



Общероссийский математический портал

В. Н. Чубариков, М. Л. Шарапова, Об интерполяции функций многих переменных,
Чебышевский сб., 2017, том 18, выпуск 4, 339–347

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-338-346

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

16 марта 2025 г., 09:09:27



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-338-346

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ¹

В. Н. Чубариков, М. Л. Шарапова (г. Москва)

Аннотация

В настоящей работе построены эффективные многомерные интерполяционные формулы для периодических функций, точные на классах многочленов Фурье. Эта работа продолжает исследования Н.М.Коробова [5], В.С.Рябенского [11], С.М.Воронина [8] и других учёных по применению теоретико-числового метода в приближённом анализе. Эти авторы число узлов рассматриваемых ими сеток брали равным простому числу в кольце целых рациональных чисел и в кольцах целых алгебраических чисел.

Здесь мы рассматриваем класс строго регулярных периодических функций $f(x_1, \dots, x_n)$, имеющих период единица по каждой переменной и разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье (см., например, [15], с.447) вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} c(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)},$$

где

$$c(m_1, \dots, m_n) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Далее, выбирая число точек решётки N в виде $N = N_1 \dots N_n$, где $(N_s, N_t) = 1$ при $s \neq t, 1 \leq s, t \leq n$ и $N_s \asymp N^{1/n}, 1 \leq n$, и используя китайскую теорему об остатках, строим интерполяционный многочлен вида

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{m_n=0}^{N_n-1} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)},$$

где

$$c(m_1, \dots, m_n) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^* m_1}{N_1} + \dots + \frac{M_n^* m_n}{N_n}\right)},$$

причём $N_s M_s = N, M_s M_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}$.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод в приближённом анализе, точки решётки, метод В.С.Рябенского, интерполяционный многочлен, кольца целых рациональных и целых алгебраических чисел, китайская теорема об остатках.

Библиография: 15 названий.

ON INTERPOLATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

V.N.Chubarikov, M.L.Scharapova (Moscow)

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант \mathcal{N} 16-01-00-071

Abstract

In this paper we constructed effective multivariate interpolation formulas for periodic functions, which are the precise on the Fourier polynomial classes. This paper continues investigations by N.M.Korobov [5], V.S.Rjaben'kii [11], S.M.Voronin [8], and others scientists on the application of the number-theoretic methods in numerical analysis. These authors was given the number of knots of a network equals to a prime number in the ring of integer rational numbers and in rings of integer numbers in algebraic numbers.

Here we consider the class of strictly regular periodic functions $f(x_1, \dots, x_n)$, having the period on of one the each variables, and expanding in the absolute convergent Fourier series (see, for example, [15], p. 447) of the form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} c(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)},$$

where

$$c(m_1, \dots, m_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Further, we select the number of lattice points N in the form $N = N_1 \dots N_n$, where $(N_s, N_t) = 1$ as $s \neq t, 1 \leq s, t \leq n$, and $N_s \asymp N^{1/n}, 1 \leq n$, and using the Chinese theorem on remainders, we construct the interpolation polynomial of the form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{N_n-1} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)},$$

where

$$c(m_1, \dots, m_n) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^* m_1}{N_1} + \cdots + \frac{M_n^* m_n}{N_n}\right)},$$

moreover $N_s M_s = N, M_s M_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}$.

Keywords: the number-theoretic method in the numerical analysis, a lattice points, the V.S.Rjaben'kii method, the interpolation polynomial, rings of the integer rational and the integer algebraic numbers, the Chinese theorem on remainders.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В настоящей работе продолжены исследования В.С.Рябенского [11] по применению теоретико-числового метода к задаче интерполяции периодической функции многих переменных тригонометрическим многочленом. Этот многочлен называют интерполяционным, если при возрастании числа узлов интерполяции погрешность, т.е. разность между значением функции и рассматриваемым тригонометрическим многочленом, при каком-либо способе взятия предела стремится к нулю. Следуя Н.М.Коробову [5], в теоретико-числовом методе последовательность N чисел узлов интерполяции пробегала последовательность всех простых чисел. Здесь мы берем эту последовательность в виде

$$N = N_1 \dots N_n, N_r \asymp N^{1/n}, (N_s, N_t) = 1, 1 \leq r, s, t \leq n, s \neq t,$$

где n — число переменных интерполируемой функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Заметим, что условие $N_r \asymp N^{1/n}, 1 \leq r \leq n$, обеспечивает “равноправность” переменных x_1, \dots, x_n , а условие $(N_s, N_t) = 1, 1 \leq s, t \leq n, s \neq t$, имеет арифметический характер и связано с применением китайской теоремы об остатках.

