Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 517.957+519.6

О непродолжаемых решениях и разрушении решений псевдопараболических уравнений с коэрцитивной и знакопостоянной нелинейностями: аналитическое и численное исследование

И. И. Колотов, А. А. Панин

Проведено исследование разрушения решений двух начально-краевых задач, различие между которыми заключается в виде нелинейности уравнения. Это продиктовало различие в подходах к аналитическому доказательству разрушения решения, однако результат о разрушении решения получен в обоих случаях. Аналитическое исследование дополнено численным, позволяющим в каждом конкретном примере уточнить оценку времени разрушения и его характер.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: blow-up, непродолжаемое решение, псевдопараболическое уравнение, экстраполяция по Ричардсону.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12052

1. Введение

Настоящая работа является естественным продолжением работ по исследованию явления разрушения решений в нелинейных уравнениях (см., например, монографию [1], посвященную уравнениям соболевского типа, а также работы [2]–[9] и др.) В настоящей работе впервые проводится аналитическое и численное исследование разрушения решений начально-краевых задач Дирихле для уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \lambda u) + \Delta u + |u|^{q-1}u = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \lambda u) + \Delta u + |u|^{q} = 0, \tag{1.2}$$

близких к уравнению Хоффа [10]. В обеих задачах число λ меньше первого собственного значения λ_1 задачи Дирихле для оператора Лапласа в рассматриваемой области. В первом случае применялся энергетический метод Левина в модификации Корпусова [1], [11], во втором – метод пробных функций [12] в варианте, получившем название метода первой собственной функции [11]. (Отметим еще один способ исследования режимов с обострением – метод автомодельных режимов, основанный на

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00042).

различных признаках сравнения и развитый в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [13] (см. также [14]).)

Статья организована следущим образом. В разделе 2 даны постановки исследуемых начально-краевых задач. Раздел 3 посвящен доказательству теоремы о непродолжаемых решениях этих задач (при этом часть доказательства вынесена в приложение), а в разделе 4 устанавливаются достаточные условия разрушения их решений. Наконец, в разделе 5 кратко приведены результаты численных расчетов. В заключении приведены некоторые выводы и наблюдения.

2. Постановка задач

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1; 2; 3)$ с границей гладкости $C^{2,\delta}$ $(\delta \in (0, 1])$ рассматриваются начально-краевые задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \lambda u) + \Delta u + |u|^{q-1}u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \lambda u) + \Delta u + |u|^{q} = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, а параметр q удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} q > 2, & N = 1 \quad \text{или} \quad N = 2; \\ 2 < q \leqslant 5, & N = 3. \end{cases} \tag{2.3}$$

Для каждой из задач (2.1), (2.2) мы установим существование и единственность непродолжаемого решения и получим достаточные условия разрушения решения.

3. Теорема о непродолжаемых решениях

Задачи (2.1), (2.2) мы будем рассматривать в сильном обобщенном смысле. Для этого введем в рассмотрение пространство Соболева $H_0^1(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_2 \equiv \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx,$$

а также линейный оператор A и функционалы F_i $(i = 1; 2)$ и H:

$$A = -\Delta - \lambda \mathbb{J}_0, \qquad A\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega),$$

где

$$\mathbb{J}_0\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \tag{3.1}$$

– оператор вложения,

$$F_1(v) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v|^{q+1} \, dx, \quad F_2(v) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v|^q v \, dx,$$

$$F_i\colon L^{q+1}(\Omega)\to\mathbb{R},\qquad i=1,2,$$
$$H(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx,\qquad H\colon H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}.$$

Отметим сразу важные для нас свойства этих отображений. Пусть $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ – скобки двойственности между пространствами $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$. Тогда, очевидно,

$$\forall v,w\in H_0^1(\Omega)\qquad \langle Av,w\rangle=\langle Aw,v\rangle,\quad \langle Av,v\rangle\geqslant(\lambda_1-\lambda)\|v\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Далее, производные Фреше функционалов F_i и H имеют вид соответственно

$$F'_{1,f}(v)=|v|^{q-1}v,\qquad F'_{2,f}(v)=|v|^q,\qquad H'_f(v)=-\Delta v.$$

В силу выбора параметра q согласно условиям (2.3) и сформулированных выше требований относительно области Ω можно утверждать [15], что имеет место непрерывное и плотное вложение

$$H_0^1(\Omega)\xrightarrow{\mathbb{J}}L^{q+1}(\Omega), \tag{3.3}$$

а также непрерывное и инъективное вложение

$$L^{(q+1)/q}(\Omega)\simeq(L^{q+1}(\Omega))^*\xrightarrow{\mathbb{J}^t}H^{-1}(\Omega). \tag{3.4}$$

Следовательно, задачи (2.1), (2.2) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}(Au)+H'_f(u)=F'_{i,f}(u), & t>0,\\ u|_{t=0}=u_0,\end{cases} \tag{3.5}$$

где в правой части опущены, но подразумеваются операторы вложения $\mathbb{J}$ и $\mathbb{J}^t$. При этом $i=1$ соответствует задаче (2.1), $i=2$ – задаче (2.2).

