



Общероссийский математический портал

С. И. Кумков, В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов, Построение множества разрешимости в задаче проводки самолета при ветровом возмущении, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2005, том 11, номер 1, 149–159

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

19 марта 2025 г., 15:36:50



УДК 62.50

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ПРОВОДКИ САМОЛЕТА ПРИ ВЕТРОВОМ ВОЗМУЩЕНИИ¹**С. И. Кумков, В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов**

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений четвертого порядка, в упрощенном виде описывающая управляемое движение самолета в горизонтальной плоскости при наличии ветрового возмущения. Векторное управляющее воздействие имеет две компоненты, ограниченные по модулю. Одна компонента влияет на величину скорости, другая определяет изменение угла направления вектора скорости. Оговорен уровень максимального ветрового возмущения. Исследуется задача о возможности гарантированного перевода самолета из начального состояния на заданное терминальное множество в фиксированный момент времени с соблюдением фазовых ограничений в промежуточные моменты времени. На основе методов теории дифференциальных игр предложен алгоритм понятного построения множества разрешимости задачи о гарантированном переводе. Приведены результаты численного построения множеств разрешимости.

Введение

В системах предотвращения столкновений воздушных судов актуальной является задача приведения самолета из начального состояния в заданную область в назначенный момент времени. При этом в некоторые промежуточные моменты времени траектория должна проходить через другие заданные области пространства. Последовательность таких моментов и соответствующих областей вдоль траектории стандартного маневра задаются диспетчером службы управления воздушным движением с целью обеспечения безопасного расхождения конфликтующих судов.

Полезно иметь быстрый вычислительный алгоритм, позволяющий ответить на вопрос о возможности проведения самолета через заданные области, но уже при наличии ветровых возмущений.

В работе такой алгоритм предлагается для случая движения самолета в горизонтальной плоскости. Относительно ветрового возмущения считается известным лишь интервал возможных значений его скорости. Движение самолета описывается при помощи системы дифференциальных уравнений четвертого порядка, где две фазовые координаты имеют смысл геометрического положения самолета, третья координата — угол направления вектора скорости и четвертая — величина скорости. Таким образом, построения проводятся в четырехмерном фазовом пространстве.

Рассматриваемая задача трактуется как задача о нахождении множества разрешимости дифференциальной игры наведения [1, 2] на терминальное множество в фиксированный момент окончания при наличии фазовых ограничений, оговоренных в промежуточные моменты времени. Для решения задачи используется понятная процедура, основу которой составляют алгоритмы построения множеств достижимости, операции пересечения множеств и построения выпуклых оболочек. Подобная процедура (но только в прямом времени) использовалась ранее [3, 4] для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости при неточных замерах его геометрического положения.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке компании “Новые информационные технологии в авиации” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-96099).

1. Постановка задачи

Считаем, что движение самолета в горизонтальной плоскости (рис. 1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi + v_1, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi + v_2, \\ \dot{\varphi} &= \frac{ku}{V}, \\ \dot{V} &= w, \end{aligned} \quad V \geq c > 0. \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения; v_1, v_2 — компоненты вектора v ветрового возмущения; φ — угол между вектором скорости самолета и осью Ox ; V — величина скорости (в невозмущенной среде); k — максимальное боковое ускорение; u, w — управляющие воздействия. Предполагаем, что управления u, w , а также помеха v стеснены геометрическими ограничениями

$$|u| \leq 1, \quad |w| \leq \mu, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^2,$$

где Q — выпуклое компактное множество.

Система (1.1), хотя и является упрощенной (отсутствуют факторы, связанные с влиянием ветровой помехи на аэродинамику движения), широко используется (см., например, [5, стр. 81–82]) в навигационных расчетах для построения опорных траекторий, составления полетных планов и т.д. Известны математические работы [6, 7], где система (1.1) применялась при $v = 0$ для решения задач оптимального управления, связанных с движением самолета или автомобиля.

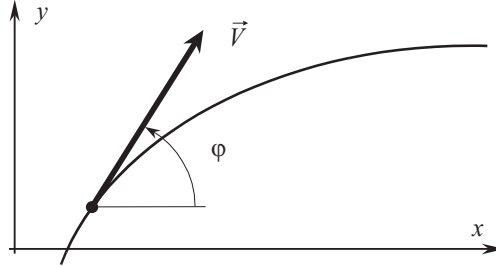


Рис. 1. Система координат.

Условимся, что значения координаты φ , отличающиеся на величину, кратную 2π , отождествляются. Положим $\mathbb{R}_c = \{V: V \geq c\}$. Пусть

$$\Phi = \mathbb{R}^2 \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_c$$

— фазовое пространство задачи.

