 1$ для $t \in M_B$. Следовательно, $1 \leq C(\|t_1\| + \dots + \|t_m\|)$. Но это противоречит тому, что $\inf\{\|t\|, t \in M_B\} = \inf\{\alpha_n^{-1}, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Я. Х е л е м с к и й. О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами.— Матем. сб. 1970, 81 : 3, с. 430—444.
- [2] А. Я. Х е л е м с к и й. О гомологической размерности банаховых алгебр аналитических функций.— Матем. сб. 1970, 83 : 2, с. 222—233.
- [3] J. L. Т а у л о г. Homology and cohomology for topological algebras.— Adv. in Math., 1972, 9, p. 137—182.
- [4] И. М. Г е л ь ф а н д, Д. А. Р а й к о в, Г. Е. Ш и л о в. Коммутативные нормированные кольца.— М.: Физматгиз, 1960.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества
25 февраля 1981 г.