В силу теоремы Браудера–Минти ([16; следствие 2.3, с. 97]) оператор A имеет липшиц-непрерывный обратный A^{-1}, поэтому задачи (3.5) могут быть переписаны в эквивалентном виде:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u=-A^{-1}H'_f(u)+A^{-1}F'_{i,f}(u), & t>0,\\ u|_{t=0}=u_0.\end{cases} \tag{3.6}$$

Так как операторы $F'_{i,f}\colon L^{q+1}(\Omega)\to L^{(q+1)/q}(\Omega)$ являются ограниченно липшиц-непрерывными (доказательство этого факта вынесено в приложение), к задачам (3.6) применима теорема 4 работы [17], что позволяет сформулировать для задач (3.6) (или, что то же самое, для задач (3.5)) теорему о непродолжаемом решении:

Теорема 1. *Каждая из задач* (3.5) *имеет единственное непродолжаемое решение* $u(t)\in C^1([0,T_0);H_0^1(\Omega))$ *на некотором – конечном или бесконечном – промежутке* $[0,T_0)$, *причем в случае* $T_0<+\infty$ *решение является бесконечно большим при* $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to T_0-0}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}=+\infty. \tag{3.7}$$

4. Разрушение решений

4.1. Разрушение решения задачи (2.1). Доказательство разрушения решения задачи (2.1) будет в основном следовать работе [18], однако непосредственно результат указанной работы в рассматриваемой ситуации неприменим, поскольку в [18] рассматривалось уравнение второго порядка по времени с коэрцитивным оператором при старшей производной, что исключает возможность выбрать этот оператор нулевым. Поэтому доказательство будет приведено здесь достаточно подробно.

Заметим, что для всякой функции $v(t) \in C^1((t_1, t_2); H_0^1(\Omega))$ в силу симметричности оператора A (см. первое из соотношений (3.2)) верно тождество

$$\frac{d}{dt}\langle Av, v\rangle = \langle Av', v\rangle + \langle Av, v'\rangle = 2\langle Av', v\rangle. \tag{4.1}$$

Введем теперь функции $\Phi(t)$ и $J(t)$, зависящие от решения $u(t)$, по следующим формулам:

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\langle Au(s), u(s)\rangle\, ds + \frac{1}{4}\langle Au_0, u_0\rangle, \tag{4.2}$$

$$J(t) = \int_0^t \langle Au'(s), u'(s)\rangle\, ds + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle. \tag{4.3}$$

Лемма 1. *На всем промежутке существования решения верно неравенство*

$$(\Phi'(t))^2 \leqslant 2\Phi J. \tag{4.4}$$

Доказательство. В силу симметричности и положительной определенности оператора A (см. (3.2)) имеет место неравенство Коши–Буняковского

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega) \qquad |\langle Av, w\rangle| \leqslant \sqrt{\langle Av, v\rangle}\sqrt{\langle Aw, w\rangle}. \tag{4.5}$$

Преобразуем выражение для $\Phi'(t)$:

$$(\Phi'(t))^2 = \left(\frac{1}{2}\langle Au(t), u(t)\rangle\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\langle Au(s), u(s)\rangle\, ds + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle\right)^2.$$

Подставив вместо производной под знаком интеграла в последней формуле ее выражение из (4.1) и используя элементарное неравенство $(a+b)^2 \leqslant (|a|+|b|)^2$, получаем

$$\begin{aligned}(\Phi'(t))^2 &= \left(\int_0^t \langle Au', u\rangle\, ds + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle\right)^2 \\ &\leqslant \left(\left|\int_0^t \langle Au', u\rangle\, ds\right| + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle\right)^2 \leqslant \left(\int_0^t |\langle Au', u\rangle|\, ds + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle\right)^2 \\ &\leqslant \left(\int_0^t \sqrt{\langle Au', u'\rangle}\sqrt{\langle Au, u\rangle}\, ds + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\langle Au_0, u_0\rangle}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\langle Au_0, u_0\rangle}\right)^2,\end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы применили под знаком интеграла неравенство Коши–Буняковского (4.5). Наконец, применяя неравенства Коши–Буняковского сначала для интегралов на отрезке $[0, t]$, а затем для числовых столбцов размерности 2,

получаем

$$(\Phi'(t))^2 \leqslant \left(\sqrt{\int_0^t \langle Au', u'\rangle\, ds}\sqrt{\int_0^t \langle Au, u\rangle\, ds} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\langle Au_0, u_0\rangle}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\langle Au_0, u_0\rangle}\right)^2$$
$$\leqslant \left(\int_0^t \langle Au', u'\rangle\, ds + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle\right)\left(\int_0^t \langle Au, u\rangle\, ds + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle\right) = 2J\Phi.$$

Замечание 1. При доказательстве леммы 1 тот факт, что $u(t)$ – решение, не использовался. Требовались лишь C^1-гладкость функции $u(t)$ и начальное условие $u(0) = u_0$.