Для большей ясности изложения в качестве примера рассмотрим сначала случай функций одной переменной.

2. Одномерный случай

Пусть $f(x) \in E_1^\alpha$, $\alpha > 1$, и является периодической функцией, определенной на вещественной оси и имеющей ограниченную вариацию на периоде, равном 1. Тогда она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c(m) e^{2\pi i m x}, \quad c(m) = c(m; f) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx.$$

Далее для любого натурального числа N определим функцию

$$F(x) = F_N(x) = \sum_{N/2 < m \leq N/2} \tilde{c}(m) e^{2\pi i x}, \quad \tilde{c}(m) = \tilde{c}(m; f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}.$$

Пусть $R(x) = f(x) - F(x)$ погрешность при замене функции $f(x)$ на функцию $F(x)$. Оценим сверху величины $|R(x)|$ и

$$\Delta_2 = \sup_f \int_0^1 |R(x)|^2 dx,$$

где f принадлежит определённому выше классу функций.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема А. $\Delta_2 \ll N^{1-2\alpha}$.

Доказательство. Выразим коэффициенты $\tilde{c}(m)$ тригонометрического многочлена $F(x)$ через коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Для любых целых k и m имеем

$$c\left(m; e^{2\pi i k x}\right) = \int_0^1 e^{2\pi i (k-m)x} dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k \neq m, \end{cases}$$

$$\tilde{c}\left(m; e^{2\pi i k x}\right) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{2\pi i \frac{(k-m)l}{N}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \equiv m \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } k \not\equiv m \pmod{N}. \end{cases}$$

Таким образом, используя последние соотношения, находим

$$\tilde{c}(m) = \tilde{c}(m; f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c(l) e^{2\pi i \frac{kl}{N}} e^{-2\pi i \frac{km}{N}} =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{c(l)}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \frac{k(l-m)}{N}} = \sum_{l \equiv m \pmod{N}} c(l).$$

Равенство Ляпунова–Парсевала даёт

$$\int_0^1 |R(x)|^2 dx = \sum_{N/2 < m \leq N/2} |\tilde{c}(m) - c(m)|^2 + \sum_{-N/2 \leq m} |c(m)|^2 + \sum_{m > N/2} |c(m)|^2.$$

Отсюда, используя предыдущее равенство, получим

$$\int_0^1 |R(x)|^2 dx = \sum_{-N/2 < m \leq N/2} \left| \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \equiv m \pmod{N}}}^{\infty} c(l) \right|^2 +$$

$$+ \sum_{m \leq -N/2} |c(m)|^2 + \sum_{m > N/2} |c(m)|^2 = R_1 + R_2 + R_3,$$

где штрих в суммировании означает, что $l \neq m$.

Следовательно,

$$R_1 = \sum_{-N/2 < m \leq N/2} \left| \sum_{|q| \geq 1} c(Nq + m) \right|^2 \ll \sum_{0 \leq m \leq N/2} \left| \sum_{q \geq 1} \frac{1}{(Nq - m)^\alpha} \right|^2 \ll N^{-2\alpha+1},$$

$$R_2 + R_3 \ll N^{-2\alpha+1}.$$

Теорема доказана.

Теорема Б. *Справедлива оценка*

$$|R(x)| \ll N^{-\alpha+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$R(x) = \sum_{-N/2 < m \leq N/2} (c(m) - \tilde{c}(m))e^{2\pi i x} + \sum_{m \leq -N/2} c(m)e^{2\pi i m x} + \sum_{m > N/2} c(m)e^{2\pi i m x}.$$

Поскольку

$$\tilde{c}(m) - c(m) = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \equiv m \pmod{N}}}^{+\infty} c(l),$$

отсюда находим

$$|R(x)| \leq \sum_{|m| \leq N/2} |c(m) - \tilde{c}(m)| + \sum_{|m| \geq N/2} |c(m)| \ll N^{-\alpha+1}.$$

Теорема доказана.

