МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

О ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ

Н. Н. Амосова

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое решетчатое распределение с общей функцией распределения $F(x)$, математическим ожиданием $EX_1 = 0$ и конечной дисперсией $DX_1 = \sigma^2 > 0$. Пусть X_1 принимает только значения вида $a + kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где a — некоторое действительное число, h — шаг распределения.

Введем следующие обозначения:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathsf{P}_n(k) = \mathsf{P}(S_n = na + kh), \quad x = \frac{na + kh}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Целью настоящей работы является получение условий, необходимых и достаточных для выполнения соотношения

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\mathsf{P}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(1 + o(1)) \tag{1}$$

равномерно относительно x в области $0 \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}$, где c — некоторая положительная постоянная. Здесь и далее предельные переходы совершаются при $n \to \infty$, если не оговорено противное.

Некоторые односторонние локальные предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений были получены в [1]. Ряд двусторонних локальных предельных теорем содержится в работах [2] — [4] и др.

Сформулируем основные результаты.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Математические заметки», 1980

ТЕОРЕМА 1. *Для выполнения соотношения* (1) *равномерно относительно* x *в области* $0 \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1) $\mathsf{P}(X_1 \geqslant y) = o(\sqrt{\ln y}/y)^{c^2+2}, \quad y \to \infty;$

2) $\log y \int_{|z|>y} z^2 \, dF(z) \to 0, \quad y \to \infty;$

3) *шаг распределения* h *максимален.*

Применяя теорему 1 к последовательности $-X_1$, $-X_2, \ldots$, можно указать условия необходимые и достаточные для выполнения соотношения (1) равномерно относительно x в области $-c\sqrt{\log n} \leqslant x \leqslant 0$.

Кроме того, теорема 1 позволяет указать условия, необходимые и достаточные для выполнения соотношения (1) в области $|x| \leqslant c\sqrt{\log n}$. При этом мы можем не предполагать априори конечность второго момента величины X_1, так как, если выполнено (1) в области $|x| = c\sqrt{\log n}$ при некотором постоянном $\sigma > 0$, то распределение $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения нормального закона, откуда вытекает конечность EX_1^2. Из (1) также следует, что $EX_1 = 0$ и $DX_1 = \sigma^2$.

Приведем двусторонний аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* σ — *некоторая положительная постоянная. Для выполнения соотношения* (1) *равномерно относительно* x *в области* $|x| \leqslant c\sqrt{\log n}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1) $P(|X_1| \geqslant y) = o(\sqrt{\log y}/y)^{c^2+2}, \quad y \to \infty;$

2) *шаг распределения* h *максимален;*

3) $EX_1 = 0, \quad DX_1 = \sigma^2.$

Заметим, что из условия 1) теоремы 2 следует, что $E|X_1|^q < \infty$ для некоторого q, $2 < q < c^2 + 2$, а значит, выполнено условие 2) теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 1. Будем далее через ε и C обозначать соответственно малые и большие положительные постоянные. Иногда постоянные ε и C будут снабжаться индексами.

ЛЕММА 1. *Если выполнено соотношение* (1) *равномерно относительно* x *в области* $0 \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}$, *то выполнено условие* 3) *и условие*

$$\mathsf{P}(X_1 \geqslant y) = O(\sqrt{\log y}/y)^{c^2+2}, \quad y \to \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость условия 3) теоремы 1 очевидна, ибо, если шаг h не максимален, то

максимален шаг $h_1 > h$ и, значит, $P_n(k_0) = 0$ для некоторых k_0, что противоречит (1).

Введем теперь события

$$A_j = \{c\sigma\sqrt{n\log n} - 2\sigma\sqrt{n} \leqslant X_j < c\sigma\sqrt{n\log n} - \sigma\sqrt{n}\},$$
$$B_j = \left\{0 \leqslant \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} X_i \leqslant \sigma\sqrt{n}\right\}.$$

Из соотношения (1) следует, что

$$\mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n} - 2\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n < c\sigma\sqrt{n\log n}) = \\ = O(n^{-c^2/2}/\sqrt{\log n}). \qquad (3)$$