Напомним, что в правой части уравнения (3.5) подразумеваются вложения (3.3) и (3.4):

$$F'_{1,f}(u) \equiv \mathbb{J}^t F'_{1,f}(\mathbb{J}u),$$

и подействуем обеими частями уравнения (3.5) на решение $u(t) \in C^1([0, T_0); H_0^1(\Omega))$. Получим

$$\left\langle \frac{d}{dt} Au, u \right\rangle + \langle H'_f(u), u\rangle = \langle F'_{1,f}(u), u\rangle.$$

Используя (4.1), последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle Au, u\rangle\right) + \langle H'_f(u), u\rangle = \langle F'_{1,f}(u), u\rangle$$

или, с учетом (4.2), в виде

$$\Phi'' + \langle H'_f(u), u\rangle = \langle F'_{1,f}(u), u\rangle \tag{4.6}$$

– первое энергетическое равенство.

Для получения второго энергетического равенства подействуем обеими частями уравнения (3.5) на производную $u'(t) \in C([0, T_0); H_0^1(\Omega))$ решения и учтем, что в силу цепного правила для производных Фреше верны тождества

$$\langle H'_f(u), u'\rangle = \frac{d}{dt} H(u), \qquad \langle F'_{1,f}(u), u'\rangle = \frac{d}{dt} F_1(u).$$

Получим

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t \langle Au', u'\rangle\, ds + H(u)\right] = \frac{d}{dt} F_1(u).$$

После интегрирования по t имеем второе энергетическое равенство

$$\int_0^t \langle Au', u'\rangle\, ds - \overline{E}(0) + H(u) = F_1(u), \tag{4.7}$$

где $\overline{E}(0) := H(u_0) - F_1(u_0)$.

Заметим, что

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \theta F_1(v) = \langle F'_{1,f}(v), v\rangle, \quad \theta = q + 1 > 3,$$

что позволяет скомбинировать (4.6) и (4.7) следующим образом:

$$\Phi'' + \langle H_f'(u), u\rangle = \langle F_{1,f}'(u), u\rangle = \theta F_1(u) = \theta \int_0^t \langle Au', u'\rangle\, ds - \theta\overline{E}(0) + \theta H(u).$$

Преобразуем последнее соотношение:

$$\begin{aligned}\Phi'' + \theta\overline{E}(0) &= \theta H(u) - \langle H_f'(u), u\rangle + \theta \int_0^t \langle Au', u'\rangle\, ds \\ &= \theta H(u) - \langle H_f'(u), u\rangle + \theta J - \frac{\theta}{2}\langle Au_0, u_0\rangle. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Теперь заметим, что

$$\langle H_f'(u), u\rangle = \langle -\Delta u, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = 2H(u), \qquad H(u) \geqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$\theta H(u) - \langle H_f'(u), u\rangle = (\theta - 2)H(u) \geqslant 0.$$

Следовательно, соотношение (4.8) влечет неравенство

$$\Phi'' + \theta\overline{E}(0) \geqslant \theta J - \frac{\theta}{2}\langle Au_0, u_0\rangle,$$

или

$$\Phi'' + E(0) \geqslant \theta J, \tag{4.9}$$

где

$$E(0) := \theta\overline{E}(0) + \frac{\theta}{2}\langle Au_0, u_0\rangle = \theta H(u_0) - \theta F_1(u_0) + \frac{\theta}{2}\langle Au_0, u_0\rangle.$$

Поскольку $\Phi(t) \geqslant 0$, из (4.9) получаем

$$\Phi\Phi'' + E(0)\Phi \geqslant \theta J\Phi \overset{\text{лемма 1}}{\geqslant} \frac{\theta}{2}(\Phi')^2,$$

или

$$\Phi\Phi'' - \frac{\theta}{2}(\Phi')^2 + E(0)\Phi \geqslant 0. \tag{4.10}$$

В § 2 работы [18] было рассмотрено дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geqslant 0, \qquad \alpha > 1, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Неравенство (4.10) сводится к (4.11), если положить $\alpha = \theta/2$, $\beta = E(0)$, $\gamma = 0$. При этом должно быть $E(0) \geqslant 0$. Но в случае $E(0) < 0$ в силу неравенства $\Phi \geqslant 0$ получаем из (4.10) как следствие неравенство

$$\Phi\Phi'' - \frac{\theta}{2}(\Phi')^2 \geqslant 0.$$

Поэтому независимо от знака $E(0)$ результат § 2 работы [18] применим к рассматриваемой ситуации, и из теоремы 2.1 указанной работы мы получаем, что при условиях

$$\Phi(0) > 0, \qquad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{2\beta}{2\alpha - 1}}\,\Phi(0), \tag{4.12}$$

где

$$\alpha = \frac{\theta}{2}, \qquad \beta = \max(0, E(0)),$$

время T_0 существования решения удовлетворяет оценке

$$T_0 \leqslant T^* \equiv \frac{\Phi(0)}{(\alpha-1)\sqrt{(\Phi'(0))^2 - 2\beta\Phi(0)/(2\alpha-1)}}. \tag{4.13}$$

Отметим, что при $E(0) < 0$ оценка на время разрушения не зависит от начальных данных, поскольку (см. (4.15)) величины $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ пропорциональны.

