



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Kapitonov, A. G. Pronko, The five-vertex model and boxed plane partitions,
Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2008, Volume 360, 162–179

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

January 15, 2025, 22:36:11



В. С. Капитонов, А. Г. Пронько

ПЯТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ В ЯЩИКЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Плоские разбиения являются естественным обобщением обычных (линейных) разбиений неотрицательных целых чисел. Для заданного числа n его плоское разбиение есть представление вида $n = \sum_{i_1, i_2 \geq 0} n_{i_1 i_2}$, где $n_{i_1 i_2}$ ($i_1, i_2 = 1, 2, \dots$) – целые неотрицательные числа, такие, что $n_{i_1 i_2} \geq n_{j_1 j_2}$ всякий раз, как $i_1 \leq j_1, i_2 \leq j_2$ (см., например, [1, 2]). Плоские разбиения часто представляют в виде таблиц

$$\begin{array}{cccc} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & \dots \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} & \dots \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (1.1)$$

Рассматривая числа $n_{i_1 i_2}$ как значения высот, такие таблицы можно естественно интерпретировать как “трехмерные диаграммы Юнга”.

В том случае, когда размер таблиц и максимальное значение чисел $n_{i_1 i_2}$ ограничен, плоские разбиения именуется плоскими разбиениями в ящике. Более точно, для таких плоских разбиений подразумевается выполнение дополнительных условий: $n_{i_1 i_2} = 0$ при $i_1 \geq a$ и $i_2 \geq b$, и, кроме того, $n_{i_1 i_2} \leq c$ для $i_1 \leq a, i_2 \leq b$, где a, b, c – натуральные числа. Эти числа могут интерпретироваться как линейные размеры параллелепипеда, а сами плоские разбиения – как его укладки единичными кубами. Как следует из определения плоских разбиений, укладки кубов тогда будут характеризоваться невозрастающей высотой поверхности (значением ее координаты вдоль оси z) при увеличении значения координат x и y .

При графическом изображении плоских разбиений как трехмерных диаграмм Юнга существует естественная интерпретация конфигураций упадок кубами в терминах “градиентных” линий. Эти ли-

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 07-01-00358.

нии могут быть определены как результат пересечения поверхности укладок кубами, включая границы ящика, с плоскостями $x = p + 1/2$ ($p = 0, 1, \dots$). Пример плоского разбиения с указанием градиентных линий, которые изображены жирными линиями, приведен на рис. 1 слева. Очевидно, что конфигурации градиентных линий находятся во взаимно однозначном соответствии с плоскими разбиениями в ящике.

Рассматривая эти градиентные линии как линии некоторой вершинной модели на квадратной решетке, нетрудно видеть, что данная модель является пятивершинной моделью, соответствующая конфигурация которой показана на рис. 1 справа. Отличие этой модели от знаменитой шестивершинной модели заключается в запрете вершины со встречающимися линиями. Отождествление элементарных фрагментов плоского изображения трехмерных укладок кубами с вершинами модели показано на рис. 2. Модель рассматривается на решетке с N горизонтальными и M вертикальными прямыми, причем $N = b + c$ и $M = a + b$; граничные условия фиксированные, с b подряд входящими линиями на верхней границе справа и исходящими на левой границе внизу. Для перечисления плоских разбиений все веса должны быть выбраны равными единице.

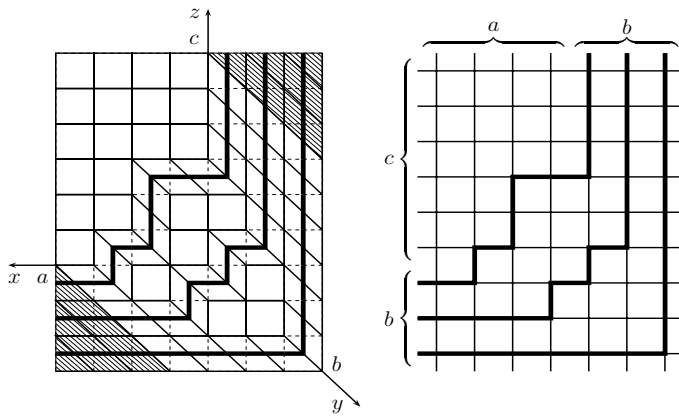


Рис. 1. Слева: пример плоского разбиения в трехмерной интерпретации. Жирными линиями изображены ‘градиентные’ линии. Справа: соответствующая конфигурация пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями.

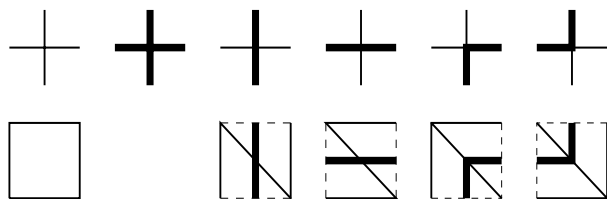


Рис. 2. Вершины шестивершинной модели и соответствующие им плоские фрагменты изображения трехмерных укладок. В пятивершинной модели вершина второго типа исключена.