3. Многомерный случай

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$, имеющая период 1 по каждой переменной, разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} c(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)}, \quad (1)$$

причём будем предполагать, что $f \in E_n^\alpha$, $\alpha > 1$, то есть для всякого набора $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$, справедливо неравенство

$$|c(m_1, \dots, m_n)| \leq (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_n)^{-\alpha}, \quad \bar{m} = \max\{1, |m|\}, \quad (2)$$

и коэффициенты Фурье определяются равенствами

$$c(m_1, \dots, m_n) = c(\bar{m}; f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)} dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Пусть, далее, $N = N_1 \dots N_n$, причём $N_r \asymp N^{1/n}$, $r = 1, \dots, n$, $(N_s, N_t) = 1$ при $s \neq t$, $1 \leq s, t \leq n$. Наконец, найдем для M_s , определяемого условием $M_s N_s = N$, вычеты

M_s^* из сравнения $M_s M_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}, 1 \leq s \leq n$. Из китайской теоремы об остатках любой вычет x по модулю N единственным способом представляется в виде

$$x \equiv M_1 M_1^* x_1 + \dots + M_n M_n^* x_n, \tag{4}$$

где вычеты x_r пробегают все классы вычетов по модулю $N_r, r = 1, \dots, n$.

Пусть $\min \{N_1, \dots, N_n\} = L$. Определим при $|m_1| \leq N_1, \dots, |m_n| \leq N_n$, набор чисел

$$\begin{aligned} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) = \tilde{c}(\bar{m}) &= \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) \times \\ &\times e^{-2\pi i \left(\frac{M_1^* m_1 k_1}{N_1} + \dots + \frac{M_n^* m_n k_n}{N_n}\right)}, \end{aligned} \tag{5}$$

функцию

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{-N_1/2 < m_1 \leq N_1/2} \dots \sum_{-N_n/2 < m_n \leq N_n/2} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)}. \tag{6}$$

Положим

$$R(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n). \tag{7}$$

и

$$\Delta_2 = \sup_{f \in E_n^\alpha} \int_0^1 \dots \int_0^1 |R(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n. \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть $f \in E_n^\alpha$. Тогда тригонометрический многочлен $F(x_1, \dots, x_n)$, определённый равенством (6), является интерполяционным и справедлива оценка $\Delta_2 \ll N^{2(1-\alpha)/n}$.

Доказательство. Пользуясь равенством Ляпунова–Парсеваля, находим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \dots \int_0^1 |R(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n = \\ &= \sum_{-N_1/2 < m_1 \leq N_1} \dots \sum_{-N_n/2 < m_n \leq N_n} |\tilde{c}(m_1, \dots, m_n) - c(m_1, \dots, m_n)|^2 + \\ &\quad + \sum_{\substack{m_1 \\ \exists s: |m_s| > L_s}} \dots \sum_{m_n} |c(m_1, \dots, m_n)|^2. \end{aligned}$$

Имеем для коэффициентов Фурье функции $f(\bar{x})$ и тригонометрического многочлена $F(\bar{x})$ при $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$ следующие соотношения

$$\begin{aligned} c(\bar{m}; e^{2\pi i(\bar{k}, \bar{x})}) &= \int_0^1 e^{2\pi i(\bar{k} - \bar{m}, \bar{x})} dx = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{k} = \bar{m}, \\ 0, & \text{если } \bar{k} \neq \bar{m}, \end{cases} \\ \tilde{c}(\bar{m}; e^{2\pi i(\bar{k}, \bar{x})}) &= \frac{1}{N} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{l_n=0}^{N_n-1} e^{2\pi i \left(\frac{M_1^*(k_1 - m_1)l_1}{N_1} + \dots + \frac{M_n^*(k_n - m_n)l_n}{N_n}\right)} = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{k} \equiv \bar{m} \pmod{\bar{N}}, \\ 0, & \text{если } \bar{k} \not\equiv \bar{m} \pmod{\bar{N}}, \end{cases} \end{aligned}$$

где выражение $\bar{\mathbf{k}} \equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{N}}$ означает, что выполняются n сравнений вида $k_s \equiv m_s \pmod{N_s}$, $s = 1, \dots, n$.