Проведенные рассуждения (с учетом теоремы 1) доказывают следующую теорему.

Теорема 2. *Существует единственное непродолжаемое решение задачи* (2.1). *При условиях* (4.12) *это решение существует лишь на конечном промежутке* $[0, T_0)$, *где* T_0 *удовлетворяет оценке* (4.13), *причем в этом случае с необходимостью*

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = +\infty. \tag{4.14}$$

Замечание 2. Соотношения (4.12), (4.13) могут быть выписаны в явном виде, т.е. величины α, β, $E(0)$, T^* могут быть выражены через λ, q и u_0. В частности,

$$\Phi(0) = \frac{1}{4}\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)\,dx, \qquad \Phi'(0) = 2\Phi(0), \tag{4.15}$$

$$E(0) = (q+1)\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)u_0^2\right)dx - \int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx, \tag{4.16}$$

а второе из условий (4.12) эквивалентно неравенству

$$q\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2)\,dx > \max\left(0;\, 2(q+1)\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)u_0^2\right)dx - 2\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx\right).$$

Легко видеть, что при некоторых u_0 условия (4.12) реализуются (первое из них выполнено автоматически при $u_0 \not\equiv 0$ в силу $\lambda < \lambda_1$), причем каждый из случаев $E(0) \geqslant 0$, $E(0) < 0$ возможен.

Наконец, получаем:

$$T^* = \frac{1}{q-1}, \qquad \text{при} \quad E(0) < 0, \tag{4.17}$$

$$T^* = \frac{\langle Au_0, u_0\rangle}{(q-1)\zeta}, \qquad \text{при} \quad E(0) \geqslant 0, \tag{4.18}$$

где

$$\zeta = \sqrt{\langle Au_0, u_0\rangle^2 - \langle Au_0, u_0\rangle \cdot \frac{2}{q}\left\{(q+1)\int_\Omega \left[|\nabla u_0|^2 - \frac{\lambda}{2}u_0^2\right]dx - \int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx\right\}}$$

и, напомним,

$$\langle Au_0, u_0\rangle = \int_\Omega [|\nabla u_0|^2 - \lambda u_0^2]$$

(полностью явного выражения для T^* мы не приводим ввиду его громоздкости).

Для задачи (2.1) можно получить и оценку снизу на время разрушения. Для этого перепишем уравнение задачи (2.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta u - \lambda u) = \Delta u + |u|^{q-1}u = 0. \tag{4.19}$$

С учетом граничных условий задачи (2.1) нетрудно установить следующие соотношения:

$$\langle \Delta u, u\rangle = -\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx = -\|\nabla u\|_2^2;$$
$$\left\langle \frac{d}{dt}(\Delta u), u\right\rangle = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2;$$
$$\langle |u|^{q-1}u, u\rangle = \int_\Omega |u|^{q+1}\,dx = \|u\|_{q+1}^{q+1},$$

где знак нормы с нижним индексом обозначает норму в соответствующем пространстве Лебега в области Ω. Поэтому после "умножения" уравнения (4.19) на u в смысле скобок двойственности между $H^{-1}(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2)}_{\mathscr{A}(t)} = -\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1}, \tag{4.20}$$

где мы ввели обозначение

$$\mathscr{A}(t) := \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2.$$

Заметим, что имеют место следующие оценки. Во-первых,

$$\|u\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\|\nabla u\|_2^2$$

(неравенство Фридрихса). Отсюда сразу получаем, что

$$\mathscr{A}(t) \geqslant \|\nabla u\|_2^2\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right). \tag{4.21}$$

Во-вторых,

$$\mathscr{A}(t) \leqslant \|\nabla u\|_2^2. \tag{4.22}$$

Из (4.20), (4.22) получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{1}{2}\mathscr{A}' \leqslant \|u\|_{q+1}^{q+1} - \mathscr{A}. \tag{4.23}$$

Чтобы его окончательно "замкнуть", заметим, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{q+1} \leqslant C_{q+1}\|\nabla u\|_2, \tag{4.24}$$

которое может быть доказано аналогично неравенству Фридрихса. (Оценку константы C_q для интересующего нас случая приведем ниже.) Следовательно, с учетом (4.21) получаем

$$\|u\|_{q+1}^2 \leqslant C_{q+1}^2\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \frac{C_{q+1}^2}{1 - \lambda/\lambda_1}\mathscr{A}(t),$$

или

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \frac{C_{q+1}^{q+1}}{(1-\lambda/\lambda_1)^{(q+1)/2}} (\mathscr{A}(t))^{(q+1)/2}.$$

С учетом последней оценки из неравенства (4.23) получаем

$$\mathscr{A}' \leqslant \frac{2C_{q+1}^{q+1}}{(1-\lambda/\lambda_1)^{(q+1)/2}} (\mathscr{A}(t))^{(q+1)/2} - 2\mathscr{A}. \tag{4.25}$$

Мы не будем задаваться целью точно решить неравенство (4.25) всегда, когда это возможно, и ограничимся его решением для случая $q = 3$.