С другой стороны,

$$P(c\sigma\sqrt{n\log n} - 2\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n < c\sigma\sqrt{n\log n}) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(\bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cap B_j)) \geqslant \mathsf{P}(\bigcup_{j=1}^{n}(\bigcap_{i=1}^{j-1}\overline{(A_i \cap B_i)} \cap (A_j \cap B_j))) = \\ = \sum_{j=1}^{n}\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{j-1}\overline{(A_i \cap B_i)} \cap (A_j \cap B_j)) \geqslant \\ \geqslant \sum_{j=1}^{n}\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{j-1}\bar{A}_i \cap (A_j \cap B_j)) \geqslant \sum_{j=1}^{n}(\mathsf{P}(A_j \cap B_j) - \\ - \mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{j-1}(A_i \cap A_j))) \geqslant \sum_{j=1}^{n}\mathsf{P}(A_j)(\mathsf{P}(B_j) - (j-1)\mathsf{P}(A_j)) \geqslant \\ \geqslant Cn\,\mathsf{P}(A_1). \qquad (4)$$

Из (4) и (3) следует, что

$$J_n = \mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n} - 2\sigma\sqrt{n} \leqslant X_1 < c\sigma\sqrt{n\log n} - \sigma\sqrt{n}) = \\ = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\, n^{-(c^2+2)/2}\right).$$

Выберем последовательность целых чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию $e^{k^{2/3}} \leqslant n_k < e^{(k+1)^{2/3}}$. Тогда

$$\int_{c\sigma\sqrt{n\log n}-2\sigma\sqrt{n}}^{\infty} dF(y) \leqslant \sum_{n_k \geqslant n} J_{n_k} \leqslant \\ \leqslant C\sum_{k=(\log n)^{3/2}} e^{-\frac{c^2+2}{2}k^{2/3}}\frac{1}{k^{1/3}} \leqslant C_1 n^{-\frac{c^2+2}{2}}.$$

Выбирая $c\sigma\sqrt{n\log n} - 2\sigma\sqrt{n} \leqslant y < c\sigma\sqrt{(n+1)\log(n+1)} - 2\sigma\sqrt{n+1}$, получим (2). Лемма 1 доказана.

Заметим далее, что в области $0 \leqslant x \leqslant \rho(n)$, где $\rho(n) \to \infty$ достаточно медленно, соотношение (1) является следствием локальной предельной теоремы для решетчатых распределений (см., например, [5]).

Пусть $\theta > 0$. Положим

$$V_\alpha(y) = \begin{cases} F(y), & \text{если } y < \alpha_n = \sqrt{n}/x, \\ F(\alpha_n), & \text{если } y \geqslant \alpha_n, \end{cases}$$

$$V_{l,\alpha}(y) = V_\alpha^{*(l)}(y),$$

$$\varphi_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} y\right) dV_\alpha(y), \tag{5}$$

$$m_n(\theta) = \frac{1}{\varphi_n(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} y\right) dV_\alpha(y), \tag{6}$$

$$\sigma_n^2(\theta) = \frac{1}{\varphi_n(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} y\right) dV_\alpha(y) - (m_n(\theta))^2. \tag{7}$$

Символ $*$ означает операцию свертки.

Введем теперь вспомогательную последовательность серий независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин $U_{n1}, \ldots, U_{nn}$ с функцией распределения

$$F_n(y, \theta) = \frac{1}{\varphi_n(\theta)} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} z\right) dV_\alpha(z). \tag{8}$$

В силу введенных обозначений $EU_{n1} = m_n(\theta)$, $DU_{n1} = \sigma_n^2(\theta)$. Тогда, учитывая (8), получаем

$$P(U_{n1} = a + kh) = \\ = \frac{1}{\varphi_n(\theta)} \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} (a + kh)\right) (V_\alpha(a + (k+1)h) - \\ - V_\alpha(a + kh))$$

и

$$\bar{P}_n(k) = P(U_{n1} + \ldots + U_{nn} = na + kh) = \\ = e^{\theta \frac{x}{\sqrt{n}} (na + kh)} (V_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - \\ - V_{n,\alpha}(na + kh))/(\varphi_n(\theta))^n. \tag{9}$$

Положим

$$m_n = \int_{-\infty}^{\alpha_n} y\, dF(y), \quad \sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\alpha_n} y^2\, dF(y),$$

$$\delta_n(\theta) = \frac{x}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} y^3 \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} y\right) dV_\alpha(y) + \\ + \int_{-\infty}^{0} y^2 \left(1 - \exp\left(\theta \frac{x}{\sqrt{n}} y\right)\right) dV_\alpha(y)$$