Стандартный подход к исследованию плоских разбиений, описанных в терминах градиентных линий, основан на использовании теории непересекающихся путей [3–5]. Цель нашей работы – показать, что привлечение пятивершинной модели позволяет использовать также и алгебраические методы интегрируемых моделей для вычисления различных интересных величин, связанных с плоскими разбиениями.

Чтобы дать пример одной такой величины, полезно также упомянуть, что плоские разбиения часто рассматриваются как покрытия шестиугольника ромбами трёх типов [6]. Данный шестиугольник легко видеть на левой картинке рис. 1 (светлая область). Ромбами здесь являются два типа ромбов и квадраты (ромбы с углами 90°). Интерес представляет число плоских покрытий с фиксированным ромбом [7–10]. Данная величина есть не что иное, как некоторая одноточечная корреляционная функция в контексте пятивершинной модели (с точностью до множителя равного статистической сумме).

Необходимо отметить, что в настоящее время существует устойчивый интерес к привлечению интегрируемых моделей для решения задач комбинаторики. Этот интерес основан, в частности, на успешном применении методов, развитых ранее при исследовании различных интегрируемых моделей, к решению задач, связанных с плоскими разбиениями в бесконечном объеме [11–15]. Стоит также упомянуть о приложениях шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки и их модификаций к перечислению и исследованию свойств переменного-знаковых матриц [16–20]. Плоские разбиения в ящике, в свою очередь, могут быть рассмотрены в контексте различных интегрируемых моделей, таких, как интегрируемая модель бозонных фазовых операторов [21, 22], а также четырех- и пятивершинная модели с определенными граничными условиями [23, 24].

Среди различных формулировок плоских разбиений в ящике в терминах интегрируемых моделей пятивершинная модель интересна, на наш взгляд, тем, что ее веса должны удовлетворять условию свободных фермионов. Для такой модели эффективным методом является переход к ее формулировке в терминах фермионов, или “фермионизация”. В следующем разделе показано, что фермионизация может быть выполнена фактически напрямую, посредством преобразования Йордана–Вигнера.

Далее, в разделе 3 показано, что соответствующий пятивершинной модели с равными весами фермионный аналог оператора перехода (трансфер-матрицы) имеет вид экспоненты от квадратичной формы по фермионным операторам. Статистическая сумма записывается в виде определителя некоторой матрицы порядка $b \times b$, представимой в виде произведения двух диагональных и одной ганкелевой матриц. Последняя оказывается ассоциированной с ансамблем полиномов Лагерра.

Наконец, в разделе 4 мы рассматриваем одноточечную корреляционную функцию, описывающую вероятность обнаружения линии на горизонтальном ребре. Эта величина эквивалентна числу плоских разбиений, соответствующих покрытиям ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом определенного типа.

2. ПЯТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И ФЕРМИОНЫ

В этом разделе мы сформулируем вначале пятивершинную модель в рамках операторного формализма, типичного для использования операторов перехода типа диагональ–диагональ. Далее, после применения преобразования Йордана–Вигнера мы перепишем статистическую сумму в терминах некоторого оператора перехода (уже фермионного) типа ряд–ряд, что более удобно для дальнейших вычислений на решетке прямоугольной формы.

Начнем с определения больцмановского веса вершины. В качестве переменных, описывающих состояния на ребрах, будем использовать переменные типа заполнения, принимающие значение 0, если ребро пустое, и 1, если ребро содержит линию. Пусть μ , ν , μ' и ν' – переменные заполнения, приписанные, соответственно, левому, нижнему, верхнему и правому ребрам вершины, а $w_{\mu, \nu; \mu', \nu'}$ есть соответствующий этой вершине больцмановский вес. В пятивершинной модели,

соответствующей перечислению плоских разбиений,

$$\begin{aligned} w_{0,0;0,0} &= w_{0,1;1,0} = w_{1,0;0,1} = w_{0,1;0,1} = w_{1,0;1,0} = 1, \\ w_{1,1;1,1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а также $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'} = 0$ для $\mu + \nu \neq \mu' + \nu'$.