Будем говорить, что управляющие воздействия u, w принадлежат первому игроку, а векторное мешающее воздействие v — второму.

Цель первого игрока — привести фазовый вектор системы (1.1) в фиксированный момент времени T на заданное множество $M \subset \Phi$ с соблюдением в оговоренные моменты времени $\tilde{t}_j, j = \overline{1, \omega}$, фазовых ограничений $H(\tilde{t}_j) \subset \Phi$, как бы ни действовал второй игрок. Считаем, что

$$\begin{aligned} M &= M^\# \times M^\diamond, \\ t_0 \leq \tilde{t}_1 &< \dots < \tilde{t}_j < \dots < \tilde{t}_\omega \leq T, \end{aligned}$$

$$H(\tilde{t}_j) = H^\#(\tilde{t}_j) \times H^\diamond(\tilde{t}_j), \quad j = \overline{1, \omega}.$$

Здесь $M^\#$ и $H^\#(\tilde{t}_j)$ — выпуклые компактные множества на плоскости x, y ; $M^\diamond, H^\diamond(\tilde{t}_j) \subset [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_c$ — выпуклые компакты на плоскости φ, V .

Требуется построить в пространстве $[t_0, T] \times \Phi$ максимальное множество W , из которого такое наведение возможно.

Используя терминологию книги [1], можно сказать, что W — максимальный стабильный мост в дифференциальной игре наведения на терминальное множество M .

Поясним возможное применение вычислительной программы построения множества W . Предположим, что диспетчер службы управления воздушным движением принял решение об изменении маршрута одного из самолетов. Выбирается типовой маневр на плоскости x, y . Например, на рис. 2 изображен типичный S -образный маневр (сплошная линия). Диспетчер оценивает, как можно осуществить выбранный маневр, двигаясь из начального положения (x_0, y_0) в момент t_0 с начальным направлением φ_0 вектора скорости и величиной скорости V_0 . Расчет ведется с учетом ограничений $|u(t)| \leq 1, |w(t)| \leq \mu$, и в предположении об отсутствии ветрового возмущения. Далее, на проложенной траектории диспетчер задает терминальное множество M , отнесенное к моменту времени T , а также фазовые ограничения $H(\tilde{t}_j), j = \overline{1, \omega}$. Тем самым устанавливаются допуски на отклонение самолета от стандартной траектории. На рис. 2 пунктиром показаны проекции $H^\#(\tilde{t}_j)$ множеств $H(\tilde{t}_j)$ и проекция $M^\#$ терминального множества M на плоскость x, y .

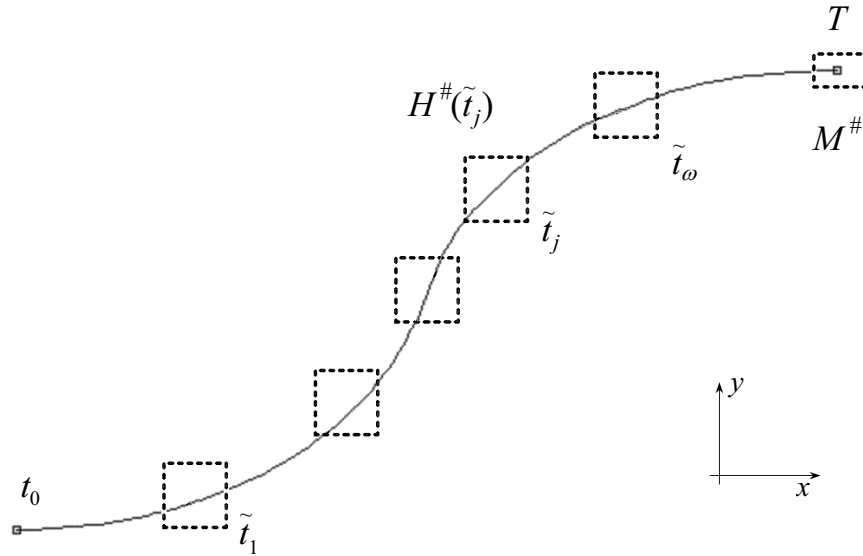


Рис. 2. Опорная траектория, фазовые ограничения и терминальное множество в проекции на плоскость x, y .

Диспетчера интересует вопрос о возможности прохождения самолета вблизи заданной траектории, но уже при наличии ветрового возмущения. Задав ограничение Q на ветровое возмущение (например, в виде $|v| \leq \nu$), он при помощи вычислительной программы просчитывает множество W . Если сечение $W(t_0)$ множества W , соответствующее начальному моменту t_0 , содержит точку $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$, то маневр самолета выбран правильно. В противном случае выбранный маневр удовлетворительным не является и его нужно изменить.