При $q = 3$ неравенство (4.25) приобретает вид

$$\mathscr{A}' \leqslant B\mathscr{A}^2 - 2\mathscr{A}, \qquad \text{где} \quad B = \frac{2C_4^4}{(1-\lambda/\lambda_1)^2}. \tag{4.26}$$

Решение уравнения $a' = Ba^2 - 2a$ с начальным условием $a(0) = \mathscr{A}_0$ имеет вид

$$a(t) = \frac{2}{B - (B - 2/\mathscr{A}_0)e^{2t}},$$

откуда следует, что решение неравенства (4.26) имеет вид

$$\mathscr{A}(t) \leqslant \frac{2}{B - (B - 2/\mathscr{A}_0)e^{2t}}. \tag{4.27}$$

Неравенства (4.21), (4.22) можно переписать в виде двойного неравенства

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \mathscr{A}(t) \leqslant \|\nabla u\|_2^2,$$

из которого следует эквивалентность предельных соотношений

$$\lim_{t\to T_0-0} \|\nabla u(t)\| = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{t\to T_0-0} \mathscr{A}(t) = +\infty.$$

В то же время разрушение решения характеризуется (см. (4.14)) соотношением $\lim_{t\to T_0-0} \|\nabla u(t)\| = +\infty$. Это позволяет вывести из неравенства (4.27) нижнюю оценку времени разрушения:

$$T_{\text{low}} = \frac{1}{2} \ln \frac{B}{B - 2/\mathscr{A}_0}.$$

Теперь оценим константу $C \equiv c_4$ вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L^4(\Omega)$ в неравенстве (4.24) для случая $\Omega = [0, \pi]$, интересующего нас в целях сравнения данных численных примеров с теоретическими оценками.

При $x \in [0, \pi/2]$ имеем (с учетом нулевого граничного условия)

$$|v(x)|^2 = \left|\int_0^x v'(\xi)\,d\xi\right| \equiv \left|\int_0^x 1 \cdot v'(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \int_0^x 1^2\,d\xi \cdot \int_0^x (v'(\xi))^2\,d\xi$$
$$\leqslant x \cdot \int_0^x (v'(\xi))^2\,d\xi \leqslant x \cdot \int_0^{\pi/2} (v'(\xi))^2\,d\xi;$$

при $x \in [\pi/2, \pi]$ аналогично получаем

$$|v(x)|^2 = \left| \int_x^\pi v'(\xi)\, d\xi \right|^2 \leqslant \int_x^\pi 1^2\, d\xi \cdot \int_x^\pi (v'(\xi))^2\, d\xi \leqslant (\pi - x) \int_{\pi/2}^\pi (v'(\xi))^2\, d\xi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|v\|_4^4 &= \int_0^\pi |v|^4\, dx = \int_0^\pi (|v|^2)^2\, dx = \int_0^{\pi/2} (|v|^2)^2\, dx + \int_{\pi/2}^\pi (|v|^2)^2\, dx \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} dx\, x^2 \left(\int_0^{\pi/2} (v'(\xi))^2\, d\xi \right)^2 + \int_{\pi/2}^\pi dx (\pi - x)^2 \left(\int_{\pi/2}^\pi (v'(\xi))^2\, d\xi \right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \cdot \left[\left(\int_0^{\pi/2} (v'(\xi))^2\, d\xi \right)^2 + \left(\int_{\pi/2}^\pi (v'(\xi))^2\, d\xi \right)^2 \right] \\
&\leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \cdot \left[\int_0^{\pi/2} (v'(\xi))^2\, d\xi + \int_{\pi/2}^\pi (v'(\xi))^2\, d\xi \right]^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \cdot \left(\int_0^\pi (v'(\xi))^2\, d\xi \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \cdot \|v'\|_2^4.
\end{aligned}$$

А значит,

$$B = \frac{2c_4^4}{(1 - \lambda/\lambda_1)^2}, \qquad \text{где} \quad c_4^4 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^3,$$

$$T_{\text{low}} = \frac{1}{2} \ln \frac{B}{B - 2/\mathscr{A}_0}, \qquad \text{где} \quad \mathscr{A}_0 = \int_0^\pi (u_{0,x})^2\, dx - \lambda \int_0^\pi u_0^2\, dx. \tag{4.28}$$

4.2. Разрушение решения задачи (2.2). Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа в области Ω:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) + \lambda\varphi = 0, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

Мы используем классическую постановку, потому что при принятой нами гладкости границы собственные функции будут классическими. Пусть λ_1, φ_1 – первое собственное значение и первая собственная функция задачи (4.29). Согласно свойствам собственных функций можно утверждать, что собственная функция, отвечающая λ_1, знакопостоянна [19]. Для определенности будем считать, что $\varphi_1(x) \geqslant 0$. Это позволяет в случае, когда $\lambda < \lambda_1$, применить для получения теоретической оценки времени разрушения метод первой собственной функции [11].