В формализме, который мы намерены рассмотреть, вершинам квадратной решетки $N \times M$ будут сопоставляться операторы X_j ($j = 1, \dots, N+M-1$), действующие в пространстве $\mathcal{H}_{N+M} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+M)}$. Каждый X_j будет нетривиально действовать только в j -й и $(j+1)$ -й копии пространства \mathbb{C}^2 в \mathcal{H}_{N+M} . Пусть v_0, v_1 образуют базис в \mathbb{C}^2 ,

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Для базисных векторов пространства \mathcal{H}_{N+M} , которое будет играть роль квантового пространства состояний, будем использовать “бра” и “кет” обозначения

$$|\Psi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M}}\rangle := v_{\mu_1} \otimes v_{\mu_2} \otimes \dots \otimes v_{\mu_{N+M}}, \quad (2.3)$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M} = 0, 1$. Операторы X_j определим по формуле

$$\langle \Psi_{\mu_1, \dots, \mu_{N+M}} | X_j | \Psi_{\mu'_1, \dots, \mu'_{N+M}} \rangle = w_{\mu_j, \mu_{j+1}; \mu'_j, \mu'_{j+1}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j, j+1}}^{N+M} \delta_{\mu_l, \mu'_l}. \quad (2.4)$$

Здесь $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'}$ – больмановский вес, определенный выше, и $\delta_{\mu,\mu'}$ – символ Кронекера.

В терминах спиновых операторов

$$\sigma_j^\alpha = \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{j-1} \otimes \sigma^\alpha \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (\alpha = x, y, z), \quad (2.5)$$

где I – единичная матрица 2×2 , а $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ – матрицы Паули,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

а операторы X_j имеют вид

$$X_j = \frac{1}{4} (3 + \sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z - \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + \frac{1}{2} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y). \quad (2.7)$$

Статистическая сумма пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, показанными на правой картинке рис. 1, может быть записана в виде

$$Z = \langle L | \Xi | R \rangle, \quad (2.8)$$

где вектор $|R\rangle$ учитывает граничные условия на верхней и правой границах решетки,

$$|R\rangle := |\Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_a, \underbrace{1, \dots, 1}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_c}\rangle, \quad (2.9)$$

а вектор $\langle L|$ – на левой и нижней границах,

$$\langle L| := \langle \Psi_{\underbrace{0, \dots, 0}_c, \underbrace{1, \dots, 1}_b, \underbrace{0, \dots, 0}_a} |. \quad (2.10)$$

Оператор Ξ описывает переход через всю решетку, с правого верхнего угла до левого нижнего, и, как произведение операторов перехода типа диагональ-диагональ, например, при $N \geq M$, записывается в виде

$$\begin{aligned} \Xi = & X_N (X_{N+1} X_{N-1}) \cdots (X_{2M-1} \cdots X_3 X_1) \\ & \times \cdots (X_{N+M-1} \cdots X_{N-M+3} X_{N-M+1}) \cdots (X_{M+1} X_{M-1}) X_M. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этом выражении каждая группа операторов является оператором перехода типа диагональ-диагональ. А именно, крайний справа оператор, X_M , соответствует правой верхней вершине решетки, $X_{M+1} X_{M-1}$ соответствует второму диагональному ряду вершин от правого верхнего угла и т.д., вплоть до левой нижней вершины, которой соответствует оператор X_N . Полезно отметить, что, поскольку $X_j X_k = X_k X_j$ при $|k - j| \geq 2$, операторы X_j в выражении для Ξ могут быть сгруппированы также вдоль вертикальных либо горизонтальных рядов решетки. Например, группируя множители вдоль вертикальных рядов, для оператора Ξ можно написать

$$\begin{aligned} \Xi = & (X_N \cdots X_2 X_1) (X_{N+1} \cdots X_3 X_2) \\ & \times \cdots (X_{N+M-1} \cdots X_{M+1} X_M). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этой формуле порядок групп сомножителей совпадает с порядком вертикальных рядов решетки, которым они соответствуют на правой картинке рис. 1 (порядок сомножителей в каждой группе справа налево соответствует перебору вершин вертикального ряда решетки сверху вниз).

Рассмотренная операторная формулировка интересна тем, что позволяет применить конструкцию Йордана–Вигнера и выразить все операторы через алгебру канонических фермионных операторов [25]. Обозначая $\sigma_j^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_j^x \pm i\sigma_j^y)$, положим

$$f_j = \Sigma_j^z \sigma_j^+, \quad f_j^* = \sigma_j^- \Sigma_j^z, \quad \Sigma_j^z := \prod_{k=1}^j \sigma_k^z. \quad (2.13)$$

Для всех $j, k = 1, \dots, N + M$ имеем

$$f_j f_k^* + f_k^* f_j = \delta_{jk}, \quad f_j f_k + f_k f_j = 0, \quad f_j^* f_k^* + f_k^* f_j^* = 0. \quad (2.14)$$

Операторы f_j^* и f_j являются операторами рождения и уничтожения фермионов относительно вакуумного вектора $|\Omega\rangle = |\Psi_{0, \dots, 0}\rangle$, и для любого базисного вектора пространства \mathcal{H}_{N+M} имеем

$$|\Psi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M}}\rangle = (f_1^*)^{\mu_1} (f_2^*)^{\mu_2} \dots (f_{N+M}^*)^{\mu_{N+M}} |\Omega\rangle, \quad (2.15)$$