2. Попятные процедуры построения множества разрешимости. Общие соображения

В теории дифференциальных игр накоплен значительный опыт [8–19] численного построения множеств разрешимости игровой задачи наведения на заданное множество M в фиксированный момент времени T . Как было отмечено в разделе 1, множество разрешимости называется также максимальным стабильным мостом. Разработаны алгоритмы попятного построения максимальных стабильных мостов как для линейных задач, так и для задач с нелинейной динамикой (см., например, [12–15, 18, 19]).

Размерность фазового вектора системы (1.1) равна четырем. Для такой размерности реализация алгоритмов общего характера наталкивается на существенные трудности. Учет специфики системы (1.1) позволяет обойти их.

Опишем схему применяемой попятной процедуры. Численное построение сечений $W(t_i)$ максимального стабильного моста W проводится на заданной сетке моментов времени t_i , $i = \overline{0, N}$, $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$. Удобно считать, что набор моментов $\{\tilde{t}_j\}$, в которые заданы фазовые ограничения, включается в набор $\{t_i\}$. Переход от сечения $W(t_{i+1})$ к сечению $W(t_i)$ осуществляется при помощи следующих операций:

(А) построение множества достижимости $G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$ рассматриваемой системы в обратном времени на момент t_i при начальном моменте t_{i+1} , начальном множестве $W(t_{i+1})$ и при фиксированном постоянном управлении v второго игрока;

(Б) пересечение полученных множеств по $v \in Q$ и пересечение с фазовым ограничением $H(t_i)$:

$$W(t_i) = \left(\bigcap_{v \in Q} G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v) \right) \bigcap H(t_i). \quad (2.1)$$

Здесь считаем, что $H(t_i) = \mathbb{R}^4$, если в момент t_i фазового ограничения нет, т.е. $t_i \notin \{\tilde{t}_j\}$.

Если бы исследуемая система была линейной по фазовой переменной, то, опираясь на выпуклость терминального множества M и выпуклость фазовых ограничений $H(\tilde{t}_j)$, $j = \overline{1, \omega}$, получили бы выпуклость множеств достижимости $G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$, $v \in Q$. Таким образом, пришлось бы иметь дело с операциями пересечения выпуклых множеств. Пересечение выпуклых множеств — существенно более простая операция, по сравнению с операцией пересечения невыпуклых множеств. Более того, при отсутствии фазового ограничения, в задачах с линейной динамикой пересекаем множества $G(t_i; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$, $v \in Q$, отличающиеся друг от друга лишь сдвигом, обусловленным различием $v \in Q$. Это также позволяет существенно упростить процедуру пересечения.

Нелинейная система (1.1) обладает спецификой, позволяющей в значительной степени использовать перечисленные выше упрощения, характерные для линейных систем.

3. Попятная процедура построения множества разрешимости задачи наведения для системы (1.1)

Специфика системы (1.1) состоит в том, что переменные x и y , характеризующие геометрическое положение объекта, не входят в правую часть системы. Это позволяет при интегрировании движения системы рассматривать два последних уравнения независимо от двух первых. Кроме того, при фиксированных функциях $\varphi(\cdot)$ и $V(\cdot)$ два первых уравнения представляют собой весьма простой вариант линейной динамики. Управление первого игрока здесь отсутствует. Если задать на промежутке времени от момента t_{i+1} до момента t_i управление второго игрока в виде функции времени $v(\cdot)$ (в частности, постоянное управление), то множество состояний на плоскости x, y , оговоренное для момента t_{i+1} , жестко перенесется на некоторый вектор — результат интегрирования правой части при оговоренных функциях $\varphi(\cdot)$, $V(\cdot)$ и управляющем воздействии $v(\cdot)$.

Сечения $W(t_i)$ максимального стабильного моста W будем строить на сетке моментов времени t_i с достаточно малым шагом $\Delta = t_{i+1} - t_i$, $t_i < t_{i+1}$. Множество Q при этом заменяем выпуклым многоугольником с конечным числом вершин. Множества $M^\#$, M^\diamond и $H^\#(\tilde{t}_j)$, $H^\diamond(\tilde{t}_j)$ также заменяются выпуклыми многоугольниками.

За счет введения дискретизации сечения $W(t_i)$ строятся приближенно. Кроме того, в процессе построения очередного сечения будем использовать овыпукление некоторых множеств, тем самым закругляя сверху выстраиваемое сечение. (Тщательный компьютерный анализ влияния дополнительной процедуры овыпукления показывает, что вносимое закругление “не слишком велико”.) Чтобы подчеркнуть приближенность построений и применение операций, закругляющих результат сверху, будем употреблять символ $\mathbf{W}(t_i)$ вместо $W(t_i)$ для обозначения сечений, выстраиваемых по предлагаемому в работе алгоритму.