Наконец, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}) &= \tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}; f) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) \exp\left\{-2\pi i \sum_{s=1}^n \frac{M_s^* k_s m_s}{N_s}\right\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \left(\sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{+\infty} c(\bar{\mathbf{l}}) \exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^n \frac{M_s^* k_s l_s}{N_s}\right\} \right) \exp\left\{-2\pi i \sum_{s=1}^n \frac{M_s^* k_s m_s}{N_s}\right\} = \\ &= \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{+\infty} c(\bar{\mathbf{l}}) \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^n \frac{M_s^* k_s (l_s - m_s)}{N_s}\right\} = \\ &= \sum_{l_1 \equiv m_1 \pmod{N_1}} \cdots \sum_{l_n \equiv m_n \pmod{N_n}} c(l_1, \dots, l_n). \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |R(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n = R_1 + R_2,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{-N_1/2 < m_1 \leq N_1/2} \cdots \sum_{-N_n < m_n \leq N_n/2} \left| \sum_{\substack{l_1 \equiv m_1 \pmod{N_1} \\ l_1 \neq m_1}} \cdots \sum_{\substack{l_n \equiv m_n \pmod{N_n} \\ l_n \neq m_n}} c(l_1, \dots, l_n) \right|^2, \\ R_2 &= \sum_{\substack{m_1 \\ \exists s: |m_s| \geq N_s/2}} \cdots \sum_{m_n} |c(m_1, \dots, m_n)|^2. \end{aligned}$$

Сначала оценим R_1 . Находим

$$R_1 \ll \sum_{-N_1 < m_1 \leq N_1/2} \cdots \sum_{-N_n/2 < m_n \leq N_n/2} \left| \sum_{q_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{+\infty} (\overline{N_1 q_1 + m_1} \cdots \overline{N_n q_n + m_n})^{-\alpha} \right|^2,$$

Поскольку при $N_s \geq 1$ и $m_s \geq 0$ ($s = 1, \dots, n$)

$$\sum_{q_s=1}^{+\infty} (\overline{N_s q_s + m_s})^{-\alpha} \leq \frac{1}{(N_s + m_s)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(N_s x + m_s)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{N_s^\alpha},$$

получим

$$R_1 \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^n N^{1-2\alpha}.$$

Теперь оценим R_2 . Имеем

$$R_2 \ll \frac{n}{\alpha - 1} N^{2(1-\alpha)/n}.$$

Теорема 2. Пусть $f \in E_n^\alpha$. Тогда тригонометрический многочлен $F(x_1, \dots, x_n)$, определённый равенством (6), является интерполяционным и для функции $R(x_1, \dots, x_n)$, определённой равенством (7), справедлива оценка $R(x_1, \dots, x_n) \ll N^{(1-\alpha)/n}$.

Доказательство. По формуле (7) имеем

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{-N_1/2 < m_1 \leq N_1/2} \dots \sum_{-N_n/2 < m_n \leq N_n/2} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) &= \tilde{c}(\bar{m}) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) \times \\ &\times e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^* m_1 k_1}{N_1} + \dots + \frac{M_n^* m_n k_n}{N_n}\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$|R(x_1, \dots, x_n)| \leq R_1 + R_2,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{-N_1/2 < m_1 \leq N_1/2} \dots \sum_{-N_n < m_n \leq N_n/2} \left| \sum_{\substack{l_1 \equiv m_1 \\ l_1 \neq m_1}}^{(mod N_1)} \dots \sum_{\substack{l_n \equiv m_n \\ l_n \neq m_n}}^{(mod N_n)} c(l_1, \dots, l_n) \right|, \\ R_2 &= \sum_{\substack{m_1 \\ \exists s: |m_s| \geq N_s/2}} \dots \sum_{m_n} |c(m_1, \dots, m_n)|. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $f \in E_n^\alpha$, находим

$$R_1 \ll \sum_{-N_1 < m_1 \leq N_1/2} \dots \sum_{-N_n/2 < m_n \leq N_n/2} \left(\sum_{q_1=1}^{+\infty} \dots \sum_{q_n=1}^{+\infty} (\overline{N_1 q_1 + m_1} \dots \overline{N_n q_n + m_n})^{-\alpha} \right).$$

Пользуясь оценкой

$$\sum_{q_s=1}^{+\infty} (\overline{N_s q_s + m_s})^{-\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{N_s^\alpha},$$

получим

$$R_1 \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^n N^{1-\alpha}.$$

Теперь оценим R_2 . Имеем

$$R_2 \ll \frac{n}{\alpha - 1} N^{(1-\alpha)/n}.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Отметим, что в настоящей работе в теоретико-числовом методе взяты простейшие узлы интерполяции в многомерном случае, обеспечивающие интерполяционный характер рассматриваемых формул, поэтому результаты теорем 1 и 2 могут быть улучшены. Естественно, если известны условия “неравноправия” переменных, то изменяя соответствующие условия порядка,

приведенные выше, в этом случае получим интерполяционные формулы, в которых степени интерполяционных тригонометрических многочленов по различным переменным будут отличаться друг от друга.