где порядок операторов существен. В частности, для векторов (2.10) и (2.9) имеем

$$\langle L| = \langle \Omega | f_{c+b} f_{c+b-1} \dots f_{c+1}, \quad |R\rangle = f_{a+1}^* f_{a+2}^* \dots f_{a+b}^* |\Omega\rangle. \quad (2.16)$$

Принимая во внимание, что $(\Sigma_j)^2 = 1$ и $\sigma_j^z = 1 - 2f_j^* f_j$, формулу (2.7) можно переписать в виде

$$X_j = 1 - q_j q_{j+1} + f_{j+1}^* f_j + f_j^* f_{j+1}, \quad (2.17)$$

где через q_j мы обозначили плотность числа фермионов относительно вакуума, $q_j := f_j^* f_j$. Выражения (2.16) и (2.17), подставленные в формулы (2.8) и (2.12), дают представление для статистической суммы в терминах фермионов.

В качестве последнего подготовительного шага мы преобразуем формулы (2.8) и (2.12) для статистической суммы к виду, более удобному для последующих вычислений. Рассмотрим операторы перестановки фермионов

$$P_{j,k} = 1 - q_j - q_k + f_j^* f_k + f_k^* f_j, \quad (2.18)$$

обладающие, как нетрудно проверить, свойствами

$$P_{j,k} f_j^* P_{j,k} = f_k^*, \quad P_{j,k} f_j P_{j,k} = f_k, \quad P_{j,k} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (2.19)$$

Нам понадобится оператор трансляции фермионов, который дается стандартной формулой для оператора циклического сдвига

$$U = P_{1,2} P_{2,3} \dots P_{N+M-1, N+M}, \quad U^{N+M} = 1. \quad (2.20)$$

Далее, введем в рассмотрение оператор T , который будет играть важную роль в дальнейшем, определяя его формулой

$$T := X_N \dots X_2 X_1 U. \quad (2.21)$$

Выражая каждую группу операторов в формуле (2.12) через T и принимая во внимание, что $U^{-1} X_j U = X_{j-1}$, для статистической суммы получим представление

$$Z = \langle L | T^M | \tilde{R} \rangle. \quad (2.22)$$

Здесь

$$|\tilde{R}\rangle := U^N |R\rangle = f_{N+a+1}^* f_{N+a+2}^* \dots f_{N+M}^* |\Omega\rangle, \quad (2.23)$$

и напомним также, что $N = b + c$ и $M = a + b$. Формула (2.22) и будет использована ниже для вычисления статистической суммы. Оператор T в ней играет роль оператора перехода типа ряд-ряд.

3. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

Оператор T , определенный формулой (2.21), в силу определенных свойств операторов X_j и U , как будет показано ниже, является экспонентой от некоторой квадратичной формы. Эта структура сохраняется и для его степеней, что позволит в результате выразить статистическую сумму в виде некоторого определителя.

Для записи квадратичных форм мы будем использовать компактную форму записи $f^* \mathcal{A} f = \sum_{j,k} \mathcal{A}_{jk} f_j^* f_k$, где \mathcal{A} обозначает матрицу порядка $(N + M) \times (N + M)$ с элементами $\mathcal{A}_{j,k}$.

Перед обсуждением свойств операторов полезно привести вначале две основные общие формулы, касающиеся операторов, представимых в виде экспоненты от квадратичных форм по фермионам. Первая формула описывает произведение двух таких операторов. Пусть операторы A_i ($i = 1, 2$) таковы, что $A_i = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}_i) f\}$; тогда

$$A_1 A_2 = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) f\}. \quad (3.1)$$

Вторая формула позволяет вычислять матричные элементы операторов. А именно, в p -частичном секторе матричные элементы оператора вида $A = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A})f\}$ выражаются через p -й минор матрицы \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | f_{i_p} \cdots f_{i_2} f_{i_1} A f_{j_1}^* f_{j_2}^* \cdots f_{j_p}^* | \Omega \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{i_1, j_1} & \mathcal{A}_{i_1, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_1, j_p} \\ \mathcal{A}_{i_2, j_1} & \mathcal{A}_{i_2, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_2, j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{A}_{i_p, j_1} & \mathcal{A}_{i_p, j_2} & \cdots & \mathcal{A}_{i_p, j_p} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формулы (3.1) и (3.2) могут быть доказаны разными методами. Например, эти формулы могут быть получены как следствия интеграла гауссовского типа в формализме интегрирования по грассмановым переменным, в котором операторы, зависящие от фермионов, являются интегральными операторами. Структура ядер операторов, представимых как экспонента от квадратичной формы по фермионам, сохраняется при свертке, и поэтому такие операторы иногда называют операторами с самовопроизводящимися ядрами [26].