3.1. Представление четырехмерных множеств

Описание алгоритма построения множеств $\mathbf{W}(t_i)$ начнем с изложения принятого способа представления четырехмерных множеств.

На плоскости φ , V вводим прямоугольную сетку узлов $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$, не зависящую от времени. По координате φ сетка строится в диапазоне $[-\pi, \pi]$. По координате V интервал расположения узлов сетки задается на основе множества M^\diamond с учетом грубого оценивания возможного изменения величины скорости V .

Пусть

$$L(T) = \{(n, m): (\varphi_n, V_m) \in M^\diamond \cap H^\diamond(T)\},$$

$$F_{n,m}(T) = M^\# \cap H^\#(T), \quad (n, m) \in L(T),$$

Видно, что множество $F_{n,m}(T)$ одно и то же для каждого $(n, m) \in L(T)$.

Множество узлов (φ_n, V_m) , $(n, m) \in L(T)$, вместе с относящимися к ним множествами $F_{n,m}(T)$ примем за множество $\mathbf{W}(T)$. Таким образом,

$$\mathbf{W}(T) = \bigcup_{(n,m) \in L(T)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(T)).$$

В аналогичном виде будем задавать множества $\mathbf{W}(t_i)$: совокупность узлов (φ_n, V_m) , $(n, m) \in L(t_i)$, на плоскости φ , V вместе с относящимися к ним выпуклыми множествами $F_{n,m}(t_i)$ на плоскости x, y . Рекуррентная процедура построения множеств $\mathbf{W}(t_i)$ описывается в следующем пункте.

3.2. Переход от множества $\mathbf{W}(t_{i+1})$ к множеству $\mathbf{W}(t_i)$

Пусть множество $\mathbf{W}(t_{i+1})$ построено. Оно представлено в виде

$$\mathbf{W}(t_{i+1}) = \bigcup_{(n,m) \in L(t_{i+1})} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(t_{i+1})),$$

где $F_{n,m}(t_{i+1})$ — выпуклые множества.

(А) *Приближенное построение множеств $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$.*

1. Рассмотрим произвольный узел (φ_n, V_m) такой, что $(n, m) \in L(t_{i+1})$. Пусть

$$B(\varphi_n, V_m) = \left\{ \text{Pr} \left(\varphi_n - \frac{ku}{V_m} \Delta, V_m - w\Delta \right); u \in \{-1, 0, 1\}, w \in \{-\mu, 0, \mu\} \right\}.$$

Здесь $\text{Pr}(\varphi, V)$ — узел сетки $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$, ближайший к (φ, V) . Множество $B(\varphi_n, V_m)$ приближает узлами сетки $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$ множество достижимости системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{ku}{V}, \\ \dot{V} &= w, \quad |u| \leq 1, \quad |w| \leq \mu, \end{aligned} \quad (3.1)$$

из точки (φ_n, V_m) на момент $t_i = t_{i+1} - \Delta$. При этом шаг Δ согласован с параметрами сетки.

2. Символом $D_{n,m}(t_i)$ обозначим номера тех узлов с момента t_{i+1} , которые переходят в узел (φ_n, V_m) , т.е.

$$D_{n,m}(t_i) = \{(n^*, m^*) \in L(t_{i+1}): (\varphi_n, V_m) \in B(\varphi_{n^*}, V_{m^*})\}.$$

Пусть

$$K(t_i) = \{(n, m): D_{n,m}(t_i) \neq \emptyset\}.$$

Совокупность узлов (φ_n, V_m) , $(n, m) \in K(t_i)$, представляет собой в сеточной аппроксимации множество достижимости системы (3.1) на момент t_i при начальном множестве в момент t_{i+1} , составленном из узлов (φ_n, V_m) , $(n, m) \in L(t_{i+1})$.

3. Каждому узлу (φ_n, V_m) , $(n, m) \in K(t_i)$, поставим в соответствие объединение

$$A_{n,m}(t_i, 0) = \bigcup_{(n^*, m^*) \in D_{n,m}(t_i)} (F_{n^*, m^*}(t_{i+1}) - \Delta V_{m^*}(\cos \varphi_{n^*}, \sin \varphi_{n^*})').$$

Здесь верхний индекс штрих означает транспонирование. Множество $A_{n,m}(t_i, 0)$ приближает сечение четырехмерного множества достижимости $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$ системы (1.1) при $\varphi = \varphi_n$ и $V = V_m$ (для случая $v = 0$). Поскольку каждое множество $F_{n^*, m^*}(t_{i+1})$ на плоскости x, y является выпуклым, то $A_{n,m}(t_i, 0)$ есть объединение выпуклых множеств на плоскости.