и заметим, что из условия 2) теоремы 1 следует, что

$$\log n \int_{|y|>K_n(\varepsilon)} y^2 \, dF(y) \to 0 \tag{10}$$

для любого $\varepsilon > 0$, где $K_n(\varepsilon) = \varepsilon\sqrt{n}/(\log n)^{3/2}$. Справедливо следующее разложение для e^α:

$$e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^k}{k!} + R_{k+1},$$

где $\alpha^{k+1}/(k+1)! \leqslant R_{k+1} \leqslant e^\alpha \alpha^{k+1}/(k+1)!$, если $\alpha \geqslant 0$, $|R_{k+1}| \leqslant (1 - e^\alpha)\,|\alpha|^k/k!$, если $\alpha < 0$. Тогда из (5) — (7) получаем

$$\varphi_n(\theta) = 1 + \theta \frac{x}{\sqrt{n}} m_n + \frac{\theta^2}{2!} \frac{x^2}{n} \sigma_n^2 + \frac{\theta^3}{3!} D_1 \frac{x^2}{n} \delta_n(\theta), \tag{11}$$

$$m_n(\theta)\,\varphi_n(\theta) = m_n + \theta \frac{x}{\sqrt{n}} \sigma_n^2 + \frac{\theta^2}{2} D_2 \frac{x}{\sqrt{n}} \delta_n(\theta), \tag{12}$$

$$(\sigma_n^2(\theta) + m_n^2(\theta))\,\varphi_n(\theta) = \sigma_n^2 + \theta D_3 \delta_n(\theta). \tag{13}$$

Здесь D_1, D_2 и D_3 — некоторые ограниченные величины.

ЛЕММА 2. *Пусть выполнены условия* 2) *и* 3) *теоремы* 1 *и условие* (2). *Тогда*

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\left(V_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - V_{n,\alpha}(na + kh)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(1 + o(1)), \quad \rho(n) \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что из условий (2) и 3) следует, что равномерно относительно k

$$\frac{\sigma_n(\theta)\sqrt{n}}{h}\,\overline{P}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\bar{x}_n^2/2} + o(1), \tag{15}$$

где $\bar{x}_n = (na + kh - nm_n(\theta))/(\sigma_n(\theta)\sqrt{n})$. Тогда, подставляя в (15) выражение для $\overline{P}_n(k)$ из (9) имеем

$$\frac{\sigma_n(\theta)\sqrt{n}}{h}\left(V_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - V_{n,\alpha}(na + kh)\right) =$$
$$= (\varphi_n(\theta))^n e^{-\theta \frac{x}{\sqrt{n}}(na+kh)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\bar{x}_n^2/2} + o(1)\right). \tag{16}$$

Покажем теперь, что

$$x^2\delta_n(\theta) = o(1). \tag{17}$$

Имеем

$$x^2\delta_n(\theta) = \frac{x^3}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}/x} y^3 \exp\left(\theta\frac{x}{\sqrt{n}}y\right) dF(y) +$$

$$+ x^2\int_{-\infty}^{-K_n(\varepsilon)} y^2\left(1-\exp\left(\theta\frac{x}{\sqrt{n}}y\right)\right) dF(y) +$$

$$+ x^2\int_{-K_n(\varepsilon)}^{0} y^2\left(1-\exp\left(\theta\frac{x}{\sqrt{n}}y\right)\right) dF(y) =$$

$$= \varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(n) + \varepsilon_3(n).$$

В силу (2)

$$\varepsilon_1(n) \leqslant \frac{C_1x^3}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}/x} y^3\, dF(y) =$$

$$= -\frac{C_1x^3}{\sqrt{n}}\left(y^3(1-F(y))\Big|_0^{\sqrt{n}/x} - 3\int_0^{\sqrt{n}/x} y^2(1-F(y))\,dy\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left(\frac{(\log n)^{c^2+2}}{n^{c^2/2}} + \frac{(\log n)^{3/2}}{\sqrt{n}}\right) = o(1);$$

$$\varepsilon_3(n) \leqslant C_3x^2\frac{\theta x\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\log n)^{3/2}}\int_{-K_n(\varepsilon)}^{0} y^2\, dF(y) \leqslant C_4\varepsilon;$$