Подействуем обеими частями уравнения (3.5) на функцию $\varphi_1(x)$, рассматриваемую как элемент пространства $H_0^1(\Omega)$. Получим

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega [(\nabla u, \nabla\varphi_1) - \lambda u\varphi_1]\, dx + \int_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi_1)\, dx = \int_\Omega |u|^q \varphi_1\, dx.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega (u\Delta\varphi_1 + \lambda u\varphi_1)\, dx + \int_\Omega u\Delta\varphi_1\, dx + \int_\Omega |u|^q \varphi_1\, dx = 0,$$

или, с учетом (4.29),

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(\lambda-\lambda_1)u\varphi_1\,dx-\lambda_1\int_\Omega u\varphi_1\,dx+\int_\Omega|u|^q\varphi_1\,dx=0.$$

Введем функционал J по формуле $J(t)=\int_\Omega u\varphi_1\,dx$. Тогда после деления на $(\lambda-\lambda_1)$ получим

$$J'(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda-\lambda_1}\,J(t)-\frac{1}{\lambda-\lambda_1}\int_\Omega|u|^q\varphi_1\,dx. \tag{4.30}$$

Теперь при помощи неравенства Гёльдера с учетом $\varphi_1(x)\geqslant 0$ оценим снизу последнее слагаемое:

$$\left|\int_\Omega u\varphi_1\,dx\right|=\left|\int_\Omega u\varphi_1^{1/q}\varphi_1^{(q-1)/q}\,dx\right|\leqslant\left(\int_\Omega|u|^q\varphi_1\,dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega\varphi_1\,dx\right)^{(q-1)/q},$$

откуда

$$\left|\int_\Omega u\varphi_1\,dx\right|^q\leqslant\left(\int_\Omega|u|^q\varphi_1\,dx\right)\left(\int_\Omega\varphi_1\,dx\right)^{q-1}$$

или

$$\int_\Omega|u|^q\varphi_1\,dx\geqslant\frac{|J|^q}{C}, \tag{4.31}$$

где $C=(\int_\Omega\varphi_1\,dx)^{q-1}$. С учетом оценки (4.31) из уравнения (4.30) получим неравенство

$$J'(t)\geqslant-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda}\,J(t)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda}\frac{|J|^q}{C}. \tag{4.32}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda},\qquad K=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda)C}.$$

Из неравенства (4.32) при условии

$$J_0=J(0)>\left(\frac{\Lambda}{K}\right)^{1/(q-1)} \tag{4.33}$$

(заметим, что если это условие не выполнено, то разрушение все равно может иметь место, см. пример 2.2) следует неравенство [11; с. 83–84]

$$(J(t))^{(q-1)}\geqslant\frac{\Lambda J_0^{q-1}}{KJ_0^{q-1}-(KJ_0^{q-1}-\Lambda)\exp(\Lambda(q-1)t)}.$$

Отсюда вытекает оценка сверху времени разрушения решения:

$$T_0\leqslant\frac{1}{\Lambda(q-1)}\ln\left(\frac{KJ_0^{q-1}}{KJ_0^{q-1}-\Lambda}\right). \tag{4.34}$$

В итоге (с учетом теоремы 1) доказана

Теорема 3. *Существует единственное непродолжаемое решение задачи* (2.2). *При условиях* (4.33) *это решение существует лишь на конечном промежутке* $[0,T_0)$, *где* T_0 *удовлетворяет оценке* (4.34), *причем в этом случае с необходимостью*

$$\lim_{t\to T_0-0}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}=+\infty.$$

5. Численное исследование

Нами был численно исследован ряд примеров с конкретными данными. При этом для численной оценки времени разрушения решения был использован метод, основанный на оценке эффективного порядка точности разностной схемы по Ричардсону, предложенный в работах Калиткина и соавторов [20], [21].

Основная идея состоит в том, чтобы сравнивать теоретический порядок аппроксимации с эффективным порядком точности численного решения, оцененным методом Ричардсона. Временно́й слой, на котором эти порядки начинают существенно различаться, и представляет оценку (с точности порядка одного-двух шагов временно́й сетки в зависимости от того, насколько резко падает эффективный порядок точности) времени разрушения решения, а локализация разрушения по пространственной переменной производится согласно распределению эффективного порядка точности на этом слое. При этом аналитическая и численная части исследования взаимно дополняют друг друга. Так, промежуток времени для численного счета выбирается согласно аналитически полученной оценке сверху на время разрушения. В свою очередь, численное моделирование уточняет момент и характер этого разрушения.

Мы уже неоднократно использовали этот метод для различных типов уравнений и подробно изложили наш подход (см. [22]–[28]), поэтому здесь воздержимся от описания алгоритма и сразу перейдем к сравнению численных и теоретических результатов.

Расчеты были проведены для одномерного случая.

5.1. Серия примеров для задачи (2.1). Результаты расчетов приведены в таблице, где T_{low} и T_{up} – соответственно нижняя и верхняя аналитические оценки времени разрушения. Нижняя оценка при $q = 3$ вычисляется по формуле (4.28), верхняя – по формуле (4.17) при $E(0) \leqslant 0$ (см. формулу (4.16)) и по формуле (4.18) при $E(0) > 0$. Далее, в таблице также приведены отношения $R_{\text{low}} = \widetilde{T}_0/T_{\text{low}}$, $R_{\text{up}} = T_{\text{up}}/\widetilde{T}_0$, где $\widetilde{T}_0$ – численная оценка времени разрушения.