Строим выпуклую оболочку

$$S_{n,m}(t_i, 0) = \text{conv } A_{n,m}(t_i, 0). \quad (3.2)$$

Пусть

$$\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0) = \bigcup_{(n, m) \in K(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times S_{n,m}(t_{i+1}, 0)).$$

Множество $\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$ оценивает сверху (с учетом погрешностей дискретизации) множество достижимости $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$.

4. Отмеченные выше специфические свойства системы (1.1) позволяют легко построить аналогичное множество $\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$ для любого постоянного $v \in Q$. А именно,

$$\mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v) = \bigcup_{(n, m) \in K(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times S_{n,m}(t_{i+1}, v)),$$

где

$$S_{n,m}(t_i, v) = S_{n,m}(t_{i+1}, 0) - \Delta v.$$

(Б) *Построение множества $\mathbf{W}(t_i)$.*

5. Чтобы найти пересечение $\bigcap_{v \in Q} \mathbf{G}(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$, достаточно построить для каждого $(n, m) \in K(t_i)$ пересечение

$$E_{n,m}(t_i) = \bigcap_{v \in Q} S_{n,m}(t_i, v).$$

Выполнение этой операции сводится к нахождению положительно-однородной функции

$$\gamma_{n,m}(\ell, t_i) = \min_{v \in Q} \rho(\ell, S_{n,m}(t_i, v)), \quad \ell \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3)$$

где $\rho(\cdot, S_{n,m}(t_i, v))$ — опорная функция множества $S_{n,m}(t_i, v)$, и последующему построению выпуклой оболочки $\text{conv } \gamma_{n,m}(\cdot, t_i)$. Таким образом, получаем опорную функцию

$$\rho(\cdot, E_{n,m}(t_i)) = \text{conv } \gamma_{n,m}(\cdot, t_i)$$

множества $E_{n,m}(t_i)$. При реализации операции минимума в (3.3) перебираем лишь вершины многоугольника, аппроксимирующего множество Q .

6. Пусть

$$L(t_i) = \{(n, m) \in K(t_i): (\varphi_n, V_m) \in H^\diamond(t_i)\},$$

$$F_{n,m}(t_i) = E_{n,m}(t_i) \cap H^\#(t_i), \quad (n, m) \in L(t_i).$$

Учитывая (2.1) и принятый способ представления четырехмерных множеств, имеем

$$\mathbf{W}(t_i) = \bigcup_{(n,m) \in L(t_i)} (\{\varphi_n, V_m\} \times F_{n,m}(t_i)).$$

Подчеркнем, что именно за счет операции овыпукления, присутствующей в формуле (3.2), получаем выпуклость множеств $F_{n,m}(t_i)$. Последнее, наряду с использованием сетки по координатам φ, V , определяет простоту реализации попятной процедуры. Операция овыпукления несколько расширяет выстраиваемую трубку множества разрешимости, по сравнению с действительной.

Алгоритм, состоящий из шагов 1–6, во многом аналогичен тому, что был разработан [3, 4] для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости. В работах [3, 4] приведено сравнение точных множеств достижимости системы (1.1) с множествами, полученными при помощи операции построения выпуклой оболочки объединения выпуклых множеств. Показано, что возникающие ошибки не являются существенными с практической точки зрения.

З а м е ч а н и е. Построение управления по принципу обратной связи, удерживающего движение самолета в условиях ветрового возмущения внутри множества разрешимости, является самостоятельной задачей и в данной работе не рассматривается.

4. Результаты моделирования

Для моделирования работы описанного алгоритма были выбраны следующие числовые данные:

- максимальное боковое ускорение самолета $k = 4 \text{ м/с}^2$;
- максимальное управляющее продольное ускорение $\mu = 2 \text{ м/с}^2$;
- ограничение на ветровое возмущение задавалось в виде $|v| \leq \nu$; значение параметра ν бралось из диапазона $16 \text{ м/с} \div 22 \text{ м/с}$;
- начальный момент времени $t_0 = 0 \text{ с}$;
- общее время движения $T = 120 \text{ с}$;
- начальная позиция самолета: $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 0 \text{ м}$, $\varphi_0 = 0^\circ$, $V_0 = 200 \text{ м/с}$;
- координаты опорной терминальной точки в момент T : $x_T = 15216 \text{ м}$, $y_T = 8543 \text{ м}$, $\varphi_T = 0^\circ$, $V_T = 200 \text{ м/с}$;