и в силу условия (10)

$$\varepsilon_2(n) \leqslant x^2\int_{|y|>K_n(\varepsilon)} y^2\, dF(y) = o(1).$$

Положим $\theta = 1/\sigma$. Из (11)—(13) получаем, учитывая (17),

$$\varphi_n(\theta) = 1 + O(x^2/n), \quad m_n(\theta) = O(x/\sqrt{n}),$$
$$\sigma_n(\theta) = \sigma(1 + o(1/x^2)), \tag{18}$$

$$(\varphi_n(\theta))^n e^{-\theta\frac{x}{\sqrt{n}}(na+kh)} = \exp(n\log\varphi_n(\theta) - \theta x^2\sigma) =$$

$$= \exp\left(n\log\left(1 + \theta\frac{x}{\sqrt{n}}m_n + \frac{\theta^2}{2}\frac{x^2}{n}\sigma_n^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\theta^3}{3!}D_1\frac{x^2}{n}\delta_n(\theta)\right) - \theta x^2\sigma\right) = e^{-x^2/2}(1 + o(1)), \tag{19}$$

$$\bar{x}_n = \frac{na + kh - nm_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)\sqrt{n}} = \frac{x\sigma + \sqrt{n}\,m_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} = o(1). \tag{20}$$

Подставляя (18) — (20) в (16), получим (14).

Доказательство достаточности условий 1) — 3) теоремы 1.

ЛЕММА 3. *Пусть выполнены условия* 1) — 3). *Тогда справедливо* (1) *равномерно относительно* x *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}$.

Доказательство. Определим функцию $G_\alpha(x)$ равенством

$$F(x) = V_\alpha(x) + G_\alpha(x).$$

Тогда

$$F_n(x) = F^{*(n)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} V_\alpha^{*(n-s)} * G_\alpha^{*(s)}(x).$$

Значит,

$$\begin{aligned} P_n(k) = F_n(na + (k+1)h) - F_n(na + kh) = \\ = V_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - V_{n,\alpha}(na + kh) + \\ + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \int (V_{n-s,\alpha}(na + (k+1)h - y) - \\ - V_{n-s,\alpha}(na + kh - y))\, dG_{s,\alpha}(y) + \\ G_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - G_{n,\alpha}(na + kh), \end{aligned} \tag{21}$$

где $G_{s,\alpha}(y) = G_\alpha^{*(s)}(y)$. В силу условия (2)

$$G_{s,\alpha}(s\sqrt{n}/x) = O((\log n/\sqrt{n})^{s(c^2+2)}), \quad s = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Отсюда для $m > 1 + c^{-2}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=m}^{n-1} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \int (V_{n-s,\alpha}(na + (k+1)h - y) - \\ - V_{n-s,\alpha}(na + kh - y))\, dG_{s,\alpha}(y) + G_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - \\ - G_{n,\alpha}(na + kh) = O\left(\sum_{s=m}^{n} n^s (\log n/\sqrt{n})^{s(c^2+2)}\right) = \\ = O((\log n)^{m(c^2+2)}/n^{mc^2/2}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-x^2/2}\right), \\ \rho(n) \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как последовательность $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяет локальной предельной теореме для решетчатых распределений, то из (21) равномерно относительно k имеем

$$V_{n,\alpha}(na + (k+1)h) - V_{n,\alpha}(na + kh) = O(1/\sqrt{n}),$$

значит,

$$\sum_{s=2}^{m-1} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \int (V_{n-s,\alpha}(na+(k+1)h-y) - \\ - V_{n-s,\alpha}(na+kh-y))\,\mathrm{d}G_{s,\alpha}(y) = \\ = O\Big(\sum_{s=2}^{m-1} n^s \frac{1}{\sqrt{n-s}} (\log n/\sqrt{n})^{s(c^2+2)}\Big) = \\ = O((\log n)^{2(c^2+2)}/n^{c^2+1/2}) = O(1/\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}), \\ \rho(n) \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}. \quad (24)$$