№	$u_0(x)$	λ, q	T_{low}	R_{low}	$\widetilde{T}_0$	R_{up}	T_{up}
1.1	$2.5\sin(x)$	$\lambda = 0.6$, $q = 3$	0.016	2.9	0.047 ± 0.010	11	0.5
1.2	$x^2(\pi - x)$	$\lambda = 0.6$, $q = 3$	0.0024	5.6	0.015 ± 0.001	33	0.5
1.3	$4\sin x + \sin 3x$	$\lambda = 0.6$, $q = 3$	0.00027	7.4	0.020 ± 0.002	7.5	0.5
1.4	$1.75\sin(x)$	$\lambda = 0.6$, $q = 3$	0.033	3.4	0.112 ± 0.002	11	1.244

Как видно, во всей группе примеров численная оценка времени разрушения находится в промежутке между нижней и верхней аналитическими оценками и существенно их уточняет. (Отметим, что в случае отрицательного $E(0)$ теоретическая оценка сверху одна и та же: 0.5. Это не случайно и связано со спецификой вывода оценки.)

5.2. Серия примеров для задачи (2.2). Результаты расчетов снова приводим в таблице. Обозначения те же, но аналитической оценки снизу в этом случае нет.

В примере 2.1 разрушение может быть установлено только численно, поскольку метод первой собственной функции неприменим из-за нарушения условия $\lambda < \lambda_1$[1]. В примере 2.2 метод первой собственной функции применим, однако результата о разрушении не дает, поскольку нарушено условие (4.33). Наконец, в примере 2.3 получены и численная, и аналитическая оценка времени разрушения решения.

№	$u_0(x)$	λ, q	$\widetilde{T}_0$	R_{up}	T_{up}
2.1	$\sin(2x)$	$\lambda = 1.5$, $q = 2$	0.90 ± 0.05	–	–
2.2	$\sin(x) + \sin(3x)$	$\lambda = 0.6$, $q = 3.5$	0.30 ± 0.02	–	–
2.3	$u_0(x) = \dfrac{-2}{\pi}x^2 + 2x$	$\lambda = 0.6$, $q = 3$	0.14 ± 0.01	1.4	0.19

6. Заключение

В данной работе проведено аналитическое и численное исследования явления разрушения решений начально-краевых задач для двух псевдопараболических уравнений. В аналитическое исследование входит доказательство теорем о непродолжаемых решениях начально-краевых задач для рассматриваемых уравнений, а также получение достаточных условий разрушения решения за конечное время, и оценки времени разрушения.

Опираясь на эти аналитические результаты, для каждых конкретных данных можно провести численное исследование разрушения решения. Численное исследование позволяет (для каждой конкретной задачи) существенно уточнить эту оценку. А именно, мы получаем оценку времени разрушения с погрешностью порядка одного-двух шагов сетки по времени, что, как правило, существенно точнее, чем знать лишь промежуток (который может быть весьма большим) между верхней и нижней теоретической оценками. В наших примерах отношение верхней аналитической оценки к численной варьировалось от величины порядка единицы до нескольких десятков. Кроме того, в некоторых случаях аналитический метод не дает информации о разрушении решении, но численные расчеты позволяют выдвинуть гипотезу о наличии разрушения.

Однако нельзя говорить, что численное исследование лишает ценности аналитические результаты, уже потому, что промежуток времени, на котором следует запускать численный счет, определяется аналитической верхней оценкой времени разрушения. Таким образом, аналитическая и численная части исследования неразрывно связаны.

Мы хотели бы также обратить внимание читателя, что используемый численный метод позволяет провести единообразное численное исследование разрушения решений уравнений, столь разных по аналитическим свойствам, как уравнения (1.1) и (1.2) (и многих других, см. [22]–[28]).

[1] Строго говоря, в этой ситуации не работает и приведенное выше доказательство теоремы о непродолжаемом решении: мы пользовались монотонностью оператора $\triangle u + \lambda u$, стоящего под знаком производной по времени, для доказательства его ограниченной обратимости. Но в рассмотренном здесь одномерном случае этот оператор легко обращается явно (если λ не совпадает с собственными значениями оператора второй производной с граничными условиями Дирихле).

7. Приложение

Докажем, что операторы $F'_{i,f}\colon L^{q+1}(\Omega) \to L^{(q+1)/q}(\Omega)$ являются ограниченно липшиц-непрерывными. Это будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $p > 1$. Операторы*

$$\mathscr{F}_1\colon v \mapsto |v|^p, \qquad \mathscr{F}_2\colon v \mapsto |v|^{p-1}v, \qquad \mathscr{F}_i\colon L^{p+1}(\Omega) \to L^{(p+1)/p}(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

являются ограниченно липшиц-непрерывными, т.е. существует такая монотонно неубывающая функция $\mu(s)$, что

$$\forall\, v_1(x), v_2(x) \in L^{p+1}(\Omega)$$
$$\|\mathscr{F}_i(v_1) - \mathscr{F}_i(v_2)\|_{(p+1)/p} \leqslant \mu(\max(\|v_1\|_{p+1}, \|v_2\|_{p+1}))\|v_1 - v_2\|_{p+1}.$$