- опорная фазовая траектория между начальной позицией и опорной терминальной точкой строилась при помощи программных управлений (с “запасом” на неизвестные возмущения) $u = 0.8$, $w = -1.5$ м/с² на интервале времени $[0, 60]$ с и $u = -0.8$, $w = 1.5$ м/с² на интервале $[60, 120]$ с;
- терминальное множество M имело размер ± 300 м по координате x , ± 300 м по координате y , $\pm 20^\circ$ по углу φ и ± 20 м/с по скорости V ; центры данных интервалов совмещены с соответствующими значениями параметров опорной терминальной точки;
- моменты времени, для которых заданы фазовые ограничения: $\tilde{t}_1 = 20$, $\tilde{t}_2 = 40$, $\tilde{t}_3 = 60$, $\tilde{t}_4 = 80$, $\tilde{t}_5 = 100$ с;
- фазовые ограничения $H(\tilde{t}_j)$, $j = \overline{1, 5}$, имели размер ± 300 м по координате x , ± 300 м по координате y , $\pm 20^\circ$ по углу φ и ± 40 м/с по скорости V ; центры данных интервалов совмещены с соответствующими значениями параметров опорной траектории в заданные моменты времени;
- шаг Δ попятных построений — 1 с; размер сетки на плоскости φ, V — 720×64 ; множества на плоскости x, y представляются выпуклыми многоугольниками на равномерной фиксированной сетке нормалей (24 нормали).

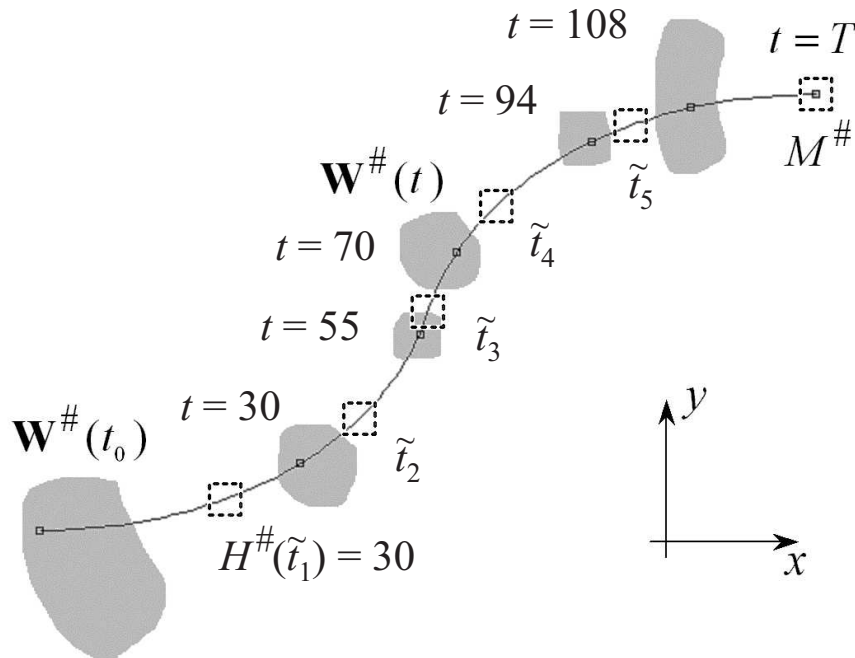


Рис. 3. Динамика изменения во времени множества $\mathbf{W}^\#(t)$.

Динамика изменения во времени множества $\mathbf{W}(t)$ для случая $\nu = 16$ м/с показана на рис. 3.: серой заливкой изображены проекции $\mathbf{W}^\#(t)$ четырехмерных множеств $\mathbf{W}(t)$ на плоскость x, y . Видно, что при отходе в обратном времени от терминального множества размер

проекция сечения увеличивается. После пересечения с фазовым ограничением сечение сокращается. Далее процесс протекает аналогично. В момент времени $t_0 = 0$ построенное сечение $\mathbf{W}(t_0)$ моста содержит начальную позицию самолета.

Структура сечения $\mathbf{W}(t_0)$ максимального стабильного моста в момент времени $t_0 = 0$ показана на рис. 4. Здесь сплошной линией отмечена начальная часть опорной траектории в проекции на плоскость x, y , черным квадратиком обозначено положение самолета в начальный момент, пунктирным квадратом указано первое фазовое ограничение в момент \tilde{t}_1 . Слабой заливкой показана проекция $\mathbf{W}^\#(t_0)$ четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$ на плоскость геометрических координат x, y . Виден ее полный контур. Внутри этой проекции белой заливкой отмечена проекция трехмерного слоя, который соответствует узлу сетки $\{V_m\}$, максимально близкому к начальной скорости самолета $V_0 = 200$ м/с. Внутри проекции трехмерного слоя темной заливкой выделен двумерный слой, соответствующий узлу сетки $\{\varphi_n\}$, ближайшему к начальному значению угла $\varphi_0 = 0^\circ$.