Чтобы найти для оператора T соответствующую ему матрицу \mathcal{T} в представлении в виде экспоненты $T = \exp\{f^* \ln(\mathcal{T})f\}$, необходимо найти аналогичные матрицы для элементарных операторных сомножителей, содержащихся в выражении (2.21), а именно операторов X_j и $P_{j, j+1}$ (см. формулу (2.20)). Для этого рассмотрим операторы $V_j(\alpha)$, где α – вещественный параметр, определяя их по формуле

$$V_j(\alpha) := \exp\{f^* \ln(\mathcal{V}_j(\alpha))f\}, \quad (3.3)$$

где $(N + M) \times (N + M)$ матрицы $\mathcal{V}_j(\alpha)$ имеют следующую блочную структуру:

$$\mathcal{V}_j(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & \\ & \alpha & 1 & \\ & 1 & \alpha & \\ & & & I_{(N+M-j-1)} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Здесь и всюду ниже $I_{(p)}$ обозначает единичную $p \times p$ матрицу. Полагая $\alpha \neq 1$, непосредственным вычислением получаем

$$\begin{aligned} V_j(\alpha) &= 1 + (\alpha - 1)(q_j + q_{j+1}) \\ &\quad + \alpha(\alpha - 2)q_j q_{j+1} + f_j^* f_{j+1} + f_{j+1}^* f_j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что, поскольку это выражение и матрицы $\mathcal{V}_j(\alpha)$, очевидно, хорошо определены при $\alpha \rightarrow 1$, мы можем распространить эквивалентность формул (3.3) и (3.5) также и на случай $\alpha = 1$. Указанный специальный случай важен тем, что выражение (3.5) при $\alpha = 1$ переходит в выражение (2.17) для операторов X_j . Полагая, что $X_j = V_j(1)$ также и для представления в виде экспоненты, мы можем написать

$$X_j = \exp\{f^* \ln(\mathcal{X}_j)f\}, \quad \mathcal{X}_j := \mathcal{V}_j(1). \quad (3.6)$$

Подчеркнем, что, поскольку операторы X_j и матрицы \mathcal{X}_j имеют нулевые собственные значения, формула (3.6) должна пониматься в смысле некоторого предела. Операторы $V_j(\alpha)$ являются подходящей регуляризацией операторов X_j в том смысле, что $X_j = \lim_{\alpha \rightarrow 1} V_j(\alpha)$. Соответственно, логарифм матрицы \mathcal{X}_j должен пониматься как $\ln(\mathcal{X}_j) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \ln(\mathcal{V}_j(\alpha))$. Ниже, однако, мы будем иметь дело только с самими матрицами \mathcal{X}_j , а не с логарифмами от них.

Далее, полагая $\alpha = 0$ в выражении (3.5), мы также приходим к выражению (2.18) для операторов перестановки при $k = j + 1$, т.е. $P_{j,j+1} = V_j(0)$. Таким образом,

$$P_{j,j+1} = \exp\{f^* \ln(\mathcal{P}_{j,j+1})f\}, \quad \mathcal{P}_{j,j+1} := \mathcal{V}_j(0). \quad (3.7)$$

Принимая во внимание формулы (2.20) и (3.1) для оператора циклического сдвига $N + M$ фермионов, в свою очередь, мы получим представление $U = \exp\{f^* \ln(\mathcal{U})f\}$, где

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} & 1 \\ I_{(N+M-1)} & \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Вообще, для любого оператора, соответствующего некоторому элементу симметрической группы, будет справедливо представление в виде экспоненты от квадратичной формы по фермионам с логарифмом от матрицы соответствующей подстановки элементов, что есть, очевидно, следствие формул (3.1) и (3.7).

В результате, для оператора T имеем представление искомого вида с матрицей \mathcal{T} , равной

$$\mathcal{T} = \mathcal{X}_N \cdots \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_1 \mathcal{U}. \quad (3.9)$$

Вообще, для любой целой степени оператора T справедлива формула $T^k = \exp\{f^* \ln(\mathcal{T}^k)f\}$, причем, как оказывается, явный вид матриц

\mathcal{T}^k ($k = 1, \dots, M$) может быть получен прямым вычислением. Ниже мы приводим результат этого вычисления. Эти формулы могут быть доказаны, например, по индукции.