Доказательство. Заметим, что при $p > 1$

$$\frac{d}{ds}|s|^p = p|s|^{p-1}\operatorname{sgn} p, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Пусть $v_1(x)$, $v_2(x)$ – некоторые произвольно фиксированные представители элементов $v_1, v_2 \in L^{p+1}(\Omega)$. (Легко видеть, что их конкретный выбор на дальнейшие рассуждения не повлияет.) Тогда по теореме Лагранжа о конечных приращениях для любого $x \in \Omega$ в силу (7.1) имеем

$$\begin{aligned} ||v_1(x)|^p - |v_2(x)|^p| &= p|\theta(x)|^{p-1} \cdot |v_1(x) - v_2(x)| \\ &\leqslant p||v_1(x)|^{p-1} + |v_2(x)|^{p-1}| \cdot |v_1(x) - v_2(x)|, \\ \theta(x) &\in [\min(v_1(x), v_2(x)), \max(v_1(x), v_2(x))], \end{aligned} \tag{7.2}$$

для оператора $\mathscr{F}_2$ оценка аналогична. В силу обобщенного неравенства Гёльдера и неравенства Минковского из (7.2) получаем

$$\begin{aligned} &\||v_1(x)|^p - |v_2(x)|^p\|_{(p+1)/p} \\ &\quad\leqslant p(\||v_1(x)|^{p-1}\|_{(p+1)/(p-1)} + \||v_2(x)|^{p-1}\|_{(p+1)/(p-1)}) \cdot \|v_1(x) - v_2(x)\|_{p+1}, \end{aligned}$$

что и доказывает ограниченную липшиц-непрерывность рассматриваемых операторов с $\mu(s) = 2ps^{p-1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[2] М. О. Корпусов, "О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской", *ТМФ*, **194**:3 (2018), 403–417.

[3] Е. В. Юшков, М. О. Корпусов, "Градиентная катастрофа в обобщенных уравнениях Бюргерса и Буссинеска", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:6 (2017), 232–242.

[4] М. О. Корпусов, А. А. Панин, "О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме", *Матем. заметки*, **102**:3 (2017), 383–395.

[5] М. О. Корпусов, "О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн", *ТМФ*, **187**:3 (2016), 447–454.
[6] М. О. Корпусов, "Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:5 (2015), 103–162.
[7] А. А. Панин, "Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Розенау–Бюргерса с различными граничными условиями", *ТМФ*, **177**:1 (2013), 93–110.
[8] М. О. Корпусов, А. А. Панин, "Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с нелокальным граничным условием", *ТМФ*, **175**:2 (2013), 159–172.
[9] А. А. Панин, Г. И. Шляпугин, "О локальной разрешимости и разрушении решений одномерных уравнений типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы", *ТМФ*, **193**:2 (2017), 179–192.
[10] Г. А. Свиридюк, В. О. Козак, "Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа", *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 292–297.
[11] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Е. В. Юшков, *Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики*, Физический факультет МГУ, М., 2014.
[12] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2001, 3–383.
[13] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
[14] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, "Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.
[15] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, *Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Геометрические и топологические свойства линейных пространств*, Красанд, М., 2011.
[16] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
[17] А. А. Панин, "О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра", *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884–903.
[18] М. О. Корпусов, А. А. Панин, "О разрушении решения абстрактной задачи Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:5 (2014), 91–142.
[19] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы современной математической физики*, Т. 1, ГИТТЛ, М.–Л., 1951.
[20] Е. А. Альшина, Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин, "Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:10 (2005), 1837–1847.
[21] A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, "Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **148**:1 (2008), 143–162.
[22] M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, E. V. Yushkov, "Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis", *J. Math. Anal. Appl.*, **442**:2 (2016), 451–468.
[23] Д. В. Лукьяненко, А. А. Панин, "Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе", *Выч. мет. программирование*, **17**:4 (2016), 437–446.
[24] М. О. Корпусов, Д. В. Лукьяненко, Е. А. Овсянников, А. А. Панин, "Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью", *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, **10**:2 (2017), 107–123.

[25] M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, G. I. Shlyapugin, "On the blow-up phenomena for a 1-dimensional equation of ion sound waves in a plasma: analytical and numerical investigation", *Math. Methods Appl. Sci.*, **41**:8 (2018), 2906–2929.

[26] M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, "Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors", *J. Math. Anal. Appl.*, **459**:1 (2018), 159–181.

[27] М. О. Корпусов, Д. В. Лукьяненко, А. А. Панин, Е. В. Юшков, "О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 43–78.

[28] M. O. Korpusov, D. V. Lukyanenko, A. A. Panin, E. V. Yushkov, "Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis", *Math. Methods Appl. Sci.*, **40**:7 (2017), 2336–2346.

И. И. Колотов
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

А. А. Панин
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
E-mail: a-panin@yandex.ru

Поступило
23.04.2018
После переработки
20.06.2018
Принято к публикации
12.09.2018