На рис. 5 приведены изображения трехмерных слоев четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$. Слои соответствуют пяти различным значениям скорости и отмечены заливкой с различной интенсивностью.

Влияние уровня ν максимального значения ветрового возмущения на размеры проекции $\mathbf{W}^\#(t_0)$ иллюстрируется на рис. 6. Здесь сплошной линией отмечена начальная часть опорной траектории, черным квадратиком — положение самолета в начальный момент, пунктирным квадратом — фазовое ограничение в контрольный момент \tilde{t}_1 .

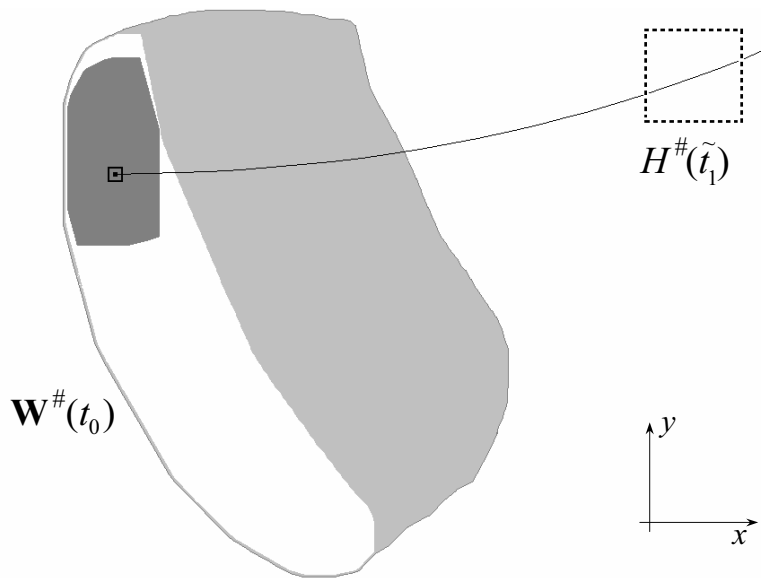


Рис. 4. Структура четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$ по слоям V и φ (в проекции на плоскость x, y), уровень ограничения на ветер $\nu = 16$ м/с.

На рис. 7 для тех же данных показана проекция $\mathbf{W}^\#(t_0)$ множества $\mathbf{W}(t_0)$ на плоскость φ, V .

Как было отмечено выше, начальная позиция самолета принадлежит множеству $\mathbf{W}(t_0)$ при ограничении $\nu = 16$ м/с (рис. 6а, 7а). Следовательно, задача перевода самолета на терминальное множество разрешима при таком ограничении на ветровое возмущение. При ограничении $\nu = 20$ м/с (рис. 6б, 7б) сечение моста не “дотягивается” до начальной позиции самолета. В этом случае перевод самолета на заданное терминальное множество не является гарантированным. При ограничении $\nu = 21$ м/с (рис. 6в, 7в) сечение $\mathbf{W}(t_0)$ моста еще более отстоит от

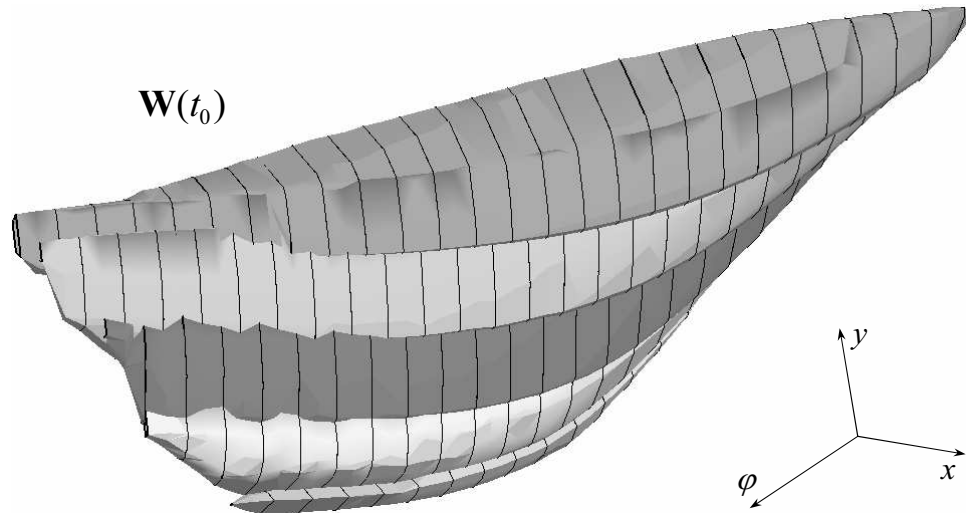


Рис. 5. Трехмерное изображение четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$, уровень ограничения на ветер $\nu = 16$ м/с.