Матрицы \mathcal{T}^k представимы в виде блочных матриц вида

$$\mathcal{T}^k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, M). \quad (3.10)$$

Матрица A_k является квадратной, размерности $N \times N$, нижнетреугольной матрицей, элементы которой выражаются через биномиальные коэффициенты по формуле

$$(A_k)_{ij} = \binom{i-j+k-1}{i-j}. \quad (3.11)$$

Матрица B_k является прямоугольной, размерности $N \times M$, и ее первые $M-k$ столбцов нулевые; матричные элементы даются формулой

$$(B_k)_{ij} = \binom{i+j-M+k-2}{j-M+k-1}. \quad (3.12)$$

Матрица C_k также является прямоугольной, но имеет размерность $M \times N$, и ее последние $M-k$ строк нулевые; матричные элементы даются формулой

$$(C_k)_{ij} = \binom{N+k-i-j}{k-i}. \quad (3.13)$$

Матрица D_k является квадратной, размерности $M \times M$ и, в свою очередь, обладает блочной структурой вида

$$D_k = \begin{pmatrix} & S_k \\ I_{(M-k)} & \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Здесь квадратная $k \times k$ матрица S_k является верхнетреугольной, с элементами

$$(S_k)_{ij} = \binom{j-i+N-1}{j-i}, \quad (3.15)$$

где $i, j = 1, \dots, k$.

Обратимся теперь к вычислению статистической суммы. Применяя формулу (3.2) к представлению (2.22), для статистической суммы

имеем выражение в виде минора матрицы B_M , составленного из элементов последних b строк и последних b столбцов (напомним, что $M = a + b$, $N = b + c$). Таким образом, получим

$$Z = \det H, \quad (3.16)$$

где $b \times b$ матрица H имеет матричные элементы

$$H_{ij} = (B_M)_{c+i, a+j} = \begin{pmatrix} a + c + i + j - 2 \\ a + j - 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Матрица H может быть записана как произведение трех матриц

$$H = \Lambda_c^{-1} \tilde{H} \Lambda_a^{-1}, \quad (3.18)$$

где через Λ_p ($p = 0, 1, \dots$) обозначена диагональная $b \times b$ матрица с элементами

$$(\Lambda_p)_{ij} = (p + i - 1)! \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

а матрица \tilde{H} является ганкелевой,

$$\tilde{H}_{ij} = (a + c + i + j - 2)! = \int_0^\infty e^{-x} x^{a+c+i+j-2} dx. \quad (3.20)$$

Из формулы для матричных элементов в терминах интеграла следует, что матрица \tilde{H} для фиксированных a и c и различных $b = 1, 2, \dots$ связана с ансамблем полиномов Лагерра $\{L_k^{(a+c)}(x)\}_{k=0,1,\dots}$. Напомним, что полиномы Лагерра имеют явный вид

$$L_k^{(\lambda)}(x) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k+\lambda}{k-l} \frac{x^l}{l!} \quad (3.21)$$

и удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\lambda L_k^{(\lambda)}(x) L_{k'}^{(\lambda)}(x) dx = h_k \delta_{kk'} \quad (\lambda > -1), \quad (3.22)$$

где $h_k = \Gamma(\lambda + k + 1)/k!$. Используя тот факт, что для определителя ганкелевой матрицы справедлива формула (см., например, [27])

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{h_k}{\mu_k^2}, \quad (3.23)$$

где μ_k обозначает старший коэффициент ассоциированного полинома степени k , и учитывая, что в рассматриваемом нами случае h_k и μ_k равны

$$h_k = \frac{(k+a+c)!}{k!}, \quad \mu_k = \frac{1}{k!}, \quad (3.24)$$

получим

$$\det \tilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} k!(k+a+c)!. \quad (3.25)$$

В результате для статистической суммы имеем формулу

$$Z = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{k!(k+a+c)!}{(k+a)!(k+c)!}. \quad (3.26)$$

Раскрывая в полученной формуле факториалы (рассматривая разные случаи, например, полагая, что $a \leq b \leq c$) и добавляя подходящие сомножители в числитель и знаменатель, нетрудно получить выражение

$$\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}, \quad (3.27)$$

которое является знаменитой формулой Мак-Магона для числа плоских разбиений в ящике размером $a \times b \times c$. Отметим, что формула (3.26), также как и (3.27), верна для любых натуральных a , b и c , без ограничений.

4. Одноточечная корреляционная функция

Занумеруем вертикальные линии решетки на правой картинке рис. 1 числами $m = 1, \dots, M$ слева направо, а горизонтальные линии числами $n = 1, \dots, N$ снизу вверх. Таким образом, для вершин решетки будем иметь декартовы координаты (m, n) , с “началом координат” $(1, 1)$ в вершине в левом нижнем углу решетки.

Рассмотрим одноточечную корреляционную функцию $G(m, n)$, которую мы определим как вероятность обнаружения линии на горизонтальном ребре, соединяющем вершины с координатами (m, n) и $(m+1, n)$. Как уже упоминалось во введении, с точки зрения интерпретации плоских разбиений как укладок шестиугольника ромбами эта корреляционная функция равна, с точностью до умножения на

статистическую сумму, числу укладок ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом определенного типа.