И, наконец, учитывая 1) и (14), получим

$$n \int_{\sqrt{n}/x}^{\infty} (V_{n-1,\alpha}(na+(k+1)h-y) - \\ - V_{n-1,\alpha}(na+kh-y))\,\mathrm{d}F(y) = \\ = n \int_{\sqrt{n}/x}^{x\sigma\sqrt{n}(1-\varepsilon)} (V_{n-1,\alpha}(na+(k+1)h-y) - \\ - V_{n-1,\alpha}(na+kh-y))\,\mathrm{d}F(y) + \\ + n \int_{x\sigma\sqrt{n}(1-\varepsilon)}^{\infty} (V_{n-1,\alpha}(na+(k+1)h-y) - \\ - V_{n-1,\alpha}(na+kh-y))\,\mathrm{d}F(y) \leqslant \\ \leqslant C_1\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-x^2\varepsilon^2/2}(\log n/\sqrt{n})^{c^2+2} + o(\sqrt{n}\,(x^{-1}\sqrt{\log n/n})^{c^2+2}) = \\ = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big), \quad \rho(n) \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}. \quad (25)$$

Подставляя (14), (23) — (25) в (21), получаем (1). Лемма 3 доказана.

Доказательство необходимости условий 2) — 3) теоремы 1.

ЛЕММА 4. *Если выполнено соотношение* (1) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant (c-\varepsilon)\sqrt{\log n}$, *то выполнено условие* 2).

Доказательство этой леммы можно найти в [1].

ЛЕММА 5. *Если выполнено соотношение* (1) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant c\sqrt{\log n}$, *то выполнено условие* 1).

Доказательство. Если выполнено (1), то выполнены условия (2), 2) и 3), а тогда справедливы

(22) — (24) и (14). Таким образом, из (21) и 1) получаем

$$n\int_{\sqrt{n}/x}^{\infty}(V_{n-1,\alpha}(na+(k+1)h-y)-$$
$$-V_{n-1,\alpha}(na+kh-y)\,dG_{\alpha}(y)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-x^2/2}\right). \quad (26)$$

Введем случайные величины T_1 и Z_1 с функциями распределения $G_{\alpha}(y)/(1-F(\alpha_n))$ и $V_{\alpha}(y)/F(\alpha_n)$ соответственно. Тогда (26) можно переписать в виде

$$\mathsf{P}(T_1+Z_2+\ldots+Z_n=na+kh)=o\left(\frac{1}{n^{3/2}}e^{-x^2/2}\right),$$
$$\rho(n)\leqslant x\leqslant c\sqrt{\log n}. \quad (27)$$

Из (27)

$$\mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n}-2\sigma\sqrt{n}\leqslant T_1+Z_2+\ldots+Z_n<$$
$$<c\sigma\sqrt{n\log n})=o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}n^{-(c^2+2)/2}\right). \quad (28)$$

С другой стороны,

$$\mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n}-2\sigma\sqrt{n}\leqslant T_1+Z_2+\ldots+Z_n<$$
$$<c\sigma\sqrt{n\log n})\geqslant\mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n}-2\sigma\sqrt{n}\leqslant T_1<$$
$$<c\sigma\sqrt{n\log n}-\sigma\sqrt{n})\,\mathsf{P}(0\leqslant Z_2+\ldots+Z_n\leqslant\sigma\sqrt{n})\geqslant$$
$$\geqslant C\mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n}-2\sigma\sqrt{n}\leqslant T_1<c\sigma\sqrt{n\log n}-\sigma\sqrt{n}).$$

Отсюда и из (28)

$$\mathsf{P}(c\sigma\sqrt{n\log n}-2\sigma\sqrt{n}\leqslant X_1<c\sigma\sqrt{n\log n}-\sigma\sqrt{n})=$$
$$=o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}n^{-(c^2+2)/2}\right).$$

И действуя далее как при доказательстве леммы 1, получим 1).

Теорема 1 доказана.

Ленинградский политехнический институт

Поступило 16.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Амосова Н. Н., Локальные предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений, Литовск. матем. сб., 14, № 3 (1974), 47—55.

[2] Ибрагимов И. А., О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теор. вероятн. и ее применен., 11, № 4 (1966), 632—655.
[3] Петров В. В., О локальных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин, Теор. вероятн. и ее применен., 9, № 3 (1964), 343—352.
[4] Кароблис А., Об асимптотических разложениях в локальных теоремах, Литовск. матем. сб., 12, № 4 (1972), 53—68.
[5] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.