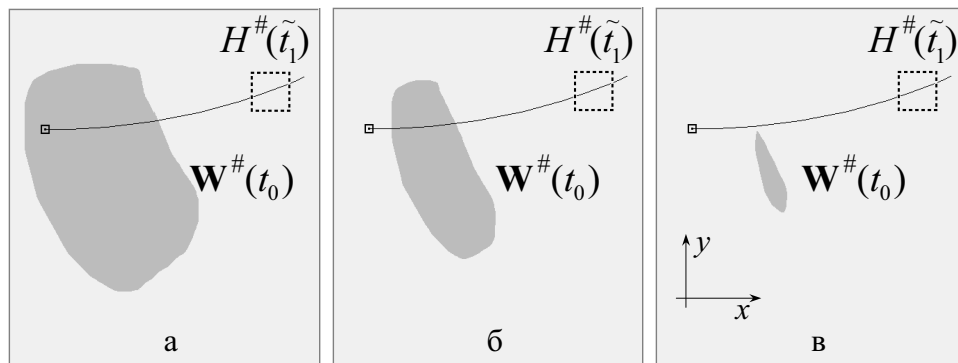


Рис. 6. Сравнение множеств $\mathbf{W}^\#(t_0)$ для различных ограничений на возмущение: а) $\nu = 16$ м/с, б) $\nu = 20$ м/с, в) $\nu = 21$ м/с.

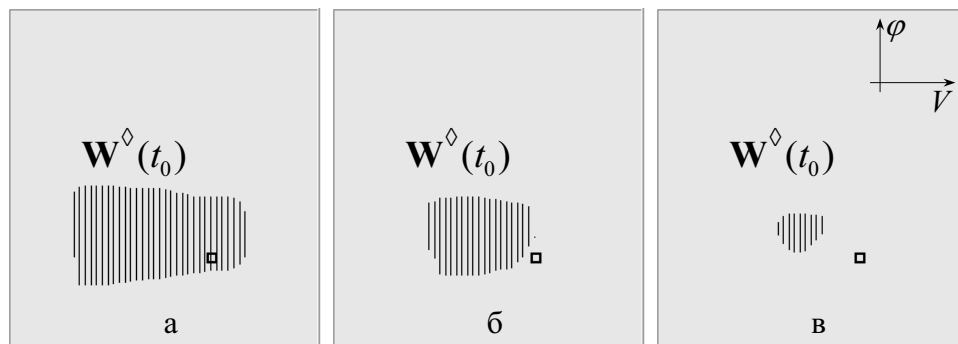


Рис. 7. Сравнение множеств $\mathbf{W}^\diamond(t_0)$ для различных ограничений на возмущение: а) $\nu = 16$ м/с, б) $\nu = 20$ м/с, в) $\nu = 21$ м/с.

начальной позиции самолета и, кроме того, начинает существенно сокращаться в размерах. При дальнейшем увеличении ограничения ν множество $\mathbf{W}(t_0)$ становится пустым.

Размеры и структура множества $\mathbf{W}(t_0)$ существенно зависят также от моментов времени, в которые заданы фазовые ограничения, и от размеров этих ограничений.

Авторы благодарят Л.В. Камневу за ценные замечания.

Поступила 04.03.2004

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-Theoretical Control Problems. Springer-Verlag, New York, 1988.
3. **Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. 2000. Т. 6, № 2. С. 413–434.
4. **Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А.** Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 51–61.
5. **Анодина Т.Г., Мокшанов В.И.** Моделирование процессов в системе управления воздушным движением. М.: Радио и связь, 1993.
6. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Тр. Второго Междунар. симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства, Вена, Австрия, сентябрь 1967. Управление космическими аппаратами и кораблями / Под ред. Б.Н. Петрова, И.С. Уколова. М.: Наука. 1971. С. 410–418.
7. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.
8. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
9. **Никольский М.С.** Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сборник. 1981. Т. 116, № 1. С. 136–144.
10. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** Дифференциальные игры с фиксированным временем // Кибернетика. 1971. Т. 6, № 1. С. 72–80.
11. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
12. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984.
13. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
14. **Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунова Н.В., Силин Д.Б., Тринько Н.Г.** Методы решения дифференциальных игр // Мат. моделирование. 1993. С. 296–316.
15. **Kurzhanski A.V., Valyi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, Boston. 1997.
16. **Bardi M., Dolcetta I.C.** Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Birkhäuser, Boston. 1997.
17. **Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.** Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games // Annals of the International Society of Dynamic Games. V. 4 / M. Bardi, T.E. Raghavan, T. Parthasarathy, eds. 1999. P. 177–247.
18. **Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.** Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
19. **Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 771–783.