Для интересующей нас корреляционной функции, аналогично формуле (2.22) для статистической суммы, имеем следующую формулу:

$$G(m, n) = \frac{1}{Z} \langle L | T^m q_{N-n+1} T^{M-m} | \tilde{R} \rangle. \quad (4.1)$$

Здесь, как и выше, оператор q_j является плотностью числа фермионов, $q_j := f_j^* f_j$. Чтобы воспользоваться формулой (3.1), заменим оператор q_j подходящей экспонентой от квадратичной формы по фермионам, используя дифференцирование по параметру:

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \exp\{\alpha q_j\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \exp\{f^* \ln(I + (e^\alpha - 1)\mathcal{E}_j)f\} \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где \mathcal{E}_j обозначает $(N + M) \times (N + M)$ матрицу со всеми элементами равными нулю, кроме одного, равного единице и стоящего на диагонали на j -й позиции. Для корреляционной функции, в результате применения формулы (3.2), имеем

$$\begin{aligned} G(m, n) &= \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \alpha} \det[H + (e^\alpha - 1)W] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \text{tr}(H^{-1}W), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где мы использовали формулу (3.16). Здесь W – матрица ранга один, являющаяся правым нижним подблоком, размерности $b \times b$, правого верхнего блока, размерности $N \times M$, матрицы $T^m \mathcal{E}_{N-n+1} T^{M-m}$. Обозначая через E_{N-n+1} матрицу левого верхнего блока, размерности $N \times N$, матрицы \mathcal{E}_{N-n+1} , чьи остальные блоки равны нулю, для интересующего нас произведения матриц имеем

$$T^m \mathcal{E}_{N-n+1} T^{M-m} = \begin{pmatrix} \cdots & A_m E_{N-n+1} B_{M-m} \\ \cdots & \dots \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где точками обозначены несущественные для нас блоки. Матрица W определяется как матрица с элементами

$$W_{ij} = (A_m E_{N-n+1} B_{M-m})_{c+i, a+j}. \quad (4.5)$$

Учитывая, что $(E_k)_{ij} = \delta_{ki}\delta_{kj}$, имеем

$$W_{ij} = (A_m)_{c+i, N-n+1} (B_{M-m})_{N-n+1, a+j} \quad (4.6)$$

и, используя (3.11) и (3.12), приходим к явному выражению

$$W_{ij} = \binom{i+m+n-b-2}{i+n-b-1} \binom{j+a+b+c-m-n-1}{j+a-m-1}. \quad (4.7)$$

Из этих формул видно, что матрица W имеет вид произведения вектора-столбца на вектор-строку.

Рассмотрим теперь задачу обращения матрицы H . Из формулы (3.18) следует, что

$$H^{-1} = \Lambda_a \tilde{H}^{-1} \Lambda_c, \quad (4.8)$$

где диагональные матрицы Λ_a и Λ_c даются формулой (3.19). Поскольку матрица \tilde{H} ганкелева, матричные элементы обратной матрицы содержатся в ядре Кристоффеля–Дарбу $K_b(x, y)$ полиномов Лагерра,

$$K_b(x, y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{k!}{(k+a+c)!} L_k^{(a+c)}(x) L_k^{(a+c)}(y), \quad (4.9)$$

которое является производящей функцией для этих матричных элементов,

$$K_b(x, y) = \sum_{i, j=1}^b \tilde{H}_{ij}^{-1} x^{i-1} y^{j-1}. \quad (4.10)$$

Используя формулу для полиномов Лагерра (3.2), нетрудно найти матричные элементы матрицы \tilde{H}^{-1} . В результате для элементов матрицы H^{-1} получим

$$H_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} (i+a-1)! (j+c-1)!}{(i+a+c-1)! (i-1)! (j+a+c-1)! (j-1)!} \times \sum_{k=\max(i, j)-1}^{b-1} \frac{k! (k+a+c)!}{(k-i+1)! (k-j+1)!}. \quad (4.11)$$

После подстановки полученных выражений в формулу (4.3) для корреляционной функции мы получаем выражение в терминах тройной суммы. Записывая суммы по i и j как обрывающиеся гипергеометрические ряды, окончательное выражение для корреляционной

функции можно представить в виде суммы произведений двух гипергеометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 G(m, n) = & \sum_{k=\max(0, m-a, b-n)}^{b-1} \frac{(k+a)!(k+c)!}{k!(k+a+c)!} \\
 & \times \binom{k+a+b+c-m-n}{k+a-m} \binom{k+m+n-b-1}{k+n-b} \\
 & \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, -k-a+m, -k-a-c \\ -k-a-b-c+m+n, -k-a \end{matrix} \middle| 1 \right) \\
 & \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, -k-n+b, -k-a-c \\ -k-m-n+b+1, -k-c \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

В этой формуле число членов в обоих гипергеометрических рядах определяется значениями первых двух верхних индексов. Кроме того, условия суммирования по k таковы, что вторые верхние индексы гипергеометрических рядов не положительны ни при каких значениях натуральных чисел a, b, m, n .