Другая сторона, связанная с арифметикой количества узлов интерполяции и применением китайской теоремы об остатках, также может быть модифицирована для большей привязки к условию решаемой задачи.

Наконец, последнее замечание касается использования алгебраических полей, более точно, арифметики колец целых чисел в них. Здесь будут продолжены исследования китайских математиков Хуа Ло-кена [6] и Ван Юаня [7], а также развита теория С.М.Воронина [8], продолженная в работах Н.Т.Темиргалиева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., М.: Наука, 1980, 144 с.
2. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях, М.: Гостехиздат, 1950, гл. III.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа, М.: Наука, 1986, 744 с.
4. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы: Учеб. пособие., М.: Наука, 1987, 600 с.
5. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, МЦНМО, 2004, 288 с.
6. *Hua L.-K.* Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
7. *Wang Y.* Selected Papers. Beijing, 1999, pp. 458.
8. *Воронин С. М.* Избранные труды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. 480 с.
9. *Архипов Г. И.* Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2013. 464 с.
10. *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 с.
11. Рябенский В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // ДАН СССР. — 1960. — Т.131, № 5. — С.1025-1027.
12. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома // Докл. РАН — 2016. — Т.466, № 2. — С.152-153.
13. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об одной кубатурной формуле для периодических функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. 2017. № 6. 59-62.
14. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об аналоге квадратуры Гаусса для периодических функций // Вестн. кибернетики. 2017. **28**, № 2. 60-65.
15. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов, 4-е изд., испр. — М: Дрофа, 2004. 640 с.

REFERENCES

1. [1]IMV *Vinogradov I. M.* Method of trigonometric sums in Number Theory, 2-nd edition, M.: Nauka, 1980, pp.144.
2. [2]ANK *Krylov A. N.* Lectures on numerical calculations, M.: Gostehizdat, 1950, ch.III.(in Russian).
3. [3]KIB *Babenko K. I.* Foundations of numerical analysis, M.: Nauka, 1986, pp. 744.(in Russian).
4. [4]BGK *Bahvalov N. S., Gidkov N. P., Kobel'kov G. M.* Numerical methods: Text-book, M.: Nauka, 1987, pp. 600.(in Russian).
5. [5]NMK *Korobov N. M.* Number theoretical methods in numerical analysis, MZNMО, 2004, pp. 288.(in Russian).
6. [6]LKH *Hua L.-K.* Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
7. [7]WY *Wang Y.* Selected Papers. Beijing, 1999, pp. 458.(in Chinese).
8. [8]SMV *Voronin S. M.* Selected Papers. M.: Publ. N.E.Bauman MGTU, 2006. pp. 480.(in Russian).
9. [9]Ar *Arkhipov G. I.* Selected Papers. Orel: Publ. Or'el State Univ., 2013. pp. 464.(in Russian).
10. [10]ACK *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 с.
11. [11]R *Ryaben'kii V. S.* On tables and interpolation of functions from some class// DAN SSSR . — 1960. — V.131, № 5. — p.1025-1027.
12. [12]Ch4 *Chubarikov V. N.* Arithmetical sums from polynomial values// Doklady RAS — 2016. — V.466, № 2. — p.152-153.
13. [13]Ch5 *Chubarikov V. N., Scharapova M. L.* On a cubature formulae for periodic functions// Bull. Moscow Univ. Ser.I, Math, mech. 2017. № 6. p. 59-62.
14. [14]CS *Chubarikov V. N., Scharapova M. L.* On analogue of .Gaussian quadrature for periodic functions// Bull. of Cybernetics. 2017. **28**, № 2, p. 60-65.(in Russian).
15. [15] ASC *Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N.* Lectures on mathematical analysis: University text-book, 4-th edition. — M: Drofa, 2004. pp. 640. (in Russian).

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет

Получено 11.12.2017

Получено 07.08.2017

Принято в печать 14.12.2017