Формула (4.12) справедлива для любых значений размеров ящика a, b, c и значений координат $m = 1, \dots, a+b-1$ и $n = 1, \dots, b+c$. Формула (4.12) численно согласуется с результатами, полученными в работах [7–10] для специальных случаев перечислений укладок ромбами шестиугольника с фиксированным ромбом.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*. Addison-Wesley Publishing, 1976.
2. D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
3. B. Lindstrom, *On the vector representations of induced matroids*. — Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 85–90.
4. I. M. Gessel, X. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*. — Adv. Math. **58** (1985), 300–321.
5. K. Johansson, *Nonintersecting paths, random tilings and random matrices*. — Probab. Theory Rel. Fields **123** (2002), 225–280.
6. H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, *The shape of a typical boxed plane partition*. — New York J. Math. **4** (1998), 137–165.
7. M. Fulmek, C. Krattenthaler, *The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis*. I. — Ann. Combin. **2** (1998), 19–40; [arXiv:math/9712244](https://arxiv.org/abs/math/9712244).
8. M. Fulmek, C. Krattenthaler, *The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis*. II. — Europ. J. Combin. **21** (2000), 601–640; [arXiv:math/9909038](https://arxiv.org/abs/math/9909038).

9. C. Krattenthaler, *A (conjectural) 1/3-phenomenon for the number of rhombus tilings of a hexagon which contain a fixed rhombus*. — In: A. K. Agarwal et al. (eds.), *Number Theory and Discrete Mathematics*, Hindustan Book Agency, New Delhi (2002), pp. 13–30; [arXiv:math/0101009](#).
10. M. Ciucu, C. Krattenthaler, *A factorization theorem for classical group characters, with applications to plane partitions and rhombus tilings*, [arXiv:0812.1251 \[math.CO\]](#).
11. A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram*. — *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 581–603.
12. P. L. Ferrari, H. Spohn, *Step fluctuations for a faceted crystal*. — *J. Stat. Phys.* **113** (2003), 1–46.
13. A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Random skew plane partitions and the Pearcey process*, [arXiv:math/0503508](#).
14. R. Kenyon, A. Okounkov, *Limit shapes and the complex Burgers equation*, [arXiv:math-ph/0507007](#).
15. R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and amoebae*. — *Ann. Math.* **163**, No. 3 (2006), 1019–1056.
16. G. Kuperberg, *Another proof of the alternative-sign matrix conjecture*. — *Int. Math. Res. Not.* **1996** (1996), 139–150.
17. D. Zeilberger, *Proof of the refined alternating sign matrix conjecture*. — *New York J. Math.* **2** (1996), 59–68; [arXiv:math/9606224](#).
18. G. Kuperberg, *Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof*, [arXiv:math.CO/0008184](#).
19. A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *Bethe roots and refined enumeration of alternating-sign matrices*. — *J. Stat. Mech.* (2006), P07004; [arXiv:math-ph/0605004](#).
20. F. Colomo, A. G. Pronko, *The limit shape of large alternating-sign matrices*, [arXiv:0803.2697 \[math-ph\]](#).
21. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*. — *J. Phys. A* **38** (2005), 9415–9430; [arXiv:cond-mat/0503748](#).
22. Н. В. Цилевич, *Квантовый метод обратной задачи для q-бозонной модели и симметрические функции*. — *Функц. анализ и его прил.* **40**, вып. 3 (2006), 53–65.
23. Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель и случайные укладки*. — *Теор. мат. физ.* **155**, вып. 1 (2008), 25–38.
24. Н. М. Боголюбов, *Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями*. Препринт ПОМИ 4/2008.
25. C. Destri, H. J. de Vega, *Light-cone lattice approach to fermionic theories in 2D: The massive Thirring model*. — *Nucl. Phys. B* **290** (1987), 363–391.
26. C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, V. 1. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
27. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1975).

Kapitonov V. S., Pronko A. G. The five-vertex model and boxed plane partitions.

Boxed plane partitions are considered in terms of the five-vertex model on a finite lattice with fixed boundary conditions. Assuming that all weights of the model have the same value, the one-point correlation function describing the probability of having a given state on an arbitrary horizontal edge of the lattice is calculated. This is equivalent to the enumeration of boxed plane partitions that correspond to rhombus tilings of a hexagon with one fixed rhombus of a particular type. The solution of the problem is given for the case of a box of generic size.

С.-Петербургский государственный
технологический институт
(Технический университет)
E-mail: kapiton@pdmi.ras.ru

Поступило 10 декабря 2008 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: agp@pdmi.ras.ru